III.—*Determinar el valor de un ángulo externo de un polígono regular de 5 lados.*

La suma de todos los ángulos externos vale 4 rectos (464), ó 360°, y como estos ángulos son iguales, uno valdrá $\frac{360}{5}=72°$

IV.—*Construir un polígono igual á otro dado, A B C D E F* (figura 129).

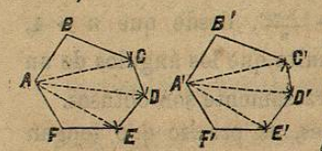

Figura 129.

A este fin, desde uno cualquiera de los vértices, A, por ejemplo, se tiran diagonales á todos los demás, con lo que quedará dividido en triángulos. Tómese A' B'= A B, y como se conocen los tres lados del triángulo A B C, se construirá el triángulo igual A' B' C'. Sobre A' C' se construirá un triángulo A' C' D' igual á A C D, cuyos tres lados se conocen, y así sucesivamente se construirán los demás triángulos hasta completar el polígono A' B' C' D' E' F', que será igual al dado por estar formado de triángulos iguales dispuestos en el mismo órden.

V.—*Construir un polígono regular de seis lados, conocida la longitud de uno de los lados:* a (fig. 130).

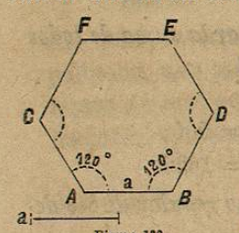

Figura 130.

Comenzaremos por determinar el valor de uno de los ángulos por la fórmula

$$A=\frac{S}{n}=\frac{2\,r\,(n-2)}{n}=\frac{180°\times 4}{6}=120°$$

En seguida tomaremos A B=a; en sus dos extremos construiremos ángulos de 120° por medio del trasportador; tomaremos A C y B D iguales á a; en C y D construiremos ángulos de 120°; tomaremos C F y D E iguales á a; y tirando F E tendremos el exágono regular pedido. E F debe como comprobacion resultar igual á a.

CIRCUNFERENCIA DEL CIRCULO.

Líneas rectas consideradas en el círculo.

468.—Hemos dicho que *se llama circunferencia de círculo una curva cerrada cuyos puntos todos están en un plano á igual distancia del centro*; y que *círculo es la porcion de superficie comprendida dentro de la circunferencia.*

En el número 369 igualmente hemos dado las definiciones de *radio, diámetro, arco, cuerda, sector, segmento, sagita y cuadrante;* por lo que ahora solo repetiremos que *se llama secante una recta A B, que cortando la circunferencia en dos puntos* [fig. 131], *tiene parte dentro y parte fuera del círculo;* y que se *entiende por tangente una recta que solo toca a la circunferencia, en un punto M como D H.*

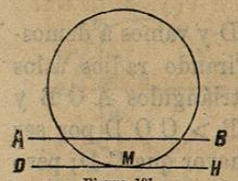

Figura 131.

469.—*Dos círculos descritos con el mismo radio son iguales;* porque si se sobrepusieran haciendo coincidir los centros, por ser iguales los radios, todos los puntos de una de las circunferencias coincidirian con los de la otra.

Así, pues, para probar que dos círculos coinciden al sobreponerlos, bastará demostrar que coinciden los centros y un punto de cada una de las circunferencias.

Para que dos arcos coincidan en todos sus puntos, bastará igualmente que puedan coincidir los centros de los círculos á que pertenecen, y sus puntos extremos.

De la definicion de circunferencia resulta que *todos los radios de un mismo círculo son iguales,* y como todo diámetro es igual á dos radios, es claro que *todos los diámetros de un mismo círculo ó de círculos iguales, son iguales.*

Ya demostramos en el número 373, que *el diámetro es la mayor de todas las cuerdas, y que divide la circunferencia en dos partes iguales.*

De esto resulta que *toda cuerda que no es diámetro subtende dos arcos desiguales;* pero cuando no se expresa lo contrario, se entiende que se trata del arco menor de los dos que subtende la cuerda.

470.—*Una recta A B* [fig. 132] *no puede cortar la circunferencia del círculo en más de dos puntos.*

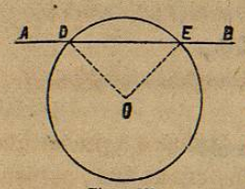

Figura 132.

