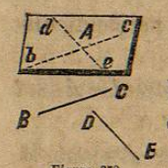

Figura 278.

Por A tírense b c y d e respectivamente paralelas á B C y D E, y haciendo pasar un plano por b A c y d A *e*, quedará resuelta la cuestion.

ANGULOS DIEDROS.

614.—*Se llama ángulo diedro la figura formada por dos planos M y N inclinados entre sí, que concurren en una recta A B* (fig. 279). Los planos M y N se denominan *caras* ó *lados*, y la recta A B *arista* del diedro. La magnitud de un ángulo diedro depende de la mayor ó menor inclinacion de los planos que lo forman, y no de la extension de éstos; por lo que al medir un diedro lo que se estima únicamente es la inclinacion relativa de sus caras.

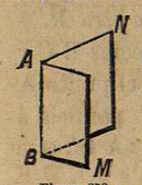

Figura 279.

Se tendrá una idea exacta del ángulo diedro y de su magnitud, imaginándose que sus caras están primero aplicadas una sobre otra, que en seguida se separan, pero girando al rededor de la arista A B, como las dos partes de un libro que se abre. El ángulo diedro, nulo al principio, toma un valor que va aumentando con la separacion de las caras. Así, pues, el ángulo diedro está engendrado por la rotacion de un plano al rededor de una recta. En este movimiento cada uno de los puntos del plano describe una circunferencia de círculo cuyo plano es perpendicular á la arista y cuyo centro está en un punto de esta recta.

Cuando no hay mas que un solo diedro, se le designa por las letras A B de su arista; pero cuando hay varios que concurren en la misma arista, para evitar confusion, se designa el diedro por cuatro letras; teniendo cuidado de poner siempre las dos de su arista A B en medio de las otras dos N y M que corresponden á los planos que lo forman, y así se dice el diedro N A B M.

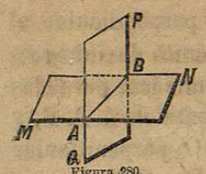

Figura 280.

Cuando un plano P A (fig. 280) cae sobre otro M N, forma con éste dos ángulos diedros M A B P y P B A N, que son *adyacentes*. Cuando éstos son iguales, el plano P A es perpendicular á M N, y recíprocamente. Si el ángulo que forman los dos planos es menor que P B A N, se dice que el diedro es *agudo*, y en caso contrario, que es *obtuso*. En fin, para los ángulos diedros se adoptan las mismas denominaciones de ángulos *complementarios, suplementarios*, etc., que para los ángulos rectilíneos.

615.—*Los ángulos rectilíneos B A C y* b a c (fig. 281) *que resultan de la interseccion de un ángulo diedro* A a, *con dos planos paralelos cualesquiera, son iguales.*

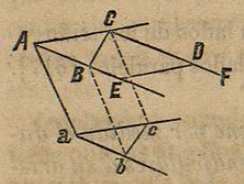

Figura 281.

Tomemos A C = a c y B A = b a, y tiremos las rectas B b, C c, B C y b c: A C es paralela á a c (604) é igual, luego la figura A c es paralelógramo y en consecuencia será C c igual y paralela á A a. Como A B es igual y paralela á a b, la figura A b es igualmente un paralelógramo, de lo que resulta que B b es igual y paralela á A a; luego B b será igual y paralela á C c, y B c será un paralelógramo en el que B c=b c. Los dos triángulos A B C y a b c serán iguales (386) por tener sus tres lados respectivamente iguales, y de la igualdad de los triángulos resulta que el ángulo B A C=b a c, que es lo que se queria demostrar.

616.—De aquí se infiere: 1° *si dos ángulos en el espacio* B A C *y* b a c (fig. 281) *tienen sus lados paralelos y sus aberturas están vueltas en el mismo sentido, serán iguales;* 2° *igualmente lo son si están vueltas en sentido contrario como* b a c *y* C D E; *y* 3° *dos ángulos* b a c *y* E D F, *que tienen sus lados paralelos y sus aberturas no están vueltas en el mismo sentido ni en sentido contrario, son suplementarios.*

En el párrafo anterior hemos demostrado la primera parte, esto es, que B A C=b a c.

