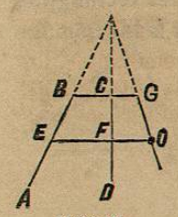


Figura 214.

Si el punto O es exterior (fig. 214), se tirará la recta O E; por B se hará pasar una paralela indefinida, y construyendo una cuarta proporcional á las rectas E F, F O y B C, que llevarémos de C á G, tendrémos resuelto el problema por la recta O G, que será la pedida [527].

VII.—*Construir una tercera proporcional* (fig. 215) *á dos líneas dadas* m *y* n.

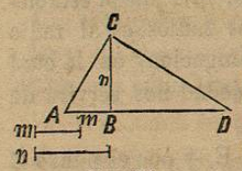


Figura 215.

Sobre A B=m levántese la perpendicular B C =n; tírese A C, y levantando por la extremidad C la perpendicular C D y prolongando A B, se tendrá que B D es la tercera proporcional pedida. En efecto, en el triángulo A C D se tiene [530—2°]

A B : B C :: B C : B D

sustituyendo

m : n :: n : B D

LINEAS PROPORCIONALES EN EL CIRCULO.

537.—*Dos cuerdas que pasan por un punto interior O* (fig. 216) *de un círculo, se cortan en partes recíprocamente proporcionales.*

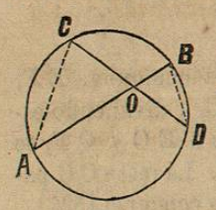


Figura 216.

Se dice que dos rectas se cortan en partes recíprocamente proporcionales, cuando las dos partes de una recta forman los extremos de una proporcion, y las otras dos partes los medios. Así en el presente caso se debe tener

A O : O D :: O C : O B

Tirando las cuerdas C A y B D resultan los triángulos A O C y

B O D, que serán semejantes en virtud de que el ángulo C=B por tener la misma medida, y A=D por igual razon. Siendo semejantes, los lados homólogos serán proporcionales, y comparando los lados opuestos á los ángulos iguales, se tiene:

A O : O D :: O C : O B

que es lo que se debia demostrar.

538.—*La ordenada C D* (fig. 217) *al diámetro en un punto cualquiera C, es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro.*

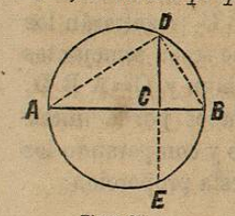


Figura 217.

Esto es, se tiene:

A C : C D :: C D : C B

Como se habrá comprendido, se llama *ordenada* la perpendicular C D levantada en un punto del diámetro y que termina en la circunferencia.

Prolongada esta ordenada, el teorema anterior conduce á la siguiente proporcion:

A C : C D :: C E : C B

pero como C D=C E (477)

resulta A C : C D :: C D : C B

539.—Si se tiran las cuerdas A D y B D, como el ángulo A D B es recto (485); resulta por el teorema anterior en el triángulo rectángulo que la perpendicular C D es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa. Ademas [530—3°] en el mismo triángulo se tiene:

A B : A D :: A D : A C

luego *toda cuerda tirada por el extremo del diámetro es media proporcional entre todo el diámetro, y su proyeccion sobre el mismo diámetro.*

540.—*Dos secantes A B y A C* (fig. 218) *tiradas desde un mismo punto, son recíprocamente proporcionales á sus partes externas A D y A E.*

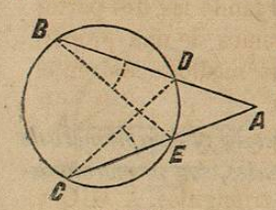


Figura 218.

