Siendo el número de triángulos formados al rededor de O el mismo que el de los formados en S, y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, la suma de los ángulos de todos los triángulos formados al rededor de O será igual á la suma de los ángulos de los triángulos en S. Esto es

$$O+E\,A\,B+A\,B\,C+\ldots=S+S\,A\,E+S\,A\,B+S\,B\,A\ldots.[1]$$

Por otra parte [629] $E\,A\,B<S\,A\,E+S\,A\,B$
$A\,B\,C<S\,B\,A+S\,B\,C$, etc.

sumando ordenadamente estas desigualdades

$$E\,A\,B+A\,B\,C+\ldots<S\,A\,E+S\,A\,B+S\,B\,A+S\,B\,C+\ldots.[2]$$

restando los términos de esta desigualdad de los de la ecuacion [1] como cuando el sustraendo aumenta, la resta disminuye [49], resulta que

ángulos en $O>S$

pero como los ángulos en O valen cuatro rectos, se infiere que la suma de los ángulos planos formados en el vértice S de un poliedro es menor que cuatro rectos.

CUERPOS, O SOLIDOS REGULARES.

638.—*Se llaman cuerpos, ó sólidos regulares, los que están limitados por caras que todas son polígonos regulares iguales entre sí.*

Vamos á demostrar que solo pueden formarse *cinco cuerpos regulares;* fundándonos en que la suma de los ángulos planos de un poliedro tiene que ser menor que 4 rectos, y en que el valor del ángulo de un polígono regular se determina por la fórmula: [467—II] $A=\frac{2.90^\circ(n-2)}{n}$ en la que n representa el número de lados del polígono Por medio de esta fórmula se encuentra que el valor del

ángulo del triángulo equilátero $=60^\circ$
,, del cuadrado $=90^\circ$
,, del pentágono regular $=108^\circ$
,, del exágono ,, $=120^\circ$

Ahora bien: con 3 triángulos equiláteros se puede formar un ángulo sólido ó poliedro, supuesto que $3\times60^\circ=180^\circ<360^\circ$ ó 4 rectos.

El cuerpo sólido que resulta es el *tetraedro,* que tiene 4 caras triangulares y cada uno de sus ángulos poliedros lo forman tres triángulos equiláteros.

Con 4 triángulos equiláteros tambien puede formarse un ángulo sólido, porque $4\times60^\circ=240^\circ<360^\circ$. El cuerpo sólido que resulta se le llama *octaedro* compuesto de 8 caras triangulares y cada uno de sus 6 ángulos poliedros consta de 4 triángulos.

Con 5 triángulos equiláteros todavia puede formarse un ángulo sólido, porque $5\times60^\circ=300^\circ<360^\circ$. El cuerpo sólido que resulta se llama *icosaedro,* y está compuesto de 20 caras triangulares y cada uno de sus 12 ángulos poliedros consta de 5 triángulos.

Con 6 triángulos equiláteros no puede formarse un ángulo poliedro, porque como $6\times60^\circ=360^\circ$, en vez de poliedro resultaria una figura plana, y con más de 6 triángulos no puede formarse ningun ángulo poliedro supuesto que 60° por más de 6 da un producto mayor que 360°.

Con tres cuadrados sí puede formarse un ángulo sólido, porque $3\times90^\circ=270^\circ<360$. El sólido regular que resulta es el *cubo* limitado por 6 cuadrados, y sus ocho ángulos poliedros formados por 3 cuadrados. Con cuatro ó más cuadrados no se puede formar un ángulo sólido, porque 90° multiplicado por 4 da 4 ángulos rectos y por más de 4 da un producto superior á 360°.

Con tres pentágonos regulares puede formarse un ángulo sólido, porque $3\times108^\circ=324<360^\circ$. El cuerpo regular que resulta es el *dodecaedro pentagonal* compuesto de 12 caras, y sus 20 ángulos poliedros están formados por tres pentágonos regulares. Como $4\times108^\circ=432>360^\circ$, resulta que no puede formarse ningun poliedro con la reunion de 4 ni con mayor número de pentágonos.

El ángulo del exágono regular vale 120°, y como $3\times120^\circ=360^\circ$, resulta que ningun poliedro puede formarse con el exágono, sucediendo otro tanto con el heptágono, el octágono y demás polígonos regulares cuyos ángulos valen más que el del exágono.

En resúmen, se ve que no pueden formarse más que cinco cuerpos regulares que son el *tetraedro,* el *octaedro* y el *icosaedro* con el trián-

gulo; el *cubo* con el cuadrado y el *dodecaedro pentagonal* con el pentágono.

Darémos las siguientes reglas para determinar el número de aristas y el de los vértices de cualquiera de los cinco cuerpos regulares, conociendo la especie y el número de sus caras.