2° Como el ángulo B A C = C D E (420), se infiere que b a c = C D E.

3° Siendo el ángulo E D F suplemento de C D E, se infiere que E D F y b a c son suplementarios.

617.—*Los planos de dos ángulos* B A C *y* b a c [fig. 282] *cuyos lados son respectivamente paralelos, serán paralelos.*

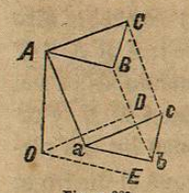

Figura 282.

Desde el punto A bajemos A O perpendicular al plano del ángulo b a c, y por el punto de interseccion O tiremos O D y O E respectivamente paralelas á a c y á a b, por lo que O E será paralela á A B, y O D á A C. Ahora bien, siendo A O perpendicular al plano en que están las rectas O D y O E, los ángulos A O D y A O E son rectos, y por razon de las paralelas [409] tambien lo serán los ángulos O A B y O A C, luego O A es perpendicular á la vez á los planos de los ángulos b a c y B A C, y por lo mismo estos serán paralelos [606].

618.—*Los triángulos* A B C *y* a b c *formados en el espacio por tres rectas respectivamente iguales y paralelas, son iguales y quedan en planos paralelos.*

Serán iguales por serlo respectivamente los tres lados de los triángulos [386], y estarán en planos paralelos por ser los lados paralelos [617].

619.—*Un ángulo diedro* B A D C [fig. 283] *tiene por medida el ángulo rectilíneo* B A C *que resulta levantando perpendiculares á su arista* A D *del mismo punto* A *en cada uno de los dos planos que lo forman.*

En primer lugar observarémos que en cualquier punto de la arista A D en que se levanten perpendiculares, determinarán un ángulo igual á B A C por estar formados por rectas respectivamente paralelas [616].

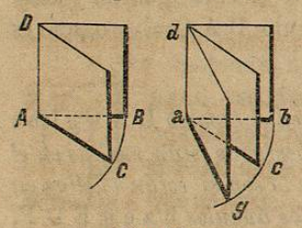

Figura 283.

Para demostrar que los ángulos diedros son proporcionales á los rectilíneos formados por perpendiculares en el mismo punto á su arista, y que por tanto pueden tomarse los últimos como medida de los primeros, demostrarémos préviamente que *si dos ángulos diedros* B A D C *y* b a d c *son iguales lo serán los ángulos rectilíneos* B A C *y* b a c *formados por las respectivas perpendiculares á sus aristas levantadas en cada una de sus caras del mismo punto.*

Siendo por el supueto iguales los ángulos diedros B A D C y b a d c, si hiciéramos coincidir la cara B D con b d sobreponiendo la arista A D sobre a d, teniendo cuidado de que A cayese sobre a, el plano D C coincidiria con d c. La perpendicular A B coincidiria con a b (395), y la A C con a c; luego el ángulo B A C = b a c.

Ahora bien: si á continuacion del ángulo diedro b a d c ponemos su igual c a d g, haciéndolos coincidir por la cara d c, resultará un ángulo diedro b a d g duplo del b a d c, y el ángulo rectilíneo b a c=c a g,

por lo que al ángulo diedro duplo b a d g corresponde un ángulo rectilíneo b a g duplo de b a c.

De la misma manera probariamos que á un diedro triple corresponde un ángulo rectilíneo triple, y en general á un ángulo diedro *n* veces mayor que otro, corresponderá un ángulo rectilíneo formado por las perpendiculares á su arista tambien *n* veces mayor. Así es que, siendo estos ángulos rectilíneos proporcionales á la magnitud de los ángulos diedros, pueden servirles de medida.

De modo que, en último análisis, los arcos de círculo nos servirán para medir los ángulos diedros.

