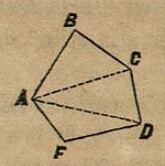

Figura 243.

567.—*La área de un polígono irregular* A B C D E (fig. 243) *es igual á la suma de las áreas de los triángulos que lo forman.* Comunmente se descompone en triángulos el polígono tirando diagonales desde uno de los vértices, y en seguida se determina el valor de la base y altura de cada uno de ellos.

568.—Expresiones del área del círculo.—Supuesto que el círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados extremadamente pequeños, *la área del círculo será igual á la mitad del producto de su circunferencia por el radio.* Así es que, si representamos por s la superficie de un círculo, por c su circunferencia y por r el rádio, se tiene:

$$s = \tfrac{1}{2}\, c \times r \ldots . \; [1]$$

sustituyendo por c su valor [549] en funcion de π

$$c = 2\,\pi\, r$$

resulta $$s = \pi\, r^2 \ldots . \; [2]$$

de cuya fórmula se hace un uso muy frecuente.

Si llamamos d el diámetro del círculo y sustituimos por r su valor: $\frac{d}{2}$ en la ecuacion [2] se tiene:

$$s = \pi \frac{d^2}{4} \ldots . \; [3]$$

de cuya fórmula nos podrémos servir cuando se conozca el diámetro de un círculo, para determinar su área. Ya hemos visto que el valor numérico de π es de 3'141593 aproximadamente.

569.—Se llama *corona* la porcion de superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.

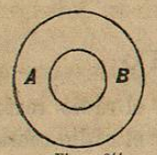

Figura 244.

La área de la corona A B [fig. 244] es igual á la del círculo mayor, ménos la del círculo menor. Si llamamos S la área del primero y R su rádio, s la área del círculo menor y r su rádio, tendremos [568]:

$$S = \pi\, R^2$$

$$s = \pi\, r^2$$

luego la corona $= \pi\,[R^2 - r^2] = \pi\,[R + r]\,[R - r]$

de esta expresion resulta que *la área de una corona es igual al producto de la razon de la circunferencia al diámetro por la suma y por la diferencia de los rádios de los círculos que la forman.*

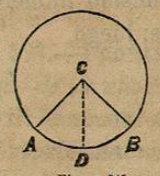

Figura 245.

570.—Se llama sector circular la porcion A D B C de un círculo comprendida entre dos rádios y el arco. Si el arco A B [fig. 245] se divide en dos partes iguales, A D y D B, y tiramos el rádio C D, resultarán dos sectores A D C y D B C iguales entre sí, porque si dobláramos la figura por C D, los arcos A D y D B coincidirian por ser iguales, C B se sobrepondria á C A por ser iguales tanto los ángulos B C D y D C A, como los rádios C B y C A. Si en vez de dividir el arco A B en dos partes iguales, lo dividiéramos en tres, cuatro, etc., partes iguales, resultarian tres, cuatro, etc., sectores iguales entre sí, por serlo las partes de que constan; luego *los sectores de un mismo círculo son proporcionales á los arcos.*

Por tanto, si comparamos la área del sector C A D B con la de todo el círculo, tendrémos:

sector C A D B : área del círculo :: arco A B : circunferencia del círculo:

sustituyendo: sector C A D B : $\pi\, r^2$ :: arco A B : $2\,\pi\, r$

de donde $$\text{sector C A D B} = \frac{\text{arco A B} \times \pi\, r^2}{2\,\pi\, r}$$

y reduciendo $$\text{sector C A D B} = \frac{\text{arco A B} \times r}{2}$$

luego *la área del sector circular es igual á la mitad del producto del arco rectificado por el rádio.*

571.—*La área de un trapecio circular* A B D E [fig. 246] *es igual á la semisuma de los arcos* A B *y* D E, *por la diferencia* A E *de los rádios.*

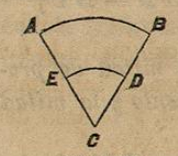

Figura 246.

Se llama trapecio circular la figura formada por dos arcos A B y D E de círculos concéntricos, y las porciones A E y B D de los rádios.

La área del trapecio circular, como puede verse en la figura, es igual á la del sector A B C ménos la del sector E D C.

Si hacemos el arco A B = A, el E D = a, A C = R y E C = r, tendrémos [570]:

$$\text{trapecio A B D E} = \frac{A.\,R}{2} - \frac{a\,r}{2} = \frac{A\,R - a\,r}{2} \ldots . \; [1]$$

por otra parte, como el ángulo A C B está medido en los dos círculos respectivamente por los arcos A B y E D, tendrán el mismo número de grados, y por tanto serán proporcionales á sus rádios; luego

$$A : a :: R : r$$

de donde $\quad a\,R = A\,r \ldots . \; [2]$

Así es que la ecuacion [1] no se alterará si al numerador del 2º miembro le agregamos a R y le quitamos A r. Así pues,

$$\text{trapecio A B D E} = \frac{A\,R - a\,r + a\,R - A\,r}{2}$$

$$= \frac{A\,[R - r] + a\,[R - r]}{2} = \frac{[A + a]\,[R - r]}{2}$$

$$\text{luego, trapecio A B D E} = \frac{A + a}{2}\,[R - r]$$

que es lo que expresa el teorema.

