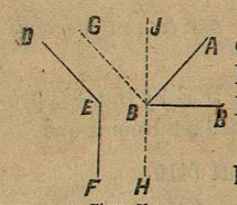

Figura 71.

Si los ángulos son de diferente especie, como en la figura 71, tirando por el vértice B las rectas B G y B H respectivamente paralelas á E D y á E F, tendremos que

G B H=D E F (419)

prolongando B H hasta J

G B H+G B J=2 rectos;

pero como

G B J=A B B'

sustituyendo se tiene:

G B H+ A B B'=2 rectos

luego

D E F + A B B'=2 rectos

que es lo que se debia demostrar.

423.—Problemas de paralelas.—I.—*Por un punto* C *dado fuera de una recta* A B, *tirarle una paralela.*

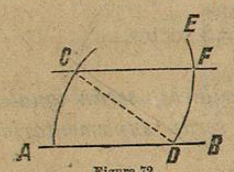

Figura 72.

1ª *Construccion.* (fig. 72).—Desde el punto C como centro y con un radio cualquiera, trácese el arco de círculo D E: hágase en seguida centro en D, y con el mismo radio trácese el arco C A: tómese la cuerda A C y llévese de D á F; tirando la recta C F ésta será la paralela pedida.

En efecto, si se tira la recta C D resulta que los ángulos C D A y D C F son iguales, por tener por medida arcos iguales (380); pero como estos ángulos tienen la posicion de alternos internos, las rectas serán paralelas.

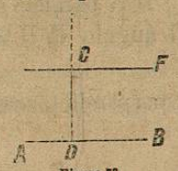

Figura 73.

2ª *Construccion.* (Fig. 73).—Desde el punto dado C bájese la perpendicular C D, y en seguida prolongando D C levántese en C la recta C F perpendicular á C D. La línea C F será la paralela pedida en razon de ser por construccion F C D=C D A y ser estos ángulos alternos internos.

II.—*Por un punto* A (fig. 74) *tomado fuera de una recta* B C *tirar otra que la encuentre bajo un ángulo dado* M.

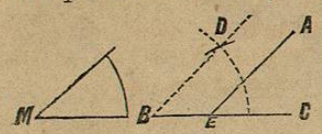

Figura 74.

En un punto cualquiera, B por ejemplo, de la recta B C, constrúyase un ángulo D B C igual á M, y por el punto A tírese la recta A E paralela á B D. Esta recta llenará la condicion del problema, supues-

to que el ángulo A E C=B por correspondientes, y B=M por construccion, luego A E C=M.

Estas construcciones, así como las de los problemas de perpendiculares, pueden facilitarse haciendo uso de la escuadra y del trasportador; pero, por regla general, son mucho más exactas las resoluciones que se efectúan por medio del compás.

III.—*Construir en un punto un ángulo igual á otro.*

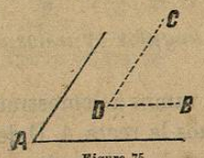

Figura 75.

(Fig. 75). Sean A el ángulo, y D el punto dado. Por el punto D se tirarán las rectas D B y D C paralelas á los lados del ángulo, y estando formados estos ángulos por lados paralelos y teniendo sus vértices en el mismo sentido, serán iguales (419).

Si se prolongara el lado B D más allá de D, esta construccion daria el medio para encontrar el suplemento de un ángulo A.

TRIANGULOS.

424.—Definiciones.—Hemos dicho que se llama *triángulo rectilíneo una figura cerrada por tres líneas rectas.* Se consideran en los triángulos los valores relativos de los lados y de los ángulos.

Triángulo escaleno es el que tiene desiguales sus tres lados.

Triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales; y equilátero es el que tiene sus tres lados iguales.

Se llama *triángulo oblicuángulo al que no está formado por ningun ángulo recto,* se dice que es *obtusángulo cuando uno de los ángulos es obtuso, acutángulo cuando todos los ángulos son agudos; y rectángulo cuando uno de los ángulos es recto.*

En los triángulos rectángulos, el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa, y á los otros dos lados se les denomina catetos.