Si la recta A B pudiera cortar ó tocar á la circunferencia en tres ó más puntos, tirando desde el centro rectas como O D, O E, todas estas rectas serian radios, y por tanto iguales; pero esto no es posible, porque como hemos demostrado en el número 402, desde un punto O no se pueden tirar á una línea B A, más que dos rectas iguales, que son las oblícuas que se separan igualmente del pié de la perpendicular.

471.—En el número 380 demostramos que en un mismo círculo ó en círculos iguales á arcos iguales, corresponden cuerdas iguales y recíprocamente, y ahora demostraremos el siguiente

TEOREMA.—*En un mismo círculo, ó en círculos iguales al arco mayor corresponde la cuerda mayor y recíprocamente, con tal que los arcos sean menores que una semicircunferencia.*

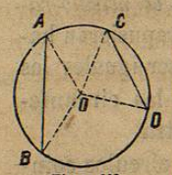

Figura 133.

Sea figura 133 el arco A B > C D y vamos á demostrar que la cuerda A B > C D. Tirando radios á los puntos A, B, C y D, resultan dos triángulos A O B y O C D, en los que el ángulo A O B > C O D por ser el arco A B, medida del primero, mayor que C D; pero los lados que forman el ángulo A O B son iguales á los que forman el ángulo C O D, luego conforme al teorema del número 432, tendremos el lado A B > C D, que es lo que se debia demostrar. Si los círculos fueran iguales, bastaria comenzar por sobreponerlos, y en seguida se daria la anterior demostracion.

472.—*Dos cuerdas iguales de un mismo círculo están equidistantes del centro.*

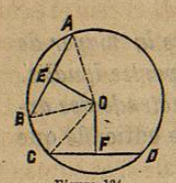

Figura 134

Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada del punto á la recta, siendo A B=C D [fig. 134], tendremos que demostrar que O E, perpendicular á A B, será igual á O F, perpendicular á C D. Tirando O B y O C resultan dos triángulos O B E y O C F, que serán iguales [442—3°] por

ser rectángulos y tener iguales las hipotenusas por radios y el cateto B E=C F, por ser mitades de cuerdas iguales A B=C D (427).

Siendo los triángulos iguales, se infiere que el lado O E será igual á O F.

473.—*De dos cuerdas desiguales la mayor está más cerca del centro.*

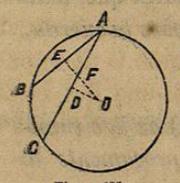

Figura 135.

Figura 135. Sea A C > A B, y vamos á probar que O D, perpendicular á A C, es menor que O F, perpendicular á A B. Tenemos que por ser la cuerda A B < A C el arco A B será menor que A C y la cuerda A B quedará dentro del arco A B C. Además O D < O E, porque la perpendicular es menor que cualquiera oblícua; y como O E < O F se infiere que O D < O F. Recíprocamente la cuerda ménos distante del centro será la mayor, supuesto que no puede ser igual ni menor que la que dista más.

474.—*De todas las cuerdas tiradas desde un punto interior A, del círculo, la mayor es la B C* (fig. 136) *que pasa por el centro, y la menor la D E, perpendicular al diámetro.*

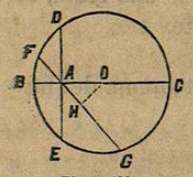

Figura 136.

B C es mayor que cualquiera otra cuerda, porque el diámetro es la mayor de todas las cuerdas. Ahora, para demostrar que D E es menor que otra cualquiera como F G, bajemos O H, perpendicular á F G y tendremos que siendo O H perpendicular y O A oblícua con respecto á F G O H < A O; luego por estar más cerca del centro F G que D E (473) será: F G > D E.

475.—*Toda recta C D* (fig. 137), *perpendicular á la mitad de una cuerda A B, pasará por el centro del círculo y por el medio del arco que la cuerda subtende*

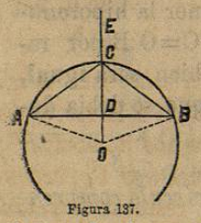

Figura 137.

Siendo por el supuesto C D perpendicular á la mitad de A B, debe pasar por todos los puntos equidistantes de A y de B (403—1°) y como el centro es uno de ellos, resulta que forzosamente pasará por el centro. El punto C, donde la misma perpendicular corta la circunferencia por igual razon estará equidistante de A y de B; luego la cuerda A C=C B y siendo iguales las cuerdas lo serán los arcos que cada una de ellas subtende.