620.—De esto resulta, que cuando uno ó varios planos caen sobre otro, ó lo cortan, tienen lugar los mismos teoremas que con las rectas que miden los ángulos diedros. Así es, que los ángulos diedros adyacentes son suplementarios; todos los formados al rededor de una arista comun valen cuatro rectos; los ángulos opuestos al vértice son iguales, etc., etc.

Igualmente cuando dos planos paralelos están cortados por otro se tiene que los ángulos diedros alternos internos son iguales, los interiores del mismo lado del plano secante son suplementarios, así como todas las propiedades que hemos demostrado en los casos de rectas paralelas.

621.—Dos planos son perpendiculares cuando el ángulo diedro que forman tiene por medida un recto.

Si un plano es perpendicular á otro, este tambien es perpendicular al primero.

622.—*Si una recta* A B (fig. 284), *es perpendicular á un plano* M N, *lo será igualmente cualquier plano* P C *que pasa por ella.*

Si en el plano M N levantamos B O perpendicular á C D interseccion comun de los dos planos, tendrémos que el ángulo A B O formado por las perpendiculares á C D será la medida del ángulo diedro de los dos planos; pero por ser A B perpendicular á M N, el ángulo A B O es recto; luego el plano P C será perpendicular á M N.

623.—*Por una recta* C D (fig. 284) *contenida en un plano, no se puede levantar mas de un plano perpendicular á éste.*

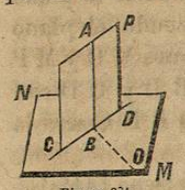

Figura 284.

En razon de que para que el plano P C sea perpendicular á M N, acabamos de ver que es preciso pase por B A perpendicular á M N, y de que se sabe que por un punto B no se puede levantar á M N más de una sola perpendicular [596].

624.—*Si dos planos P y M* (fig. 284) *son perpendiculares, y en uno de ellos se baja una recta A B perpendicular á la interseccion comun D C, esta recta será perpendicular al otro plano M.*

Por ser los planos perpendiculares el ángulo A B O es recto.

Por ser A B perpendicular á C D, el ángulo A B C tambien es recto, luego A B será perpendicular á todas las rectas que pasan por el punto B contenidas en el plano M N (592) y por tanto será perpendicular á este plano.

625.—*Si dos planos P y M* (fig. 284) *son perpendiculares, y en un punto B de su interseccion comun se levanta una recta B A perpendicular á uno de los planos M, esta recta quedará contenida por entero en el otro plano P.*

Porque si A B no estuviese contenida en el plano P, levantando en este plano en el punto B una perpendicular á C D, se tendrían (624) dos perpendiculares al plano M N en el mismo punto, lo que no es admisible (596).

626.—*Si dos planos M y N* (fig. 285) *son perpendiculares á un tercero P Q, su interseccion comun A B será tambien perpendicular á este plano P Q.*

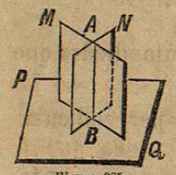

Figura 285.

Porque si por el punto B levantamos una perpendicular al plano P Q, tendrá que estar contenida tanto en el plano M como en el N.

627.—*Si desde un punto A* [fig. 286] *tomado en el interior de un ángulo diedro M N se bajan á sus caras las perpendiculares A B y A C, el ángulo A que resulte será suplemento del ángulo diedro.*

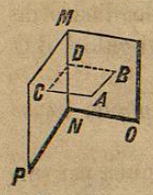

Figura 286.

Por ser A B perpendicular al plano M O, el plano A B D C que pasa por esta recta será perpendicular al plano M O [622] y por tanto el ángulo A B D será recto. Por ser A C perpendicular al plano M P, el plano A B D C que pasa por ella será perpendicular al plano M P, y el ángulo A C D será recto. Siendo el plano A B D C perpendicular á la vez á los planos M O y M P lo será á su interseccion comun M N [626], y como B D y C D son perpendiculares á la arista del ángulo diedro, el ángulo B D C será la medida del diedro O M N P.

Ahora bien: considerando el cuadrilátero A B D C se tiene [445:]

$$A + B + D + C = 4 \text{ rectos}$$

por otra parte $B + C = 2$ rectos

restando la 2ª ecuacion $A + D = 2$ rectos

que es lo que se debia demostrar, supuesto que B D C es la medida del ángulo diedro.