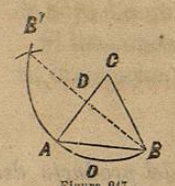

Figura 247.

572.—*La área del segmento* A O B A [fig. 247] *es igual á la área del sector* A O B C *ménos la del triángulo* A B C.

Si consideramos A C como la base del triángulo A B C, y bajamos la perpendicular B D á este lado, B D será la altura del triángulo, y esta recta B D, será la mitad de B B' cuerda del arco doble de A O B.

La área del sector $\quad A\,O\,B\,C = \frac{1}{2}\,A\,C \times A\,O\,B$

la del triángulo $\quad A\,B\,C = \frac{1}{2}\,A\,C \times B\,D$

restando: área del segmento $\quad A\,O\,B\,A = \frac{1}{2}\,A\,C\,[A\,O\,B - B\,D]$

por esto se dice que *al área del segmento es igual á la mitad del producto del rádio por la diferencia entre el arco del segmento y la mitad de la cuerda del arco doble.*

Conociendo A B, se determina la cuerda B B' del arco doble despejando á a en la fórmula $x = \sqrt{2\,r^2 - r\,\sqrt{4\,r^2 - a^2}}$ del problema III

del núm. 544, en la que x representa á A B, y B B' está representada por a.

Así pues $\quad B\,B' = a = \sqrt{4\,r^2 - \left(\frac{2\,r^2 - x^2}{r}\right)^2}$

573.—Problemas de valuacion de áreas.—I.—*Determinar el lado de un cuadrado equivalente á un triángulo conocido.*

Si llamamos a la altura y b la base del triángulo, su área será $\frac{a\,b}{2}$, y si representamos por x el lado del cuadrado buscado, su área será x^2; pero como debe ser

$$x^2 = \frac{a\,b}{2}$$

el valor de x puede determinarse sustituyendo los valores de a y de b en esta ecuacion, ó bien buscando gráficamente (544 — I) una média proporcional entre las líneas que representen la altura y la mitad de la base del triángulo, supuesto que de la ecuacion resulta:

$$a : x :: x : \tfrac{b}{2}$$

II.—*Determinar un triángulo equivalente á un polígono regular dado.*

Como la área del polígono es igual á la mitad del producto de su perímetro por el rádio recto, y la del triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura, bastará construir un triángulo que tenga por base el perímetro del polígono, y por altura el rádio recto, para resolver el problema.

III.—*Determinar un cuadrado equivalente á un círculo.*

Dado un círculo, conocerémos su rádio, y para resolver el problema hay que buscar la magnitud del lado del cuadrado. La área del círculo es igual á la mitad del producto de su circunferencia por el rádio, y como la del cuadrado es igual á la 2ª potencia de su lado, para determinar su magnitud bastará encontrar una média proporcional entre la mitad de la circunferencia y el rádio, bien sea calculándola ó construyéndola gráficamente, supuesto que si llamamos c la circunferencia del círculo, r su rádio y x el lado del cuadrado, debe tenerse:

$$\frac{c \times r}{2} = x^2$$

de donde $\quad \frac{c}{2} : x :: x : r$

Podemos resolver este problema de otro modo.

La área del círculo es: $S = \pi r^2$

La del cuadrado es $S = x^2$

supuesto que deben ser equivalentes, se tiene: $\pi r^2 = x^2$

Despejando á x resulta: $x = \sqrt{\pi r^2}$

Como la razon de la circunferencia al diámetro no ha podido expresarse exactamente por ningun valor numérico, tampoco se puede determinar con entera precision, ni la circunferencia ni la superficie del círculo; así es que solo puede resolverse aproximadamente este problema, que se llama de la cuadratura del círculo.

IV. *Determinar la área de un triángulo cuya base es de* 2025'56 *métros, y cuya altura es de* 108'25 *metros.*

La área del triángulo es igual á la mitad del producto de la base por la altura, así es que en el caso que consideramos, se tiene:

$$\text{Area} = \frac{b \times a}{2} = \frac{\overset{\text{m.}}{2025'56} \times 108'25}{2} = \overset{\text{m. cd.}}{109633'4350}$$

Así, pues, la área del triángulo es de 109633 metros cuadrados, y 4350 diezmilésimos de metro cuadrado.

Como en este caso las dimensiones de la figura estaban expresadas en metros lineales, la superficie resultó en metros cuadrados y fracciones decimales de metro cuadrado.