476.—Supuesto que dos puntos fijan la posicion de una recta, y que *la mitad de la cuerda, el centro y el medio del arco están en la misma recta, resulta que siempre que una recta pase por dos de estos puntos, forzosamente pasará por el tercero.*

477.—Como desde un punto no se puede bajar más que una sola perpendicular á una recta (396), de lo que precede resulta que *toda perpendicular bajada del centro ó del medio de un arco sobre la cuerda, caerá en la mitad de dicha cuerda.*

478.—*El radio tirado al punto de contacto A* (fig. 138) *de la circunferencia con la tangente es perpendicular á esta; y recíprocamente la tangente será perpendicular al radio tirado al punto de contacto.*

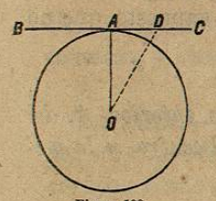

Figura 138.

Siendo B C tangente al círculo, no lo tocará más que en un solo punto A; luego si desde el centro tiramos varias rectas á la línea B C, cualquiera otra, como O D, que no sea el radio O A, deberá tener parte dentro y parte fuera de la circunferencia, por lo que A O < O D; y como (398) la perpendicular es la menor distancia de un punto á una recta, se infiere que el radio O A será perpendicular á la tangente.

La recíproca de esta proposicion está fundada en el teorema del número 394.

479.—*Si desde un punto A exterior á un círculo se tiran dos tangentes, las porciones de estas A B y A C* (fig. 139) *comprendidas entre el punto comun A y los de contacto serán iguales.*

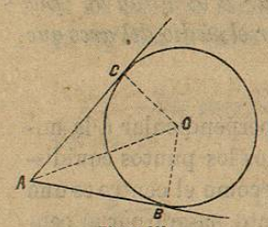

Figura 139.

Tirando la recta O A y los radios O C y O B, resultarán dos triángulos A O B y A O C, que serán iguales (442—3°) por ser rectángulos, uno en B y otro en C (478); por tener la hipotenusa A O comun, y un cateto O C=O B por radios; luego el tercer lado tambien será igual, esto es, A B=A C, que es lo que se debia demostrar.

480.—*Los arcos A B y C D* (fig. 140) *de un mismo círculo comprendidos entre paralelas son iguales.*

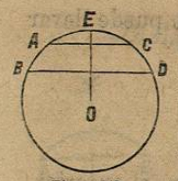

Figura 140.

Si desde el centro O tiramos una recta O E perpendicular á la cuerda B D, lo será tambien á A C [409] por ser ambas paralelas. Además esta perpendicular bajada desde el centro pasará por la mitad de la cuerda y por el medio del arco que cada una subtende [477 y 476], luego

$$BE = ED$$

y

$$AE = EC$$

restando la segunda ecuacion de la primera, se tiene

$$AB = CD$$

que es lo que se debia demostrar.

481.—*Los arcos A B y B C* [fig. 141] *comprendidos entre una cuerda y una tangente que le es paralela, son iguales.*

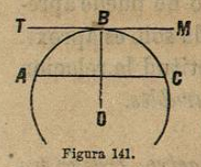

Figura 141.

Si desde el centro tiramos el radio O B, este será perpendicular á la tangente [478] y á la cuerda, por ser estas paralelas. Además, por ser perpendicular el radio á la cuerda [476] tendremos A B=B C.

482.—Problemas de líneas en el círculo.—I.—*Dados dos arcos de un mismo círculo ó de círculos iguales, determinar la relacion numérica de sus longitudes.*

No pudiendo hacerse con el compás la sobreposicion de los arcos, como lo hemos hecho [363] con las rectas, la supliremos con la de las cuerdas que siendo iguales corresponden á arcos iguales [fig 142]. Llevaremos la cuerda del arco menor C D, dos veces sobre A B, de A á E; y el arco A E estará compuesto de dos partes iguales á C D y una resta, por lo que

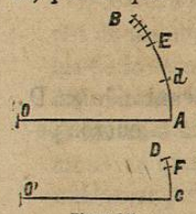

Figura 142.

$$AB = 2CD + EB$$

Se tomará la cuerda de la resta E B para llevarla de C á F sobre C D. Efectuado esto una vez, queda por resta el arco F D, de donde

$$CD = EB + FD$$

Finalmente, como la cuerda de la segunda resta F D se puede llevar cuatro veces sobre la anterior E B, se tendrá:

E B=4 F D

Sustituyendo este valor en el penúltimo, y luego ese en el anterior, etc., se tiene sucesivamente:

E B=4 F D, C D=5 F D, A B=14 F D.

