$C = 2 \pi r$ 

se tiene

 $C=2\times3:141593\times25=157:07965$ 

II.—Siendo la circunferencia de un círculo de 339:292044 determinar la longitud del diámetro.

En la fórmula despejaremos á

$$C = \pi d$$

$$d = \frac{C}{\pi}$$

sustituyendo

$$d = \frac{339^{\circ}292044}{3^{\circ}141593} = 108 \text{ metros.}$$

III.—Determinar la longitud de un arco de 48° en un círculo cuyo rádio es de 10 metros.

La circunferencia de este círculo conforme á la fórmula

$$C = 2 \pi r$$

es  $C = 2 \times 3'141593 \times 10 = 62'83186$  una simple proporcion nos dará la longitud del arco de  $48^{\circ}$ 

$$360^{\circ}:48^{\circ}::62^{\circ}83186:x={\stackrel{\text{m}}{8}}'37758$$

IV.—Se quiere saber cuál será el número de grados de un arco de círculo, cuya longitud es de 52 metros y cuyo rádio es igual á 15.

La circunferencia de este círculo será:

$$C = 2 \pi r$$

sustituyendo

$$C = 2 \times 3'141593 \times 15 = 124'247790$$

una proporcion nos dará el número de grados del arco

$$124^{\circ}247790 : 52^{\circ} :: 360^{\circ} : x = 150^{\circ} - 40^{\circ}$$

con poca diferencia.

V.—Determinar la magnitud de un arco de 60° en partes del rádio. En este caso se supone el rádio =1. La circunferencia será

$$C = 2 \pi r$$

sustituyendo

$$C = 2 \times 3^{\circ}141593 \times 1 = {}^{m}6^{\circ}283186$$

estableciendo la proporcion:

Esto es, siendo 1 el rádio, la longitud del arco de 60° será 1'047198 millonésimas.

# SEGUNDA PARTE.

## SUPERFICIES.

#### Preliminares

551.—Superficie es la extension en longitud y latitud prescindiendo del espesor ó grueso.

La superficie de una figura es la extension comprendida entre las líneas que la limitan. Del mismo modo que la medida de una línea se obtiene refiriendo su longitud al número de veces que contiene otra línea escogida por unidad, para valuar una superficie es necesario determinar cuántas veces contiene la unidad de superficie. Al tratar del sistema de pesos y medidas (182 y 185) hemos visto que la

unidad superficial es un cuadrado, y si representando esta unidad por a b c d (fig. 230) quisiéramos estimar la área ó fuperficie del rectángulo A B C D, bastaria averiguar cuántas veces el cuadrado está contenido en el rectángulo. En la figura que hemos tomado por ejemplo, diriamos que la área del rectángulo es de 12 medios centímetros cuadrados, porque 12 veces cabe la unidad superficial escogida, que es el medio centímetro cuadrado, en dicho rectángulo.

Se llaman figuras equivalentes las que tienen superficies iguales, y como se ha visto, figuras iguales son aquellas que sobreponiéndolas

coinciden en todos sus puntos. Los rectángulos A B C D y E F G H son equivalentes porque tienen la misma superficie; pero, como se ve, no son iguales.

552.—Para determinar las áreas es de un uso frecuente escoger en los triángulos, y en los paralelógramos uno de sus lados como base de la figura, y se llama altura la perpendicular bajada sobre este lado del vértice ó del lado opuesto.

A D B E F H J LK

Así (fig. 231) tomando A B por base la altura del triángulo es C D. En el triángulo E F G, considerando E F como base, la altura es G H, la cual, como se ve, cae sobre la prolongacion

de la base. Por último, en el paralelógramo J O, la base es J K y la altura M L, la cual puede bajarse desde cualquier punto del lado opuesto á la base.

553.—Un paralelógramo  $A \ B \ C \ D$  [fig. 232] y un rectángulo  $A \ B \ E \ F$  que tienen la misma base  $A \ B$  é igual altura, son equivalentes.



Siendo la altura del paralelógramo igual á la perpendicular E B, si prolongamos F E pasará por D C, y ejecutándolo resultarán dos triángulos A F D y B E C que serán iguales, [385] por tener el ángulo F A D = E B C, por estar formados por

lados paralelos, y tener sus vértices en la misma direccion y F A—E B y A D—B C por lados opuestos de paralelógramo. Una vez demostrado

que el triángulo

AFD=BEC

si sucesivamente restamos del trapecio A B C F cada uno de estos triángulos tendremos:

ABCF-AFD-ABCE-BEC

luego ABCD—ABEF en superficie, que es lo que se queria demostrar.