425.—*En todo triángulo* A B C (fig. 76), *un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos.*

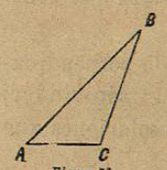

Figura 76.

Siendo la recta A B el camino más corto entre dos puntos, se infiere que A B<A C+C B.

426.—*Un lado cualquiera* A B (fig. 76) *es mayor que la diferencia de los otros dos.*

En virtud del teorema anterior, se tiene:

$$A\,B+A\,C>B\,C$$

despejando á

$$A\,B>B\,C-A\,C$$

427.—*En todo triángulo isósceles son iguales los ángulos opuestos á los lados iguales.*

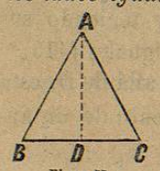

Figura 77.

En la figura 77 sea A B=A C, y vamos á demostrar que B=C. Desde el vértice A tiremos la recta A D de modo que divida el ángulo B A C en dos partes iguales, y tendremos que los triángulos B A D y D C A serán iguales por tener un ángulo igual B A D=D A C por construccion, formado por lados iguales, A D, que es comun; y A B=A C por lados del triángulo isósceles. Siendo los triángulos iguales, los ángulos opuestos al lado comun A D serán iguales (387), luego B=C.

De la igualdad de los triángulos se infiere ademas que B D=D C y que A D C=A D B, luego.

La bisectriz del ángulo desigual de un triángulo isósceles: 1° *divide el lado opuesto en dos partes iguales, y* 2° *es perpendicular á este lado.*

Supuesto que en un triángulo á los lados iguales están opuestos ángulos iguales, se infiere que *todo triángulo equilátero será equiángulo y recíprocamente.*

428.—*La recta que une el vértice de un triángulo isósceles al medio del lado opuesto, es perpendicular á este lado.*

Los dos triángulos A D B y A D C tendrán A D comun, A B=A C por lados del triángulo isósceles, y B D=D C por el supuesto; luego los triángulos serán iguales (386), y siéndolo se tendrá que el ángulo A D B=A D C.

429.—*Si dos ángulos* A *y* B *de un triángulo* A C B (fig. 78) *son iguales entre sí, los lados opuestos* B C *y* A C, *tambien serán iguales.*

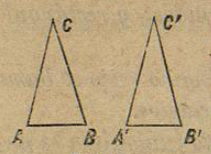

Figura 78.

Construyamos otro triángulo A' B' C' igual al primero, y en el que las letras acentuadas indican las mismas partes de las que no lo están. Siendo A=B=B'=A' si sobrepusiéramos los triángulos haciendo coincidir el lado A' B' con A B poniendo B' sobre A y A' sobre B, resultaria que por ser iguales los ángulos B' C' coincidiria con A C y A'

C' con B C, pero por construccion B' C'=B C y A' C'=A C, luego A C=B C que es lo que debia demostrarse.

430.—*En todo triángulo al mayor ángulo está opuesto el mayor lado.*

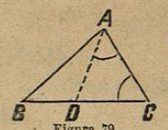

Figura 79.

Supongamos el ángulo B A C [fig. 79] mayor que C y vamos á demostrar que B C>A B.

Construyamos el ángulo D A C=C; el triángulo A D C será isósceles y se tiene

$$A\,D=D\,C$$

Por otra parte

$$A\,D+B\,D>A\,B$$

sustituyendo

$$D\,C+B\,D \text{ ó } B\,C>A\,B$$

que es lo que se debia demostrar.

431.—Recíprocamente *en todo triángulo* [fig. 79] *al mayor lado está opuesto el mayor ángulo.*

Si siendo B C>A B el ángulo A no fuera mayor que C, tendria que ser igual ó menor; pero no puede ser igual, porque entónces (429) B C seria igual á A B; ni puede ser menor, porque conforme al teorema directo [430] se tendria B C<A B, lo que es contrario al supuesto luego si el ángulo A no puede ser igual ni menor que C, resulta que será mayor, que es lo que teniamos que demostrar.