TRIEDROS Y POLIEDROS.

628.—*Se llama ángulo sólido ó ángulo poliedro, la figura que resulta cuando tres ó más planos concurren en el mismo punto S* [fig. 287]. *Cuando los planos que concurren en el mismo punto B son tres, la figura se llama ángulo triedro. Se da el nombre de poliedro no solo al ángulo formado por muchos planos, sino tambien al sólido limitado por muchas caras planas.*

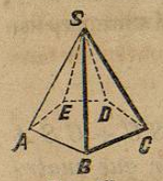

Figura 287.

El punto S es el *vértice* del poliedro; las intersecciones consecutivas S A, S B.... de sus planos son las *aristas;* cada porcion de plano indefinido A S B comprendida entre dos aristas es una *cara;* cada ángulo A S B formado por dos aristas consecutivas es un *ángulo plano,* y cada ángulo diedro B S A E formado por dos caras consecutivas, es un ángulo diedro del poliedro.

Un ángulo poliedro se designa por la letra S de su vértice, y cuando hay varios poliedros que tienen el mismo vértice por las letras S A B C D E de sus aristas, comenzando por la de su vértice.

Si el espacio del poliedro está limitado por un plano A B C D E, se forma un cuerpo que se llama *sólido,* que en el caso de nuestra figura es una *pirámide* de base pentagonal.

Nos ocuparémos únicamente de *los poliedros convexos,* que son aquellos cuyos ángulos diedros son todos salientes, esto es, que cortados por un plano A B C.... dan por seccion un polígono convexo [461].

629.—*En todo ángulo triedro S* [fig. 288] *uno cualquiera de sus ángulos planos E S G formado por dos de sus aristas, es menor que la suma de los otros dos.*

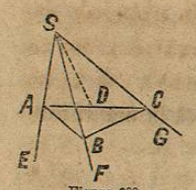

Figura 288.

Nos bastará demostrarlo con el ángulo plano E S G, que es el mayor, para que se comprenda que con más razon será cierto el teorema con cualquiera de los otros dos.

Construyamos sobre esta cara el ángulo E S D=E S F, tiremos una recta cualquiera A C y tomando S B=S D, trácese la recta A B.

Los triángulos S A D y S A B serán iguales [385], de lo que resulta:

$$A\,B = A\,D$$

por otra parte

$$A\,B + B\,C > A\,C$$

restando los términos de la ecuacion de los de la desigualdad, se tiene:

$$B\,C > D\,C$$

Considerando los triángulos C S B y C S D, en los que los ángulos C S B y C S D están formados por lados respectivamente iguales, el opuesto al mayor lado B C será el mayor, esto es

ángulo $B\,S\,C > C\,S\,D$
agregando los iguales $B\,S\,A = A\,S\,D$
resulta $B\,S\,C + B\,S\,A > A\,S\,C$

que es lo que se tenia que demostrar.

630.—*La suma de los tres ángulos planos A S B + B S C + C S A* (fig. 289), *formados en el vértice de un triedro, es menor que cuatro rectos.*

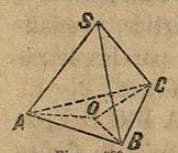

Figura 289.

Cortemos el triedro por un plano cualquiera A B C, y tomando en el interior de este triángulo un punto O, reunámoslo con los tres vértices, A, B y C, con lo que resultarán tres triángulos colocados en el mismo plano cuyo vértice comun es O, y otros tres triángulos cuyos vértices concurren en el S del triedro. Para simplificar harémos la suma de los ángulos.

$$A\,O\,B + B\,O\,C + C\,O\,A = O$$

y

$$A\,S\,B + B\,S\,C + C\,S\,A = S$$

Como los ángulos en O valen 4 rectos, nuestro raciocinio tendrá por objeto demostrar que S < O.