554.—Dos paralelógramos de igual base é igual altura son equivalentes, por ser cada uno de ellos equivalente á un rectángulo de la misma base y altura.

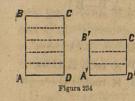
555.—Un triángulo cualquiera A B C [fig. 233] es equivalente á la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura.

Considerando A C como la base del triángulo, por el vértice B del ángulo opuesto tírese una paralela B D á A C, y por C una paralela C D á A B, resultará el paralelógramo A B D C de la misma base y altura que el triángulo; pero como los triángulos A B C y B C D son iguales (386), por tener B C comun, B D=A C y A B=C D por lados opuestos de paralelógramo, se infiere que el triángulo A B C será la mitad del paralelógramo que tiene la misma báse y altura que él.

556.—Dos triángulos que tienen sus bases y alturas respectivamente iguales, son equivalentes; porque cada uno de los triángulos es la mitad de paralelógramos equivalentes entre sí.

557.—Dos rectángulos de la misma base son proporcionales á sus alturas.

Puede suceder que las alturas sean conmensurables ó inconmensurables entre sí.



1º Si (fig. 234) se tienen los rectángulos A B C D y A' B' C' D' de bases iguales, A D = A' D' y cuyas alturas A B y A' B' sean conmensurables, de modo que, por ejemplo, dividiendo A' B' en tres partes iguales, cada una de éstas puede llevarse sobre A B cinco veces, en este supuesto resultará

A' B' : A B :: 3 : 5

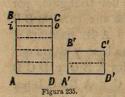
Si por los puntos de division tiramos paralelas respectivamente á las bases A' D' y á A D quedará dividido el rectángulo A' C' en tres rectángulos, y el rectángulo A C en cinco rectángulos iguales todos entre sí por tener la misma base y altura, luego

rectángulo A' C': rectángulo A C:: 3:5

suprimiendo la razon comun de estas dos proporciones, se tiene por último:

rectángulo A' C': rectángulo A C :: A' B': A B

que es lo que se tenia que demostrar.



2º Si las alturas A B y A' B' son inconmensurables (fig. 235) el teorema será igualmente cierto. Supongamos que despues de haber dividido A' B' en dos partes iguales, al llevar la magnitud de estas partes sobre A B resulte esta altura dividida en cuatro partes de A á i, que-

dando una resta i B, la que forzosamente será menor que una de las divisiones. Tirando por los puntos de division paralelas, quedarán divididos el rectángulo A' C' en dos rectángulos, y el rectángulo A C en cuatro rectángulos iguales entre sí, mas otro i C menor que los demas.

Considerando las porciones conmensurables, tendrémos conforme á lo que acabamos de demostrar:

rectángulo A' C': rectángulo A o :: A' B': A i

Como rect. A o=rect. A C—rect. i C, y A i=A B—B i sustituyendo se tiene:

rect. A' C': rect. A C-rect i C :: A' B': A B-B i

multiplicando entre sí los medios y los extremos

A B  $\times$  rect. A' C' — B i  $\times$  rect. A' C' = A' B'  $\times$  rect. A C — A' B'  $\times$  rect. i C

trasladando:

A B 
$$\times$$
 rect. A' C' — A' B'  $\times$  rect. A C = B i  $\times$  rect. A' C' — A' B'  $\times$  rect. i C

Una vez establecida esta ecuacion, vamos á demostrar que A B × rectángulo A' C' no puede ser desigual á A' B' × rectángulo A C. Si lo fueran, habria entre estos dos productos, cuyos factores todos son constantes, una diferencia d fija é independiente de la magnitud arbitraria de las partes en que se divida A' B' y se tendria:

A B  $\times$  rect. A' C' — A' B'  $\times$  rect. A C = d.

y por lo mismo B i  $\times$  rect. A' C' — A' B'  $\times$  rect. i C = d.

Si en vez de dividir A' B' en dos partes iguales, la dividiéramos en 20 6 en 2,000, y llevando la magnitud de estas partes sobre A B, por los puntos de division tiráramos paralelas, resultaria que la recta B i y el rectángulo i C podrian hacerse sucesivamente más y más pequeños,

y los productos de que son factores podrian ir disminuyendo tanto como se quisiera. Así es, que siendo d constante por expresar la diferencia entre cantidades fijas: A B × rect. A' C' y A' B' × rect. A C, llegaria á tenerse, aumentando el número de divisiones de A' B', en la ecuacion:

B i  $\times$  rect. A' C' — A' B'  $\times$  rect. i C = d

pudiendo ser B i <  $\frac{A'}{2}$ , B i <  $\frac{A'}{2,000}$  ó una fraccion tan pequeña co-

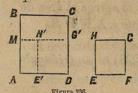
mo se quiera, llegaria á tenerse B i  $\times$  rect. A' C' < d; pero como no puede ser el minuendo menor que la resta, tampoco podrémos suponer desiguales los productos A B  $\times$  rect. A' C' y A' B'  $\times$  rect. A C, y siendo iguales se tendrá la proporcion

rect. A' C': rect. A C :: A' B': A B

que es lo que se debia demostrar.