432.—*Si en dos triángulos A B C y A' B' C'* [fig. 80] *un ángulo A es mayor que otro A', y ambos ángulos están formados por lados respectivamente iguales, A C=A' C' y B A=B' A', el lado B C opuesto al mayor ángulo será mayor que B' C' opuesto al menor ángulo.*

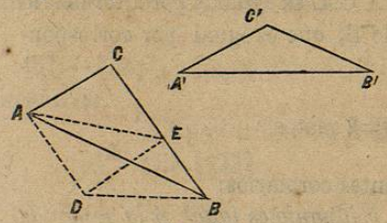

Figura 80.

DEMOSTRACION.—Si sobre el lado A B=A' B' construimos el triángulo A D B igual á A' B' C' y en seguida dividimos por mitad el ángulo D A C con la recta A E, en razon de ser C A B>B A D esta recta caerá dentro del ángulo mayor C A B. Reuniendo E D resultará el triángulo A E D igual á C A E por tener el ángulo C A E=E A D por construccion, formado por lados iguales [385] A E comun y A C=A D, luego

$$C\,E=E\,D$$

agregando E B se tiene

$$C\,B=E\,D+E\,B$$

pero

$$E\,D+E\,B>D\,B$$

luego

$$C\,B>D\,B \text{ ó que su igual } C'\,B'$$

que es lo que se debia demostrar.

Recíprocamente si B C>B' C' deberá ser el ángulo C A B>C' A' B'

En efecto, no puede ser C A B=C' A' B' porque entónces los triángulos serian iguales [385], y siéndolo resultaria B C=B' C' contra el supuesto.

Tampoco puede ser C A B<C' A' B'; porque conforme al teorema directo que acabamos de demostrar se tendrá B' C'>B C, lo que tambien es contra el supuesto.

Luego si C A B no puede ser igual ni menor que C' A' B' tendrá que ser mayor, que es lo que trataba de demostrarse.

433.—*La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos.*

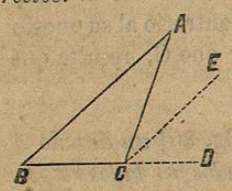

Figura 81.

Prolongado el lado B C [fig. 81] hasta D y tirando por el punto C la recta C E paralela á A B, tendremos que en virtud del teorema del número 390

$$A\,C\,B+A\,C\,E+E\,C\,D=2 \text{ rectos.}$$

Sustituyendo en esta ecuacion por A C E su igual A por alternos internos, y en lugar de E C D el ángulo B, que es igual por correspondiente, resulta

$$A\,C\,B+A+B=2 \text{ rectos.}$$

434.—De aquí se infieren los siguientes corolarios:

1° *El ángulo exterior* A C D *de un triángulo es igual á la suma de los dos interiores opuestos.*

Porque

$$A\,C\,D=A\,C\,E+E\,C\,D$$

sustituyendo

$$A\,C\,D=A+B$$

2° *El ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los opuestos.*

3° *Todo ángulo de un triángulo es suplemento de la suma de los otros dos.*

4° *Si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo, tambien será igual el tercer ángulo del primer triángulo al tercero del otro.*

435.—*Si desde un punto* D [fig. 82] *tomado en el interior de un triángulo se tiran rectas,* D B *y* D C *á las extremidades de un lado, el ángulo formado* B D C *será mayor que el ángulo* A *del triángulo opuesto á ese lado.*

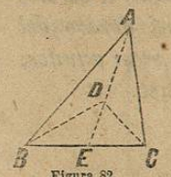

Figura 82.

Considerando el triángulo A D C, conforme al corolario segundo del párrafo anterior, se tiene:

$$E\,D\,C>D\,A\,C$$

en el triángulo A D B

$$E\,D\,B>D\,A\,B$$

sumando estas desigualdades

$$B\,D\,C>B\,A\,C$$

436.—*Un triángulo no puede tener á la vez dos ángulos obtusos, ni dos ángulos rectos, ni uno recto y otro obtuso.*

Porque en cualquiera de estos casos la suma de sus tres ángulos valdria más de dos ángulos rectos.

437.—*Los ángulos agudos de todo triángulo rectángulo son complementarios.*

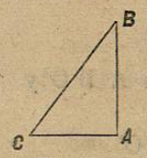

Figura 83.