Siendo el número de triángulos formados al rededor de O el mismo que el de los formados en S, y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, resulta que la suma de los ángulos de los triángulos en O, es igual á la suma de los ángulos de los triángulos en S. Esto es,

$$O + C\,A\,B + A\,B\,C + B\,C\,A = S + S\,A\,C + S\,A\,B + S\,B\,A + S\,B\,C + S\,C\,B + S\,C\,A \ldots [1]$$

Por otra parte (629)

$$C\,A\,B < S\,A\,C + S\,A\,B$$
$$A\,B\,C < S\,B\,A + S\,B\,C$$
$$B\,C\,A < S\,C\,B + S\,C\,A$$

sumando ordenadamente estas tres desigualdades

$$C\,A\,B + A\,B\,C + B\,C\,A < S\,A\,C + S\,A\,B + S\,B\,A + S\,B\,C + S\,C\,B + S\,C\,A \ldots (2)$$

Si restamos los términos de esta desigualdad de los de la ecuacion (1) como cuando el sustraendo aumenta, la resta disminuye (49), resulta:

ángulos en $O > S$

y como los ángulos en O = 4 rectos, se tiene que la suma de los ángulos planos formados en el vértice S será menor que cuatro rectos.

631.—*Dos triedros* S *y* s (fig. 290) *formados por ángulos planos respectivamente iguales,* D S E=d s e, D S F=d s f *y* E S F=e s f, *tienen sus ángulos diedros iguales.*

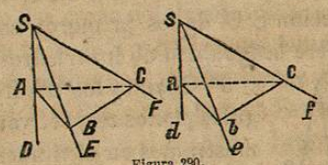

Figura 290.

Tomemos S A = s a, y por los puntos A y a hagamos pasar planos A B C y a b c respectivamente perpendiculares á S D y á s d. El triángulo S A B es igual á s a b (384) por tener S A = s a adyacente á los ángulos A S B = a s b por ángulos planos del triedro y S A B= s a b por rectos. Por la misma razon el triángulo S A C es igual á s a c, y de esto se deduce que A B=a b, A C=a c y que el triángulo B S C igual á b s c por tener el ángulo E S F = e s f formado por los lados iguales S B = s b y S C = s c (385) luego B C = b c. Siendo respectivamente iguales los tres lados del triángulo A B C á los del triángulo a b c, estos dos triángulos serán iguales (386), por lo que el

ángulo B A C=b a c; pero como estos ángulos son medida de los diedros formados sobre S D y s d, éstos tambien serán iguales. De la misma manera demostrariamos que los diedros segun S E y s e, y los segun S F y s f son iguales con tomar partes iguales sobre estas aristas y levantarles planos perpendiculares.

632.—*Dos triedros son iguales: 1° cuando tienen un ángulo diedro igual formado por dos ángulos planos respectivamente iguales y situados en el mismo órden; 2° cuando tienen un ángulo plano igual, adyacente á dos ángulos diedros respectivamente iguales situados de la misma manera; y 3° cuando tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales dispuestos en el mismo órden.*

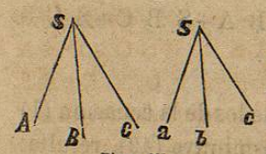

Figura 291.

1° Sea el ángulo diedro S A = s a (fig. 291) é iguales las caras que forman este diedro, esto es, ángulo A S C = a s c y A S B=a s b. Si aplicáramos el ángulo diedro S A sobre s a, por ser iguales los diedros, el plano S A B coincidiria sobre s a b, y el S A C sobre s a c, y por la igualdad de las caras la recta S B coincidiria con s b y S C con s c, así es que los dos triedros coincidirán en todas sus partes, y por lo mismo serán iguales.

2° Sea la cara A S B=a s b adyacente á los ángulos diedros A S igual á a s y B S igual á b s. Si sobrepusiéramos los ángulos A S B y a s b iguales, por la igualdad de los diedros adyacentes el plano A S C coincidiria con a s c, y el plano B S C con b s c, de lo que resulta que coincidiria la interseccion S C de los primeros con la s c de los últimos, y de esto se infiere la igualdad de los triedros en todas sus partes.