558.—Como en un rectángulo puede tomarse la altura como base y ésta por altura, se infiere que las áreas de los rectángulos que tienen sus alturas iguales, son proporcionales á sus bases.

559.—Dos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos respectivos de sus bases por sus alturas.



Sean A B C D y E F G H (fig. 236) dos rectángulos cualesquiera. Si suponemos sobrepuesto el rectángulo E G de manera que coincida el ángulo recto F con el D, tomará la posicion E' D G' H'. Si prolongamos el lado G' H' hasta M, se formará el paralelógramo A D G' M de la

misma base que A C y de igual altura que D H'. Como el rectángulo D M y el A C tienen la misma base A D, serán proporcionales á sus alturas, y por tanto

rect. A C: rect. D M :: A B ; D G'....[m]

Los rectángulos D M y D H' tienen la misma altura D G', luego serán proporcionales á sus bases, como lo expresa la siguiente proporcion:

rect. D M : rect. D H' :: A D : D E'...,[n]

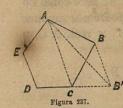
multiplicando ordenadamente las proporciones [m] y [n], y suprimiendo los factores comunes, resulta:

rect. A C: rect. D H':: A D × A B: D E' × D G'

rect. AC; rect. FH :: AD × AB : FE × FG

que es lo que se tenia que demostrar.

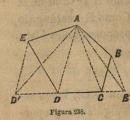
560.—Problemas de figuras equivalentes.—I.—Trasformar el polígono A B C D E (fig. 237) en otro equivalente que tenga un lado ménos.



Construccion.—Tírese la diagonal A C: por el vértice B del triángulo A B C que tiene esta diagonal por base, tírese B B' paralela á A C; si despues prolongamos el lado D C hasta su interseccion en B', con la paralela B B' y trazamos la recta A B', se tendrá el polígono A B' D E de un lado menos y equivalente á A B C D E.

Demostracion.—Tomando A C como base de los triángulos A C B y A C B', por estar los vértices opuestos B y B' sobre la misma paralela, tendrán sus alturas iguales; luego (556) los triángulos A C B y A C B' serán equivalentes. Si á cada uno de ellos se agrega el área de la figura A C D E, resultará A B C D E equivalente á A B' D E.

II.—Trasformar un polígono  $A \ B \ C \ D \ E$  (fig. 238) en un triángulo equivalente.

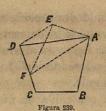


Ejecutando la construccion del problema anterior, trasformarémos el pentágono A B C D E en el cuadrilátero equivalente A B' D E. En seguida, tirando la diagonal A D, la paralela E D' y la recta A D', trasformarémos el cuadrilátero A B' D E en el triángulo A B' D', el cual resolverá el proble-

ma, supuesto que es equivalente al cuadrilátero y éste al pentágono. Del mismo modo podrá reducirse á triángulo un polígono de mayor número de lados.

III.—Trasformar un polígon ABCD (fig. 239) en otro equivalente que tenga un lado más.



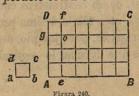


Construccion.—Desde el vértice A tírese una recta indefinida A E que quede fuera del polígono y otra A F que toque el lado opuesto D C en un punto cualquiera F: por el vértice D del triángulo A F D tírese D E paralela á A F, y reuniendo los puntos E y F se tendrá el polígono A B C F E pedido.

Demostracion.—Los triángulos A F D y A F E tienen la misma base A F, y estando los vértices opuestos D y E sobre una paralela, tendrán alturas iguales, y por lo mismo serán equivalentes (556). Si á cada uno de los triángulos equivalentes A F D y A F E se agrega la parte comun A F C B resultará el polígono A B C D equivalente á A B C F E que tiene un lado más.

#### VALUACION DE LAS SUPERFICIES.

561.—Hemos dicho que para medir ó valuar la área de una figura, es necesario determinar el número de veces que contiene la área de otra figura escogida como término de comparacion, y que la unidad de superficie es un cuadrado cuyo lado es la unidad lineal.