En el triángulo A B C [fig. 83] rectángulo en A tenemos [433]

$$A+B+C=2 \text{ rectos}$$

de donde

$$B+C=2 \text{ rectos}-A$$

luego

$$B+C=1 \text{ recto.}$$

438.—*Si desde un punto tomado sobre un lado de un ángulo se baja una perpendicular al otro lado, ésta caerá dentro del ángulo cuando sea agudo, y caerá fuera cuando sea obtuso.*

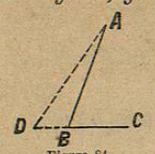

Figura 84.

Sea [fig. 84] el caso en que el ángulo A B C es agudo. Si la perpendicular bajada desde A no cayera dentro del ángulo, sino en el punto D, resultaria el triángulo A D B con el ángulo D recto y A B D obtuso, lo que es imposible [433].

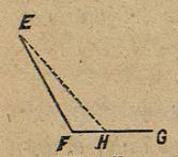

Figura 85.

Sea [fig. 85] el ángulo E F G obtuso. Si la perpendicular E H pudiera caer dentro del ángulo, nos resultaria el triángulo E F H con el ángulo H recto, y F obtuso, lo que es un absurdo.

439.—De aquí se infiere que *la perpendicular bajada desde el vértice de un ángulo de un triángulo sobre el lado opuesto, caerá dentro del triángulo cuando los ángulos adyacentes* [fig. 86] *al lado sean ayudos, y caerá fuera cuando* [fig. 87] *uno de los ángulos sea obtuso.*

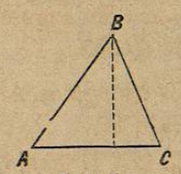

Figura 86.

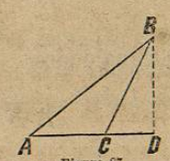

Figura 87.

440.—Hemos visto (384, 385 y 386) y demostrado que *dos triángulos son iguales: 1° cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales: 2° cuando tienen un ángulo igual formado por lados iguales: 3° cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales; y ahora agregaremos el siguiente caso:*

4° Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos.

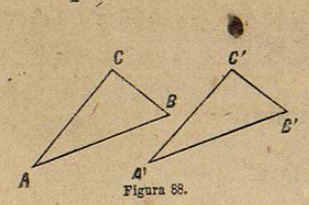

Figura 88.

Sean [fig. 88] los triángulos A B C y A' B' C' que tienen

A=A', B=B' y B C=B' C'

sumando las dos primeras ecuaciones se tiene que

A + B=A' + B'

luego C que es suplemento de A + B, será igual á C' suplemento de A' + B' (434 3°). De esto se infiere que los triángulos serán iguales por tener un lado igual, B C=B' C' adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, B=B' y C=C'.

Figura 89.

441.—Como habrá podido observarse en los cuatro casos de igualdad de los triángulos, siempre entra como elemento uno de los lados, pues dos triángulos no son iguales cuando tienen sus tres ángulos iguales, como puede observarse en la figura 89 con los triángulos cuyos lados son paralelos.

442.—*Dos triángulos rectángulos son iguales: 1° cuando tienen iguales las hipotenusas y uno de los ángulos agudos: 2° cuando tienen iguales un cateto y uno de los ángulos agudos: y 3° cuando tienen iguales la hipotenusa y uno de los catetos.*

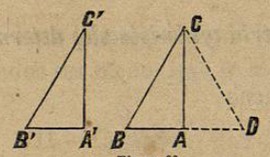

Figura 90.

Por ser los triángulos rectángulos, tendrán forzosamente el ángulo recto igual, así es que en el 1° y 2° caso los triángulos serán iguales por tener dos ángulos y un lado respectivamente iguales.

Para demostrar el tercer caso, sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 90) que tienen B C=B' C' y A C=A' C'.

Si sobre A C construimos el triángulo C A D igual C' A' B', tendremos que por tener los ángulos C A B y C A D la posicion de adyacentes y valer juntos dos rectos (397) la recta A D será prolongacion de B A, y como las dos oblícuas B C y C D son iguales, se separarán igualmente del pié de la perpendicular C A (399) luego B A=A D.