Si el valor obtenido en metros cuadrados lo quisiéramos trasformar en *aras* conforme á lo explicado en aritmética (183), bastaria dividir el número obtenido por 100. Así

$$\overset{\text{m. cd.}}{109633'4350} = \overset{\text{aras.}}{1096'334350}$$

Si las aras se quieren reducir á hectáras, se dividirán igualmente por 100, de modo que

$$\overset{\text{m. cd.}}{109633'4350} = \overset{\text{aras.}}{1096'33435} = \overset{\text{hectaras.}}{10'9633435}$$

Por el contrario, si los metros cuadrados se quieren reducir sucesivamente á decímetros cuadrados y estos á centímetros cuadrados, se tiene:

$$\overset{\text{m. cd.}}{109633'4350} = \overset{\text{decím. cd.}}{10963343'50} = \overset{\text{centím. cd.}}{1096334350}$$

V.—*Los lados contíguos de un rectángulo son de* 8500 *metros y de* 2556 *metros. Se quiere saber cnál es la área de este rectángulo expresada en miriaras.*

Siendo la área de un rectángulo igual al producto de su base por su altura se tiene:

$$\text{Area del rect.} = \overset{\text{m}}{8500} \times \overset{\text{m}}{2556} = \overset{\text{m cd.}}{21726000} = \overset{\text{miriaras.}}{21'726}$$

VI.—*¿Cuál seria el lado de un cuadrado equivalente á una caballeria de tierra que contiene* 609408 *varas cuadradas?*

Llamando x el lado del cuadrado buscado debe tenerse

$$x^2 = 609408 \text{ varas cuadradas}$$

luego $x = \sqrt{609408} = 780$ varas 64 centésimas.

VII.—*Se quiere saber cuál es la área expresada en centímetros cuadrados, de un paralelógramo que tiene* $\overset{\text{m}}{3'2}$ *de base y* $\overset{\text{m}}{0'85}$ *de altura.*

Como la área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura, se tiene:

$$\text{Area del paralelógramo} = \overset{\text{m}}{3'2} \times \overset{\text{m}}{0'85} = \overset{\text{m. cd.}}{2'72} = \overset{\text{cent. cd.}}{27200}$$

VIII.—*¿Cuál es el número de aras que tiene un trapecio, cuyas bases son de* $\overset{\text{m}}{16'5}$ *y* $\overset{\text{m}}{28'22}$, *y cuya altura es de* 9 *metros?*

Como la área de un trapecio es igual al producto de la semisuma de sus bases por su altura, tendrémos:

$$\text{Area del trapecio} = \frac{\overset{\text{m}}{16'5} \times \overset{\text{m}}{28'22}}{2} \times 9 = \overset{\text{m. cd.}}{201'24} = \overset{\text{aras.}}{2'0124}$$

IX.—*Calcular la área de un exágono regular cuyo lado es de* $\overset{\text{m}}{32'2}$.

Como la área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de su perímetro por el radio recto, es preciso averiguar la longitud de estas dos líneas.

El perímetro del exágono regular será igual á $\overset{\text{m}}{32'2} \times 6 = \overset{\text{m}}{193'20}$.

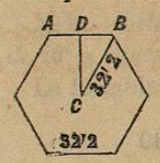

Figura 248.

En cuanto al radio recto, bastará observar en la (fig. 248) que si desde el centro del polígono se baja la perpendicular C D y el radio oblícuo C B, resultará el triángulo C B D cuya hipotenusa C B = A B = 32'2 [497], y cuyo cateto $BD = \frac{32'2}{2}$, luego (532)

$$C\,D^2 = 32'2^2 - \frac{32'2^2}{4} = 777'63$$

y $$C\,D = \sqrt{777'63} = 27'88$$

La área del exágono será $= \frac{1}{2}\,(193'20 \times 27'88) = 2693'208$ m. cd.

X.—*Calcular la área de un círculo cuyo radio es de* $6325'28^{m}$.

Sustituyendo en la fórmula [568] $s = \pi\, r^2$
se tiene: $s = 3'141593 \times (6325'28)^2$
haciendo el cálculo por logaritmos:

logarit.	3'141593..... ...	0'497 1499
logarit.	6325'28	3'801 0798
repitiéndolo		3'801 0798
		8'099 3095=log. 125 692 551

Así pues, la área del círculo es de 125 692 551 metros cuadrados.

XI.—*Determinar el diámetro de un círculo cuya área es de* 45238'9342 *varas cuadradas.*

La fórmula (3) del número 568 da

$$s = \frac{\pi\, d^2}{4}$$

despejando á $$d = \sqrt{\frac{4\,s}{\pi}}$$

sustituyendo $$d = \sqrt{\frac{4 \times 45238'9342}{3'141593}}$$

tomando los logaritmos.