La comun medida de los arcos A B y C D es F D que, segun se ha visto, está contenida 14 veces en el primero y 5 en el segundo.

Cuando se encuentra una resta que está contenida un número cabal de veces en la anterior, la operacion queda concluida y los arcos serán *conmensurables;* pero si despues de llevar una resta sobre otra una ó más veces, se llega á obtener una, que por ser muy pequeña, ó no influye en el resultado práctico de la cuestion propuesta, ó no puede apreciarse por los sentidos, se desprecia, y la relacion hallada solo es aproximada. Cuando no hay números que expresen con exactitud la relacion de la longitud de los arcos, se dice que son *inconmensurables.*

II.—*Sobre una recta dada A B* [fig. 143] *como diámetro, trazar un círculo.*

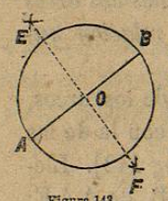

Figura 143.

Haciendo centro en los extremos de la recta, y con un rádio A E mayor que su mitad se describen arcos que se corten arriba y abajo de ella en los puntos E y F: la recta que pasa por estos puntos determina en O la mitad de A B [404]. Haciendo centro en O y con el rádio O B, se trazará el círculo pedido.

III.—*Dado el punto D* [fig. 144] *interior de un círculo, determinar la menor cuerda que por él pueda tirarse.*

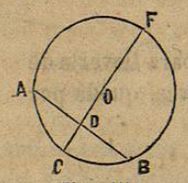

Figura 144.

Tirando por D el diámetro C F, y levantando en D una perpendicular al diámetro, se tendrá la cuerda pedida [474].

IV.—*Dividir un arco de círculo A B* (fig. 145) *en dos partes iguales.*

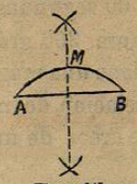

Figura 145.

Tírese la cuerda A B, y levantando por su medio una perpendicular, ésta determinará en M la mitad del arco dado (475).

Del mismo modo se dividirá A M en otras dos partes iguales, y así se concibe cómo puede dividirse un arco no solo en 2, sino tambien 4, 8, etc., partes iguales.

V.—*Dado el arco A B, determinar otro igual desde el punto D* (figura 146).

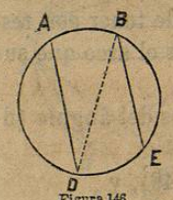

Figura 146.

Tomando la cuerda A B, se llevará de D á E, y el arco D E será el pedido.

Puede resolverse el problema tambien tirando la línea A D y por B una paralela que determinará el punto E del arco D E=A B (480).

ANGULOS EN EL CIRCULO.

483.—Ya hemos visto (378) que por ser proporcionales las magnitudes de los ángulos cuyos vértices están en el centro de un círculo, á las de los arcos que sus lados abrazan, se toman estos arcos como medida de los ángulos; pero para esto es necesario que el vértice esté en el centro del círculo. Vamos á ocuparnos ahora de determinar la relacion que existe entre la medida de un ángulo cuyo vértice está en cualquier punto de un círculo con la del ángulo del centro; repitiendo que la unidad de medida adoptada tanto para los arcos como para los

ángulos, es la trescientos sesentava parte de la circunferencia, llamada grado, el cual se subdivide en 60 minutos y el minuto en 60 segundos, y como una circunferencia grande ó pequeña tiene siempre 360 grados, resulta que esta unidad no es absoluta, es decir, no tiene una magnitud fija, sino relativa, y por esto sirve para estimar la relacion de inclinacion entre dos líneas, ó la de magnitud entre dos arcos de un mismo círculo ó de círculos iguales.

484.—*El ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco que sus lados abrazan.* A esta clase de ángulos se les llama inscritos.

Tres son las posiciones que el ángulo inscrito puede tener con respecto al ángulo en el centro, cuya medida natural es el arco que sus lados abrazan:

1° Puede quedar el centro sobre uno de los dos lados del ángulo (figura 147).

2° Puede quedar el centro dentro del ángulo (fig. 148), y

3° Puede quedar el centro fuera del ángulo [fig. 149].