Así, pues, el triángulo A B C será igual á A C D por tener A C comun, A B=A D y B C=C D; pero siendo A C D igual á A' C' B' por construccion, se infiere que el triángulo A B C será igual á A' B' C'.

443.—Problemas de triángulos.—I.—*Dados dos ángulos de un triángulo determinar el tercero.*

Sea A=29° 15′, y B=75° 38′ y vamos á determinar á C.

Tenemos (433)

$$A + B + C = 180°$$

despejando á

$$C = 180° - (A + B)$$

sustituyendo

$$C = 180° - (29° 15' + 75° 38')$$

lo que da

$$C = 75° 7'$$

II.—*Conocido en un triángulo isósceles uno de los ángulos iguales determinar el del vértice.*

Sea A=B el ángulo conocido, y C el ángulo que se busca.

Tendremos

$$A + B + C = 180°$$

por ser A=B

$$2 A + C = 180°$$

de donde

$$C = 180° - 2 A.$$

III.—*Dado el ángulo C del vértice de un triángulo isósceles determinar los de la base.*

Despejando A en la última ecuacion, se tiene

$$A = 90° - \frac{c}{2}$$

Si se conocen los valores numéricos, bastará sustituirlos en estas ecuaciones.

IV.—*Dado un ángulo C de un triángulo y los dos lados a y b que lo forman* (fig. 91) *construir el triángulo.*

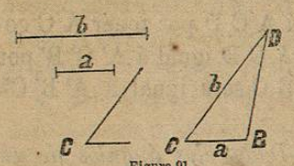

Figura 91.

Sobre la recta C B=a se construirá el ángulo C igual al dado y sobre el lado C D indefinido se tomará la parte C D=b; reuniendo el punto D con B, se tendrá el triángulo D B C que satisface las condiciones del problema.

El ángulo dado C debe ser menor que 180°.

V.—*Dado un lado a* (fig. 92) *y los dos ángulos adyacentes, construir un triángulo.*

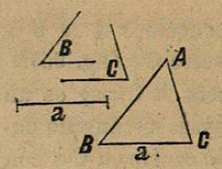

Figura 92.

Tómese B C=a; en cada uno de sus extremos constrúyanse los ángulos B y C iguales á los dados, y prolongando las rectas que los forman hasta su punto de interseccion A, se tendrá el triángulo pedido.

Para que el problema sea posible, se necesita tener B + C < 180°.

VI.—*Construir un triángulo conocidos sus tres lados a, b y c* (fig. 93).

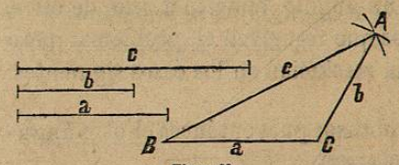

Figura 93.

Tómese B C=a y haciendo centro en B con un radio igual á c, trácese un arco de círculo, en seguida hágase centro en C y con un radio igual á b, trácese otro arco de círculo, y reuniendo el punto A de interseccion de los arcos con B y C, se tendrá el triángulo pedido.

Para que el problema sea posible, es necesario que el mayor de los lados sea menor que la suma de los otros dos.

VII.—*Construir un triángulo, dados dos ángulos A y B, y un lado a opuesto á uno de ellos.*

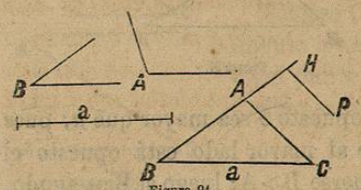

Figura 94.

Sea (fig. 94) a el lado opuesto al ángulo A. Tómese B C=a; en el punto B constrúyase el ángulo C B H =B; en un punto cualquiera de la recta B H constrúyase el ángulo H =A, y por el punto C tírese la recta C A paralela á H P. El triángulo B A C será el pedido.

Para que el problema sea posible, debe tenerse A + B < 180°.

Los problemas IV, V, VI y VII que corresponden á los cuatro casos de igualdad de los triángulos, no admiten más que una sola resolucion.