Esto es, debiendo formar una secante y su parte externa los extremos de una proporcion, y la otra secante y su parte externa los medios, debe demostrarse que

A B : A C :: A E : A D

para esto tiremos las cuerdas B E y D C, y

resultarán formados los triángulos A B E y A C D, que serán semejantes [515] por tener el ángulo en A comun y B=C por tener la misma medida, $\frac{ED}{2}$; buscando y comparando los lados homólogos de estos triángulos, llegaremos á la proporcion

A B : A C :: A E : A D

541.—*Si desde un mismo punto A* (fig. 219) *se tiran una tangente y una secante á un círculo, la tangente A B será media proporcional entre toda la secante y su parte externa.*

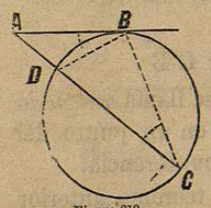


Figura 219.

Tirando las cuerdas B D y B C, resultarán los triángulos A B C y A B D, que serán semejantes [515] por tener el ángulo A comun y C=A B D, supuesto que están medidos ambos por la mitad del mismo arco B D. Buscando y comparando los lados homólogos, obtendrémos esta proporcion:

A C : A B :: A B : A D

que es lo que se tenia que demostrar.

542.—*Si en un punto B* (fig. 220) *de la circunferencia se tira una tangente igual al diámetro, y por el extremo A se traza una secante que pase por el centro del círculo, la secante quedará dividida en media y extrema razon.*

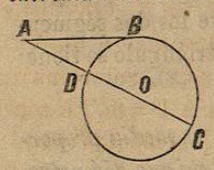


Figura 220.

Se dice que una recta A C queda dividida en media y extrema razon, cuando la parte mayor D C es media proporcional entre toda la recta A C y su parte menor A D.

Conforme á la hipótesis del teorema, tenemos A B igual á D C, y segun el teorema anterior

A C : A B :: A B : A D

sustituyendo

A C : C D :: C D : A D

que es lo que se debia demostrar.

543.—*Los perímetros de dos polígonos regulares del mismo número de lados, inscritos ó circunscritos en círculos diferentes, son proporcionales á los radios de los círculos.*

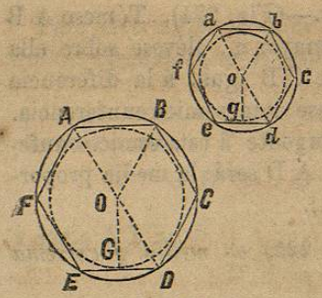


Figura 221.

(Fig. 221). Sean A B C D..... y a b c d.... los polígonos que considerarémos primero inscritos en los círculos.

Por ser polígonos semejantes (519) tendrémos (523):

A B C D.... : a b c d.... :: A B : ab

Tirando los radios A O y O B, o a y o b resultarán los triángulos O A B y o a b que serán semejantes por ser equiángulos, luego

A B : a b :: O A : o a

suprimiendo la razon comun de estas dos proporciones, se tiene:

A B C D.... : a b c d.... :: O A : o a

Considerémos ahora los polígonos circunscritos. Tracemos los rádios rectos y oblícuos O G y O D, o g y o d, y resultarán los triángulos O G D y o g d, que serán semejantes por equiángulos, por lo que

O G : o g :: O D : o d

Antes teniamos

A B C D.... : a b c d.... :: O D : o d

luego A B C D.... : a b c d.... :: O G : o g

544.—Problemas de líneas proporcionales en el círculo.—

I. *Construir una média proporcional entre dos líneas dadas:* m, n.

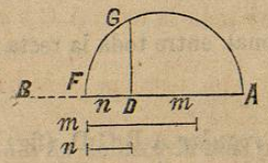
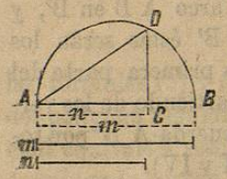


Figura 222.

1ª *Construccion.*—(Fig. 222). Sobre una recta indefinida A B se toman A D=m, y á continuacion D F=n; sobre A F como diámetro se traza una semicircunferencia y se levanta en D la perpendicular D G, la cual será la média porporcional entre A D y D F (538), que hemos tomado respectivamente iguales á m y n.



223.