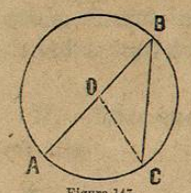

Figura 147.

Consideraremos 1° el ángulo A B C (fig. 147) en el que el centro O queda sobre el lado B A. Tirando el radio O C resultará el triángulo C O B isósceles, en el que el ángulo inscrito B es igual á C, y el ángulo externo del triángulo

$$A\,O\,C = B + C = 2\,B \quad (434)$$

de donde despejando:

$$B = \frac{A\,O\,C}{2}$$

pero teniendo A O C por medida A C, la del ángulo inscrito B será $\frac{AC}{2}$, que es lo que se tenia que demostrar.

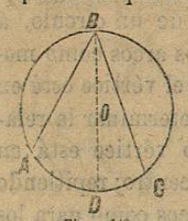

Figura 148.

En el 2° caso, cuando el centro está dentro del ángulo A B C [fig. 148], se tiene, tirando el diámetro B D, que

$$A\,B\,C = A\,B\,D + D\,B\,C$$

pero acabamos de ver que la medida de A B D es $\frac{AD}{2}$ y la de D B C es $\frac{DC}{2}$; luego la medida de A B C será $\frac{AD}{2} + \frac{DC}{2} = \frac{CA}{2}$

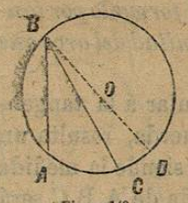

Figura 149.

3° Sea el caso en que el centro esté fuera del ángulo A B C [fig. 149]. Tirando el diámetro B D se tiene

$$A\,B\,C = A\,B\,D - C\,B\,D$$

pero conforme al primer caso, la medida de A B D es $\frac{AD}{2}$, y la de C B D es $\frac{CD}{2}$; luego la medida de A B C será $\frac{AD}{2} - \frac{CD}{2} = \frac{AC}{2}$

Así pues, en cualquier caso la medida del ángulo inscrito es la mitad del arco que sus lados abrazan.

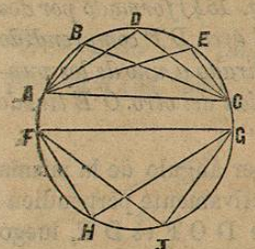

Figura 150.

485.—De aquí se infiere: 1° *que todos los ángulos,* como [fig. 150] *B, D y E, que tienen sus vértices sobre la circunferencia y que abrazan el mismo arco, serán iguales* por tener la misma medida; y 2°, *que todo ángulo inscrito,* como *H ó J, cuyos lados rematan en las extremidades de un diámetro, es recto,* supuesto que tiene por medida la mitad de una semicircunferencia.

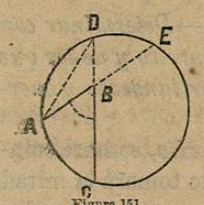

Figura 151.

486.—*El ángulo A B C* [fig. 151] *cuyo vértice está dentro de la circunferencia, pero no en el centro, tiene por medida la mitad de la suma de los arcos A C y D E, que comprenden sus lados prolongados.*

Al ángulo A B C se le llama *excéntrico.*

Tirando la cuerda A D se forma el triángulo A B D en el que [434] el ángulo externo

$$A\,B\,C = D + A$$

pero como la medida de D es $\frac{AC}{2}$ y la de A es $\frac{DE}{2}$, se tiene que la medida de A B C será $\frac{AC}{2} + \frac{DE}{2}$

487.—*El ángulo A B C* [fig. 152] *formado por dos secantes, tiene por medida la semidiferencia de los arcos A C y D E que sus lados abrazan.*

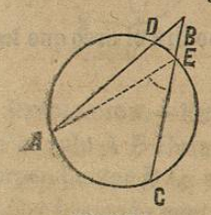

Figura 152.

Tirando la cuerda A E resulta el triángulo A E B en el que el ángulo externo [434]

$$A\,E\,C = B + A$$

despejando á $\quad B = A\,E\,C - A$

pero siendo [484] la medida de A E C, $\frac{AC}{2}$ y la de A, $\frac{DE}{2}$, resulta que la medida de B será $\frac{AC}{2} - \frac{DE}{2}$

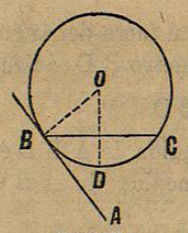

Figura 153.