VIII.—*Construir un triángulo, dados dos lados y un ángulo opuesto á uno de ellos.*

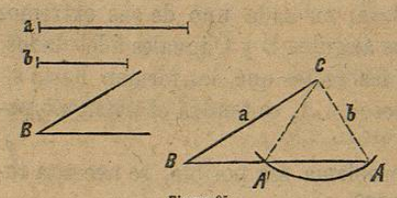

Figura 95.

Suponemos conocidos a y b y el ángulo B opuesto á *b* (fig. 95).

Tómese la recta B C=a; en un extremo constrúyase el ángulo dado B, y haciendo centro en C y con un radio igual á *b*, trácese un arco de círculo que cortará la recta B A en dos puntos A y A'; reuniendo C con A y con A', resulta que hay dos triángulos que satisfacen el problema: A B C y A' C B.

Cuando se conocen dos lados, y un ángulo opuesto á uno de ellos, por regla general hay dos triángulos que resuelven el problema; pero la cuestion no admitirá más que una resolucion en los casos siguientes:

1° Cuando el ángulo dado B sea obtuso; pues entónces el otro ángulo será forzosamente agudo (fig. 96) (436).

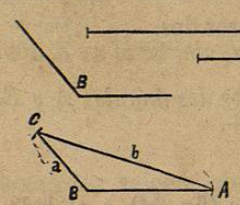

Figura 96.

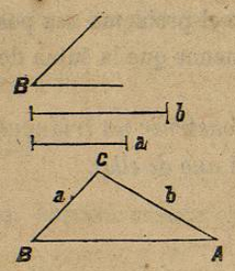

Figura 97.

2° Cuando siendo B agudo, el lado opuesto *b* sea mayor que *a;* pues entónces conforme al principio de que al mayor lado está opuesto el mayor ángulo, siendo b>a, deberá tenerse B>A; luego si B es agudo, tendrá que serlo A (fig. 97).

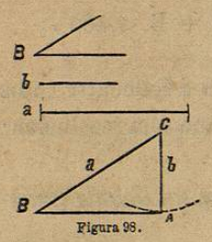

Figura 98.

3° Cuando siendo B agudo el arco no corta á la recta B A, sino que solo la toca en un punto. En este caso (fig. 98) el ángulo A será recto.

4° Cuando B sea recto, porque entónces A tendrá que ser agudo (436).

Por último, el problema será imposible cuando el lado dado *b* es menor que la perpendicular C A (fig. 98).

IX.—*Construir un triángulo isósceles, dado el ángulo C del vértice* (fig. 99) *y la base c.*

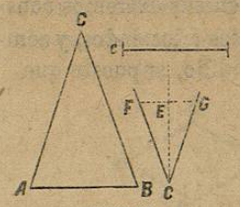

Figura 99.

Tómese la recta A B=c; dividase el ángulo C por la mitad con la línea C E; en un punto cualquiera E de esta recta, levántese la perpendicular F G, y construyendo en A y B ángulos iguales á F ó á G, se tendrá el triángulo A B C pedido.

X.—*Construir un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa* a (fig. 100) *y un ángulo agudo B.*

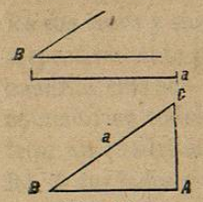

Figura 100.

Tómese la recta B C=a; en el punto B constrúyase un ángulo igual á B, y bajando desde C una perpendicular á la recta indefinida B A, se tendrá el triángulo B A C pedido.

XI.—*Construir un triángulo rectángulo, dado un cateto* b (fig. 101) *y el ángulo adyacente C.*

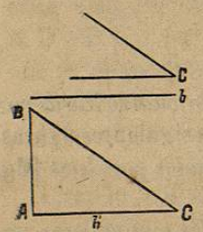

Figura 101.

Tómese C A=b; en el punto C constrúyase un ángulo igual al dado, y prolongando C A levántese en el punto A la perpendicular A B. El triángulo pedido será C B A.

XII.—*Determinar un ángulo igual á la suma de otros dos A y B, cuando esta suma es menor que dos rectos.*

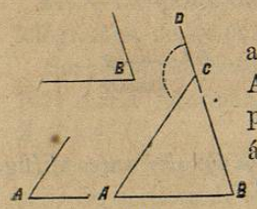

Figura 102.