Para determinar el número total de aristas de un cuerpo regular, multiplíquese el número de lados de una cara por el número de caras de que está formado, y tómese la mitad.

Tomando separadamente las caras del sólido regular que se considera, la suma de las aristas seria el producto de las aristas de una cara por el número de caras; pero como cada arista es comun á dos caras; es preciso tomar la mitad de ese producto para obtener las aristas del cuerpo.

Para determinar el número de vértices ó ángulos poliedros de un cuerpo regular, multiplíquese el número de ángulos de cada cara por el de caras que limitan el cuerpo, y divídase el producto por el número de caras que forman cada vértice.

El número de ángulos planos de un cuerpo regular, es igual al producto del número de ángulos de cada cara por el de sus caras, y como en cada ángulo poliedro concurren cierto número de caras, resulta que el número de ángulos poliedros será igual al primer producto dividido por el número de caras que forman cada vértice.

SEMEJANZA DE LOS CUERPOS SOLIDOS.

639.—*Se llaman cuerpos ó poliedros semejantes los que tienen sus caras semejantes, sus aristas proporcionales é iguales tanto sus ángulos diedros como sus poliedros.*

640.—*Dos tetraedros S A B C y S' A' B' C' (fig. 296) son semejantes cuando tienen un ángulo diedro igual, A B = A' B', formado por dos caras semejantes colocadas de la misma manera.*

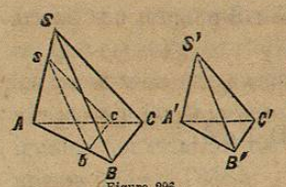


Figura 296.

Si sobrepusiéramos el tetraedro S' A' B' C' poniendo A' en A, A' B' sobre A B y el plano A' B' C' sobre A B C, á causa de la igualdad de los ángulos diedros A B y A' B', la cara A' B' S' coincidiria con el plano de la A B S, y por la semejanza de las caras, siendo iguales sus respectivos ángulos, A' S' caerá sobre la arista A S, B' S' segun b s paralela á B S, y B' C' segun b c igualmente paralela á B C; pues el ángulo A B S = A' B' S' y A B C = A' B' C'. Así es que el tetraedro S' A' B' C' definitivamente coincidirá con s A b c.

Ahora bien, el plano b s c que pasa por b s paralela á B S y por b c paralela á B C determina una cara paralela á S B C, y la interseccion s c será paralela á S C. Así es, que las caras todas de los tetraedros serán semejantes, y por esto proporcionales sus aristas. Los diedros son iguales porque están coincidiendo ó formados por planos paralelos, y los respectivos triedros son iguales por estar formados por ángulos planos iguales distribuidos en el mismo órden (632—3°).

Se ve que *un plano s b c paralelo á una de las caras de un tetraedro, determina otro que le es semejante.*

641.—*Dos tetraedros son semejantes cuando lo son las caras de que están formados.*

De la semejanza de las caras se deduce que las aristas son proporcionales, así como que los ángulos planos de los triedros son iguales. Siendo iguales estos ángulos [631] lo serán los ángulos diedros y tambien los ángulos triedros [632—3°]

642.—*Se llama pirámide un cuerpo S A B C D E* [fig. 297] *limitado por un polígono cualquiera A B C D E, que le sirve de base, y por triángulos S A B, S B C.... que concurren en un mismo punto S, llamado vértice de la pirámide.*

Las aristas S A, S B.... [fig. 297] *de una pirámide quedan cortadas en partes proporcionales por dos planos paralelos A C y a c.*

Siendo paralelos los planos A C y a c, lo serán las rectas A B y a b, B C y b c.... [604] intersecciones de los planos de las caras de la pirámide con los planos A C y a c. Estas rectas paralelas dan [510]:

S A : S a :: S B : S b :: A B : a b
S B : S b :: S C : S c :: B C : b c
S C : S c :: S D : S d :: C D : c d
etc.

y como estas proporciones tienen una razon comun, se infiere:

1° $SA : Sa :: SB : Sb :: SC : Sc....$

que es lo que se queria demostrar;

y 2° $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd....$

esto es, *los lados de los polígonos que resultan en una pirámide por la interseccion de dos planos paralelos, son proporcionales.*

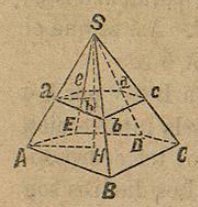


Figura 297.

643.—*Si una pirámide* S (fig. 297) *se corta por un plano* a c *paralelo á su base, resultará un polígono* a b c d e *semejante á la base* A B C D E.

Acabamos de ver que los lados de los polígonos A B C D E y a b c d e son proporcionales, y como además los ángulos cuyos vértices quedan en la misma arista son iguales por estar formados por lados paralelos (616), serán semejantes.