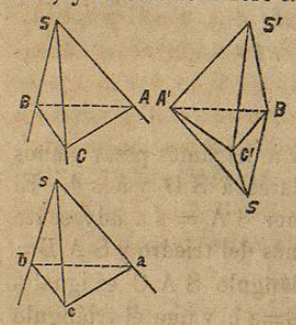

Figura 292.

3° Cuando los triedros tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales, ya demostramos en el número 631 que sus ángulos diedros tambien son iguales; pero para que los triedros puedan sobreponerse se necesita que las caras respectivamente iguales estén dispuestas en el mismo órden. En la figura 292 los triedros S y s serán sobreponibles porque están formados no solo de caras iguales, sino dispuestas en el mismo órden; pero no es posible sobreponer los triedros S y S' en los que los ángulos iguales A S B=A' S' B, A S C= A' S' C' y B S C=B S' C' no están colocados de la misma manera. En efecto, para poder sobreponer el triángulo A B C sobre su igual

A' B C', se necesita invertir el triedro S y hacerlo tomar la posicion S A' B C', que como verémos más adelante (648), es *simétrica* con respecto á la de S'. Esta observacion de que la igualdad de todas las partes de un triedro no implica que puedan sobreponerse sino en el caso de que sus partes constitutivas, caras y diedros, estén agrupadas en el mismo órden, se refiere igualmente á las dos primeras condiciones de igualdad de los triedros.

En el número 634 considerarémos un 4° caso de igualdad de los triedros, y es cuando están formados por diedros iguales.

633.—*Si desde un punto* S (fig. 293) *tomado en el interior de un ángulo triedro* s' *se bajan perpendiculares* S A, S B *y* S C *sobre sus tres caras y se hacen pasar planos por las perpendiculares, se formará un segundo ángulo triedro* S *cuyos ángulos planos* A S B, B S C *y* C S A *son respectivamente suplementos de los ángulos diedros* s' D, s' E *y* s' F *opuestos del primer triedro* s'. *Recíprocamente las caras del triedro* s' *serán suplementos de los ángulos diedros del triedro* S.

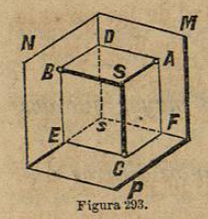

Figura 293.

En el número 627, considerando el cuadrilátero S A D B en el que los ángulos en A y en B son rectos, hemos demostrado que el ángulo A S B es suplemento del ángulo A D B que es la medida del diedro s' D, y como la misma demostracion es aplicable á los cuadriláteros S B E C y S C F A queda probada la proposicion directa.

Para demostrar que las caras del triedro s' son suplementos de los ángulos diedros segun S A, S B y S C, considerarémos el cuadrilátero D s' F A. Por pasar el plano A C por las rectas S A y S C perpendiculares á los planos M s' y P s', será perpendicular á la vez á ambos (622) y á su interseccion comun s' F (626), luego el ángulo A F s' es recto. Por pasar el plano A B por las perpendiculares S A y S B á los planos M s', y N s', será perpendicular á la vez á ambos y á su interseccion s' D, luego el ángulo s' D A es recto. Así es que

A F s'+F s' D+s' D A+D A F=4 rectos (445).

A F s'+s' D A=2 rectos.

restando resulta F s' D+D A F=2 rectos

pero F s' D es la cara del triedro s', y D A F es la medida del diedro A S, por ser esta arista perpendicular á M s' y por consiguiente á las rectas D A y A F que pasan por su pié.

Del mismo modo demostrariamos que las otras caras de s' son suplementos de los diedros opuestos de S.

Dos triedros tales como S y s' se llaman *suplementarios*, y un triedro cualquiera tiene siempre otro que le es suplementario.