Sobre los extremos de una recta de longitud arbitraria A B (fig. 102) constrúyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los dados; complétese el triángulo A B C, y prolongando B C, el ángulo pedido será A C D; pues por ser externo del triángulo es igual á B+A (434).

XIII.—*Dados dos ángulos A y B* (fig. 102) *cuya suma es menor que dos ángulos rectos, construir un ángulo igual á su suplemento.*

Tómese una recta A B de longitud arbitraria; en sus extremos constrúyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los dados, y completando el triángulo, el ángulo A C B será el pedido, supuesto que

$$A+B+A\ C\ B=180^\circ$$

despejando á

$$A\ C\ B=180^\circ-(A+B).$$

En todos los problemas que hemos resuelto, podrán darse valores numéricos á los datos, debiendo emplearse en este caso la escala y el trasportador ademas del compás para su resolucion.

CUADRILATERO.

444.—*Se llama cuadrilátero una figura cerrada por cuatro líneas rectas* [fig. 103]. En los cuadriláteros se distinguen las siguientes figuras.

Se llama trapecio un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos [fig. 104].

Paralelógramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos (fig. 105).

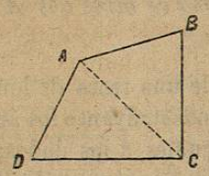

Figura 103.

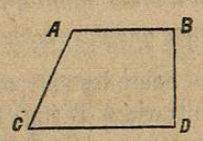

Figura 104.

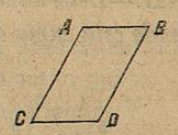

Figura 105.

Rombo es un paralelógramo que tiene los lados iguales entre sí (fig. 106) *y los ángulos diferentes.*

Rectángulo es un paralelógramo cuyos ángulos todos son rectos [fig. 107] *y los lados desiguales.*

Cuadrado es un paralelógramo que tiene iguales sus cuatro lados y sus cuatro ángulos [fig. 108].

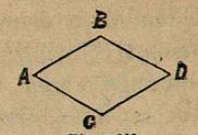

Figura 106.

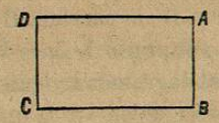

Figura 107.

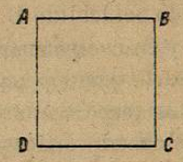

Figura 108.

Para que dos cuadriláteros sean iguales, es necesario que tengan iguales sus lados y sus ángulos, y que los ángulos iguales estén formados respectivamente por los lados iguales. En general, para probar que dos cuadriláteros son iguales, es preciso demostrar que sobreponiéndolos, coincidirian todos los extremos de los lados que los forman. Para construir un cuadrilátero, es indispensable conocer tres lados y dos ángulos, ó dos lados y tres ángulos; pero como los casos de igualdad de los cuadriláteros son algo complicados, generalmente lo que se hace es descomponerlos en dos triángulos, tanto para tratar de su igualdad como para construirlos conociendo algunos de sus elementos.

Las diagonales de un cuadrilátero generalmente son desiguales pero cada diagonal A C [fig. 103] es menor que la suma de los lados A D+D C ó que A B+B C con los que forma un triángulo, y mayor que su diferencia [426].

445.—*La suma de los ángulos de un cuadrilátero, es igual á cuatro rectos.*

Tirando la diagonal A C [fig. 103] el cuadrilátero quedará dividido en dos triángulos. Como la suma de los ángulos del cuadrilátero A+B+C+D es igual á la de los ángulos de que están formados los dos triángulos, y coma la suma de los ángulos de cada triángulo vale dos rectos [433], resulta que los del cuadrilátero valdrán cuatro rectos.

446.—Las propiedades de los cuadriláteros son comunes á los paralelógramos, de los cuales pasamos á ocuparnos.

Dos paralelógramos son iguales cuando tienen un ángulo igual (fig. 109) *A=A' formado por lados respectivamente iguales, A B=A' B' y A C=A' C'.*

Por ser el ángulo A=A' si sobrepusiéramos las figuras haciendo coincidir los vértices de estos ángulos y el lado A C con A C', el lado A B