2ª *Construccion.*—(Fig. 223). Tómese A B igual á la recta mayor m, sobre esta recta como diámetro trácese una semicircunferencia, llévese sobre el diámetro A B la parte A C=n, levántese en el punto C la perpendicular C D, y tirando la cuerda A D, ésta será la média proporcional pedida (539).

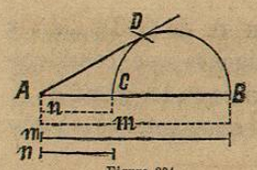


Figura 224.

3ª *Construccion.*—(Fig. 224). Tómese A B igual á la recta mayor m, llévese sobre ella A C = n, y sobre C B igual á la diferencia entre m y n trácese una semicircunferencia. Si tiramos A D tangente á esta semicircunferencia, esta recta A D será la media proporcional pedida (541).

II.—*Dividir una línea dada* A B (fig. 225) *en média y extrema razon.*

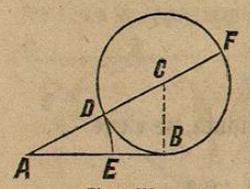


Figura 225.

Construccion.—Por el extremo B de la recta se levantará una perpendicular C B$=\frac{AB}{2}$; haciendo centro en C y con el rádio B C trácese una circunferencia de círculo; tírese la secante A F que pase por el centro del círculo, y si desde A como centro con el rádio A D se describe el arco D E, la recta A B quedará dividida en E en média y extrema razon.

Demostracion.—Habiendo tomado el rádio C B$=\frac{AB}{2}$, la tangente A B será igual al diámetro, y además es média proporcional entre A F y A D (541), por lo cual tendrémos

	A F : A B :: A B : A D
sustituyendo	A F : D F :: A B : A E
Dividiendo	A F–D F : D F :: A B–A E : A E
sustituyendo	A E : A B :: E B : A E
invirtiendo	A B : A E :: A E : E B

luego la parte mayor A E será média proporcional entre toda la recta y su parte menor.

III.—*Estando inscrito al círculo un polígono regular* A B C D, (fig. 226) *inscribir en el mismo círculo otro polígono de un número doble de lados, y encontrar el valor de uno de los lados del segundo polígono.*

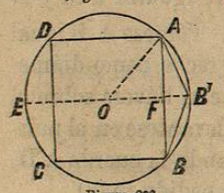


Figura 226.

Dividamos por la mitad el arco A B en B', y tiremos las cuerdas A B' y B B' éstas serán los lados del polígono pedido. La primera parte del problema quedará resuelta, si partiendo de los vértices del polígono llevamos la cuerda A B' por toda la circunferencia. (501—III y IV).

Para determinar el valor del lado A B' en funcion de A B y del rádio del círculo, se tiene (539):

$$AB'^2 = B'E \times B'F \ldots. \quad (1)$$

por otra parte

$$B'F = B'O - OF = B'O - \sqrt{AO^2 - AF^2} \quad (532)$$

y como A F $=\frac{AB}{2}$

$$B'F = B'O - \sqrt{AO^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

sustituyendo este valor en la ecuacion (1), se tiene:

$$AB'^2 = B'E\left(B'O - \sqrt{AO^2 - \frac{AB^2}{4}}\right)$$

si hacemos A B = a, A O = r, y A B' = x, sustituyendo se obtiene:

$$x^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right) = 2r^2 - 2r\sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}}$$

y extrayendo raíz

$$x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}\ldots.} \quad (2)$$

cuya fórmula nos dará el valor de x.

En el caso de que el rádio sea igual á la unidad, la fórmula (2) se convertirá en

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}},$$

ó á fin de hacerla más propia para ser calculable por logaritmos (251—III).