Logaritmo 4.....	0'602 0600
logaritmo 45238'9342.....	4'655 5123
	5'257 5723
menos log. 3'141593...	0'497 1499
	4'760 4224
	½ 2'380 2112 = log. 240

luego el diámetro será de 240 varas.

XII.—*Se quiere determinar en piés cuadrados, la área de una corona formada por dos círculos cuyos radios son de* 56 *y de* 42 *varas.*

La fórmula correspondiente [569] es:

$$s = \pi\,(R + r)\,(R - r)$$

sustituyendo $$s = \pi \times 98 \times 14$$

calculando por medio de logaritmos,

logaritmo 3'141593.....	0'497 1499
logaritmo 98.....	1'991 2261
logaritmo 14.....	1'146 1280
	3'634 5040 = log. 4310'265 varas cuad.

Como una vara cuadrada tiene 9 piés, la área de la corona expresada en piés cuadrados será de 38792'385.

XIII.—*Determinar la área de un sector de círculo, cuyo radio es de* $14'5^{m}$ *y el arco de* 42°.

La área del sector circular es igual (570) á la mitad del producto del arco rectificado por el radio.

Para determinar el valor del arco rectificado de 42° calcularêmos primero la circunferencia del círculo cuyo radio es de $14'5^{m}$ por la fórmula (549):

$$\text{circunferencia} = 2\,\pi\,r$$

sustituyendo $$C = 2 \times 3'141593 \times 14'5^{m} = 91'1062^{m}.$$

En seguida se calculará la longitud del arco de 42° por medio de la proporcion:

$$360^\circ : 42^\circ :: 91'1062 : x = 10'629$$

La área del sector será $= \frac{10'629 \times 14'5}{2} = 77'06025$

XIV.—*Determinar la área de un trapecio circular cuyos arcos son de* 60° *y cuyos radios son respectivamente de* 41 *y de* 30 *piés.*

La fórmula correspondiente (571) es:

$$\text{trapecio circular} = \frac{A + a}{2}(R - r) \ldots [1]$$

Así, pues, para poder sustituir en ella los valores numéricos, comenzarémos por determinar los arcos A y a de 60°.

$$C = 2\pi R = 2\pi 41 = 257'611$$

$$360° : 60° :: 257'611 : A = \overset{\text{piés.}}{42'935}$$

$$c = 2\pi r = 2\pi 30 = 188'496$$

$$360° : 60° :: 188'496 : a = 31'416$$

Sustituyendo en la fórmula (1),

$$\text{Area del trapecio} = \frac{42'935 + 31'416}{2}(41-30) = \overset{\text{piés cuad.}}{408'925}$$

XV.—*Determinar la área de un segmento de círculo cuyo radio es de 10 metros y cuyo arco es de 30°.*

La área del segmento circular es igual á la mitad del producto del radio por la diferencia entre el arco del segmento y la mitad de la cuerda del arco doble [572].

Así, pues, tendremos que determinar el arco rectificado de 30° en el círculo cuyo radio es de 10 metros, y la cuerda del arco de 60°.

La circunferencia del círculo es $2\pi r = 2\pi 10 = 62'832$.

$$360° : 30° :: 62'832 : \text{arco de } 30° = 5'236$$

En cuanto á la cuerda del arco de 60° hay fórmulas y tablas que dan el valor de la cuerda en funcion del número de grados del arco; pero, en nuestro caso, por ser el arco de 60° [497] la cuerda será igual al radio del círculo = 10 metros. Por tanto, la área del segmento $= \frac{10\,[5'236-5]}{2} = \overset{\text{m. cuad.}}{1'180}$

COMPARACION DE LAS AREAS.

574.—*Las áreas de dos paralelógramos cualesquiera, son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Como la área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura, si representamos por P y p las áreas de los peralelógramos, por B y b sus bases y por A y a las alturas, se tiene:

$$P = B \times A$$

$$p = b \times a$$

Dividiendo una por otra estas ecuaciones, resulta:

$$\frac{P}{p} = \frac{B \times A}{b \times a}$$

ó

$$P : p :: B \times A : b \times a$$

que es lo que se debia demostrar.

575.—*Las áreas de dos triángulos cualesquiera son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Como la área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura, si llamamos T y t las áreas de los triángulss B y b sus bases, y A y a sus alturas, se tiene:

$$T = \frac{B \times A}{2}$$

$$t = \frac{b \times a}{2}$$

Dividiendo una por otra estas ecuaciones, y suprimiendo el denominador comun 2, resulta:

$$\frac{T}{t} = \frac{B \times A}{b \times a}$$

ó

$$T : t :: B \times A : b \times a$$

que es lo que expresa el teorema.

De aquí se infiere: 1° *que las áreas de los triángulos que tienen bases*