Si llamamos d, d' y d'' los ángulos diedros del triedro s', segun las aristas E s', D s' y F s', y representamos por c, c' y c'' los ángulos B S C, B S A y A S C de las caras del triedro suplementario S, por ser igual á dos ángulos rectos d+c, d'+c', y d''+c'', tendrémos:

$$d+d'+d''+c+c'+c''=6 \text{ rectos} \ldots (1)$$

y como (630) $\qquad c+c'+c''<4$ rectos

restando esta desigualdad de la ecuacion, resulta:

1° que $\qquad d+d'+d''>2$ rectos

y trasladando en la [1] tendrémos $d+d'+d''=6$ rectos$-(c+c'+c'')$

lo que significa 2° que $\qquad d+d'+d''<6$ rectos

luego *la suma de los ángulos diedros de un triedro es mayor que dos ángulos rectos y menor que seis.*

634.—*Dos ángulos triedros* s *y* s' *que tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales, serán iguales.*

Para que los triedros que hemos llamado s y s' sean iguales, tendrémos que deducir que los ángulos planos de sus caras lo son. Si llamamos S y S' dos triedros respectivamente suplementarios de s y de s'; siendo los ángulos diedros de s respectivamente iguales á los de s', los triedros S y S' tendrán sus caras respectivamente iguales, por ser estas caras suplemento de los ángulos diedros de s y de s', y por tanto [632—3°] los triedros S y S' serán iguales. Ahora bien: siendo iguales los ángulos diedros de S y S' las caras de sus suplementarios s y s' lo serán, que es lo que se debia demostrar.

635.—Un poliedro toma el nombre de *tetraedro* cuando está formado por la reunion de 4 planos; el de *pentaedro* cuando lo está por 5 planos; el de *exaedro* si lo forman 6; *eptaedro*, si lo forman 7 caras, etc.

636.—*Dos ángulos poliedros son iguales: 1° cuando tienen sus ángulos diedros iguales formados por ángulos planos respectivamente iguales y colocados de la misma manera; y 2° cuando tienen sus aristas paralelas y distribuidas en el mismo órden* (fig. 294).

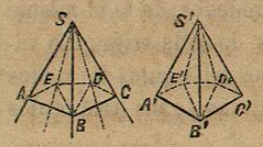

Figura 294.

1° Si los poliedros S y S' tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales formados por caras iguales dispuestas en el mismo órden, y si por una de sus aristas S B y S' B' tiramos planos á todas las demás, para probar que son iguales demostrarémos que lo son los triedros en que quedan descompuestos.

El triedro S A B E=S' A' B' E' por tener el diedro S A=S' A' formado por ángulos iguales A S B=A' S' B' y A S E=A' S' E' [632—1°] De esto resulta: 1° que el ángulo diedro A E S B=A' E' S' B', y 2°, que la cara E S B=E' S' B'.

Para demostrar que el triedro S E B D=S' E' B' D', tenemos: que si de los ángulos diedros A E S D=A' E' S' D' restamos los iguales

A E S B=A' E' S' B'

nos queda $\qquad$ B E S D=B' E' S' D'

formados por las caras iguales E S B=E' S' B' y E S D=E' S' D' luego [632—1°] los triedros que consideramos son iguales; pudiendo demostrarse lo mismo con los S B D C y S' B' D' C'.

2° Si las aristas de los poliedros S y S' son paralelas y están distribuidas en el mismo órden, los ángulos planos serán iguales [616], y por serlo éstos lo serán tambien los ángulos diedros de los triedros en que puedan descomponerse [631], luego serán iguales las partes de ambos poliedros.

637.—*La suma de los ángulos planos A S B, B S C.... (fig. 295) formados en el vértice S de un poliedro es menor que cuatro rectos.*

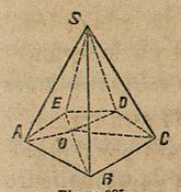

Figura 295.

Cortemos el poliedro por un plano A B C D E, tomemos en su interior un punto O y reuniéndolo con los vértices A, B, C.... resultarán en O y en S tantos triángulos como lados tiene el poliedro. Para simplificar

harémos la suma de los ángulos A O B+B O C+C O D....=O
,, ,, ,, A S B+B S C+C S D....=S

Como los ángulos en O valen 4 rectos, vamos á demostrar que S<O.