Así, por ejemplo, si queremos medir la área del rectángulo A B C D (fig. 240), la compararémos á la del cuadrado a b c d, tomado como unidad, y determinarémos cuántas veces la unidad lineal a b, lado del cuadrado, está contenida en la base A B del rectángulo (6

veces en el caso que consideramos). Si por los puntos de division tiramos rectas perpendiculares á la base, resultarán 6 bandas ó rectángulos cuya base es la unidad y cuya altura es la del rectángulo A B C D. En seguida llevarémos la unidad lineal a d, lado del cuadrado, cuantas veces se pueda sobre la altura A D del rectángulo (4 en nuestro ejemplo), y tirando por los puntos de division paralelas á la base, resultará el rectángulo A B C D dividido en 6 bandas, cada una de las

cuales contiene 4 cuadrados, ó en junto  $6\times4=24$  unidades superficiales. Se vé, pues, que para valuar la área del rectángulo, se ha determinado el número de unidades lineales de que constan su base y su altura, y el producto de estos dos números expresa cuántas veces la unidad superficial a b c d está contenida en el repetido rectángulo.

Como puede suceder que la unidad lineal no esté contenida un número cabal de veces en la base y altura del rectángulo, valuarémos su área, fundándonos (559) en que dos rectángulos cualesquiera, son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas. Así, en la misma figura 240, se tiene:

## ABCD: abcd:: AB X AD: ab X ad

y como a b c d es la unidad superficial, y sus dos lados son iguales entre sí é iguales á la unidad, sustituyendo resulta:

#### ABCD:1:: AB × AD:1×1

luego despejando, resulta la área de

### $ABCD = AB \times AD$

por lo que en general se dice que la área de un rectánguto es igual al producto de su base por su altura; pero es preciso tener presente que en este modo abreviado, y tal vez impropio de expresar la superficie de un rectángulo, los lados A B y A D son los números que indican las veces que cada lado contiene á la unidad lineal, y que la área A B C D debe estar expresada en unidades superficiales, como centímetros cuadrados, metros cuadrados, pulgadas cuadradas, etc. En la última proporcion los términos de la primera razon expresarán, por ejemplo, metros cuadrados, y los factores de los términos que forman la segunda razon, indicarán metros lineales.

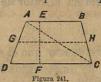
562.—En el caso de que los dos lados del rectángulo sean iguales, la figura será un cuadrado y su área estará medida por la 2ª potencia ó el cuadrado de uno de sus lados. De esto proviene que se llame cuadrado á la segunda potencia de un número.

563.—La área de un paratelógramo es igual al producto de su base por su altura, supuesto que (553) el paralelógramo es equivalente á un rectángulo de su misma base y altura.

564.—La área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura, en razon de que (555) es equivalente á la mitad de un paralelógramo de igual base y altura.

565.—La área de un trapecio es igual al producto de la semisuma de

las bases paralelas por la altura.



Sea el trapecio A B C D (fig. 241). Tirando la diagonal A C, quedará descompuesto en dos triángulos A B C y A D C, que tendrán la misma altura E F, y si tomamos por bases respectivamente los lados paralelos del trapecio, se tiene:

área del triángulo área del triángulo

A B C=
$$\frac{1}{2}$$
 A B×E F  
A D C= $\frac{1}{2}$  D C×E F

sumando, el trapecio A B C D= $\frac{A B + D C}{2} \times E F$ 

que es lo que se tenia que demostrar.

Como 
$$\frac{A B + D C}{2}$$
 = G H (459) recta tirada á distancias iguales de

las bases, puede decirse que la área de un trapecio es igual al producto de su altura por la recta que une los medios de los lados no paralelos.

566.—La área de un polígono regular es igual á la mitad del produc-

to de su perímetro por el rádio recto.



Sea el polígono A B C D E F (fig. 242); si desde el centro O se tiran los rádios oblícuos O A, O B, O C.... resultarán tantos triángulos iguales como lados tenga el polígono regular.

La área de uno de estos triángulos

$$A O B = \frac{1}{2} A B \times H \hat{O}$$

luego si multiplicamos los dos miembros de esta ecuacion por 6, número de los lados del polígono, se tendrá:

área del polígono, A B C D.... = 
$$\frac{1}{2} \times 6$$
 A B  $\times$  H O

pero 6 veces un lado A B es el perímetro, y H O es el rádio recto, si llamamos A la área del polígono, p su perímetro y r el rádio recto, en general se tendrá:

$$A = \frac{1}{2} p r$$