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{(2+a)(2-a)\ldots.}} \quad (3)$$

las fórmulas (2) y (3) nos servirán para determinar el valor del lado del polígono regular de un número doble de lados de otro conocido, lo cual equivale á resolver este problema: *dada la cuerda* a *de un arco, determinar la cuerda* x *del arco de su mitad.*

IV.—*Dado el perímetro de un polígono regular inscrito de cierto número de lados, determinar la longitud del perímetro del polígono semejante circunscrito.*

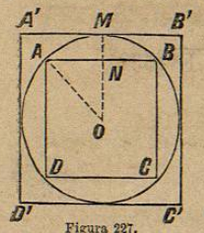


Figura 227.

Conocida la longitud del perímetro A B C D (fig. 227), y el número de lados, podrá fácilmente obtenerse el valor de un lado. Como además se conoce el rádio del círculo en que están inscritos y circunscritos los polígonos, el problema tiene por objeto determinar el perímetro A' B' C' D' en funcion del rádio, del perímetro y del lado del polígono inscrito.

Siendo los polígonos semejantes, si llamamos p el perímetro del polígono inscrito, P el del circunscrito, r el rádio O M = O A del círculo y a el lado A B, tendrémos: (523).

$$P : p :: OM : ON$$

de donde $$P = \frac{r\,p}{ON}$$

en el triángulo rectángulo O N A se tiene: (532)

$$ON = \sqrt{OA^2 - AN^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

sustituyendo en la ecuacion anterior resulta

$$P = \frac{r\,p}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{r\,p}{\sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}}} = \frac{2\,r\,p}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

esto es (251—III) $$P = \frac{2\,r\,p}{\sqrt{(2r+a)\,(2r-a)}} \ldots\ldots [1]$$

si se tiene el rádio igual á la unidad esta fórmula se convierte en

$$P = \frac{2\,p}{\sqrt{(2+a)\,(2-a)}} \ldots\ldots [2]$$

Las fórmulas [1] y [2] en sus respectivos casos nos servirán para resolver el problema propuesto, sustituyendo por a y por p sus valores que son conocidos.

RAZON DEL DIAMETRO A LA CIRCUNFERENCIA.

545.—*El círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, infinitamente pequeños.*

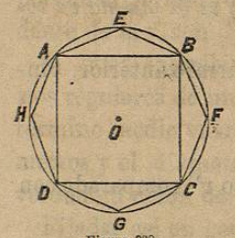


Figura 228.

Si consideramos el cuadrado A B C D inscrito en el círculo [fig. 228], tendrémos que por ser la línea recta la menor distancia entre dos puntos, cada uno de los lados del polígono será menor que el arco respectivo que subtende; luego la suma de los cuatro lados ó el perímetro A B C D será menor que la circunferencia.

Si dividimos en dos partes iguales cada uno de los arcos A B, B C, etc.; y tiramos las cuerdas correspondientes, resultará un octágono A E B F C..... regular inscrito, y tendrémos primero, que siendo A B < A E + E B [425], B C < B F + F C, C D < C G + G D etc.; si sumamos ordenadamente estas desigualdades resulta que *el perímetro del cuadrado es menor que el del octágono:* segundo, que siendo cada una de las cuerdas ó lados del octágono menor que el arco que subtenden, la suma de todas las cuerdas ó el *perímetro del octágono es menor que la circunferencia del círculo.*

Si nos imaginamos divididos los arcos A E, E B, etc., en dos partes iguales y tiradas cuerdas por los puntos de division, resultaria un polígono regular de 16 lados inscrito al círculo, y por un raciocinio idéntico al anterior inferiríamos: que el *perímetro del polígono de 16 lados es mayor que el de 8, pero menor que la circunferencia del círculo.*

Luego cuando el número de lados del polígono regular inscrito haya aumentado considerablemente, su perímetro se habrá aproximado tambien considerablemente á la circunferencia, por lo que se considera como el límite hácia el cual se van aproximando más y más los perímetros de los poligonos regulares inscritos, hasta llegar á ser iguales el polígono y el círculo cuando el número de lados es infinito y la magnitud de cada lado infinitamente pequeña.