488.—*El ángulo A B C (fig. 153) formado por tangente y cuerda tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtende.*

Tirando el radio O B, perpendicular á la tangente, y el O D perpendicular á la cuerda, resulta un ángulo B O D=A B C; [422] pero siendo la medida de B O D, B D=$\frac{BC}{2}$ [475], la medida de A B C será tambien $\frac{BC}{2}$

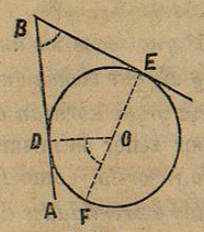

Figura 154.

489.—*El ángulo A B C (fig. 154) formado por dos tangentes, tiene por medida el arco D F comprendido entre uno de los radios D O, tirado á uno de los puntos de contacto, y la prolongacion del otro O E tirado al otro punto de contacto.*

El ángulo B=D O F por ser ángulo de la misma especie cuyos lados son respectivamente perpendiculares; [422] pero la medida de D O F es D F, luego la del ángulo B será tambien D F.

490.—Problemas de medidas de ángulos.—I.—*Determinar con el trasportador el valor del ángulo inscrito, del excéntrico y de los que están formados respectivamente por dos secantes, por tangente y cuerda, y por dos tangentes.*

Para saber el número de grados de un ángulo *inscrito,* se hará coincidir el centro del trasportador con el del círculo, y se tomará la mitad del número de grados que correspondan al arco interceptado por los lados del ángulo [484].

En un ángulo *excéntrico* se prolongarán sus lados, y determinando con el trasportador el valor de los dos arcos interceptados, se tomará la mitad de la suma [486].

En el ángulo *formado por dos secantes* se medirán con el trasportador los dos arcos interceptados y se tomará la mitad de su diferencia [487]

En el ángulo *formado por tangente y cuerda* se medirá el arco que la cuerda subtende y se tomará su mitad [488].

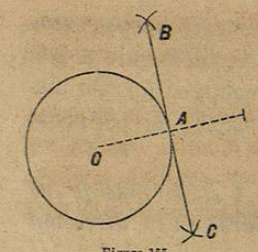

Figura 155.

En el ángulo *formado por dos tangentes,* se tirarán radios á los puntos de contacto, se prolongará uno de ellos, y el arco comprendido entre un radio y la prolongacion del otro, será el valor del ángulo de las dos tangentes [489].

II.—*Levantar una tangente á un círculo en un punto A dado en la circunferencia* (fig. 155).

Tírese el radio O A, y despues de prolongarlo levántese en A la perpendicular B C, la cual será la tangente pedida.

III.—*Tirar una tangente á un círculo desde un punto P tomado fuera de él* (fig. 156).

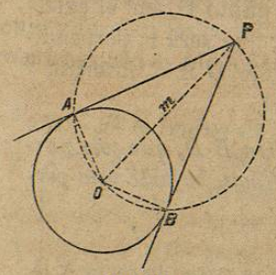

Figura 156.

Reúnase el punto P con el centro O del círculo: divídase por mitad la recta P O y haciendo centro en *m* con el radio P *m* trácese una circunferencia: reuniendo P con A y con B, se tendrán las tangentes pedidas.

La recta P A será tangente del círculo O porque tirando el radio A O, el ángulo P A O que tiene su vértice en la circunferencia del círculo *m* y que abraza el diámetro P O es recto (485 y 478). Otro tanto sucede con P B, por lo que se ve que este problema admite dos resoluciones.

IV.—*Describir sobre una recta dada A B* (fig. 157) *un arco de círculo capaz de un ángulo dado* a.

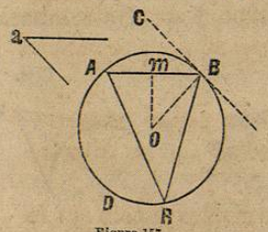

Figura 157.

Se entiende por arco de círculo capaz de un ángulo, aquel en que los ángulos inscritos cuyos lados rematan sobre la cuerda A B son iguales al ángulo dado a.

Resolucion.—En uno de los extremos de la recta A B, constrúyase un ángulo A B C=a; prolónguese C B, y en el punto B levántese la perpendicular B O: en el medio *m* de A B levántese la perpendicular *m* O y haciendo centro en O con el radio O B trácese una circunferencia, de la que el arco A D B será el pedido.