644.—*Las áreas de los polígonos que resultan cortando una pirámide S* (fig. 297) *por dos planos paralelos, son proporcionales á los cuadrados de sus distancias S H y S h al vértice.*

Por ser los polígonos semejantes, se tiene (519):

$$\text{sup. de } ABCDE : abcde :: AB^2 : ab^2.... \quad (1)$$

Bajando la perpendicular S H sobre los planos paralelos, y tirando las rectas A H y a h, resultan los triángulos semejantes S A H y S a h, que dan:

$$SA : Sa :: SH : Sh$$

por otra parte $SA : Sa :: AB : ab$

luego $SH^2 : Sh^2 :: AB^2 : ab^2.... \quad [2]$

suprimiendo la razon comun en las proporciones [1] y [2] se tiene:

áreas $ABCDE : abcde :: SH^2 : Sh^2$

que es lo que se debia demostrar.

645.—*Toda pirámide S A C* (fig. 297) *cortada por un plano a c paralelo á su base, da otra pirámide S a c semejante á la primera.*

Las caras de las dos pirámides son semejantes, por lo cual todas sus

aristas son proporcionales. Siendo iguales los ángulos planos de las caras que constituyen cada ángulo poliedro, serán iguales los ángulos de los triedros en que pueden descomponerse, haciendo pasar planos por el vértice S y los ángulos de la base [631], y los poliedros mismos serán iguales por estar formados de diedros y caras iguales colocadas de la misma manera [636].

646.—*Dos pirámides S A C y S' A' C'* [fig. 298] *formadas por caras semejantes y dispuestas en el mismo órden, son semejantes.*

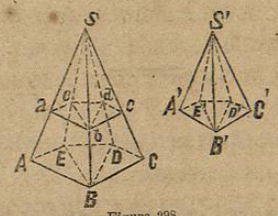


Figura 298.

Por la semejanza de las caras serán proporcionales las aristas é iguales los ángulos planos que forman los poliedros. De esta igualdad de los ángulos planos se origina naturalmente la de los ángulos diedros de los triedros en que pueden descomponerse las pirámides, haciendo pasar planos por los vértices S y S' y los ángulos de las bases [631], y á su vez la de los poliedros. Así, por ejemplo, la igualdad de las caras que constituyen los poliedros S y S' produce la de los diedros; luego los poliedros S y S' serán iguales [636], y si los sobrepusiéramos en S a c, siendo proporcionales las aristas, los planos A C y a c serian paralelos, y por esto semejantes las pirámides S A C y S' A' C'.

647.—*Dos pirámides S A C y S' A' C'* [fig. 298] *serán semejantes si están formadas de tetraedros semejantes dispuestos en el mismo órden.*

Al ser los tetraedros S A E B, S B E D y S B D C respectivamente semejantes á los S' A' E' B', S' B' E' D', etc., las caras que forman los poliedros S y S' serán semejantes, por lo cual los ángulos planos serán iguales y las aristas proporcionales, de lo que se deduce que los ángulos diedros y los triedros de las pirámides serán iguales, y por lo mismo semejantes las pirámides que consideramos.

Como lo que hemos dicho y demostrado de las pirámides es aplicable á todos los poliedros, se infiere:

1° Que dos poliedros serán semejantes cuando tengan sus caras semejantes dispuestas en el mismo órden, formando ángulos diedros iguales.

2° Que dos poliedros son semejantes cuando tirando respectivamente de sus ángulos sólidos homólogos planos que pasen por sus aristas, quedan compuestos de tetraedros semejantes dispuestos en el mismo órden.

3° Recíprocamente, los poliedros semejantes pueden descomponerse en pirámides semejantes, haciendo pasar planos por dos de sus ángulos homólogos y sus respectivas aristas.

FIGURAS SIMETRICAS.

648.—Dos puntos A y A' son *simétricos con respecto á un punto* o cuando las distancias o A y o A' son iguales. El punto o se llama *centro de simetría* [fig. 299].

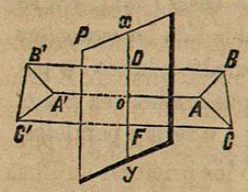


Figura 299.

Se dice que los puntos A y A' son *simétricos respecto á una recta ó eje de simetría* x y, cuando x y divide en dos partes iguales la recta A A' y le es perpendicular.

Los mismos puntos A y A' son *simétricos con respecto á un plano de simetría* P, cuando la recta A A' es perpendicular al plano P, y éste la divide en dos partes iguales.

Se llaman *figuras simétricas* respecto á *un centro*, á *un eje* ó á *un plano*, aquellas cuyos puntos son de dos en dos simétricos con relacion á este centro, á este eje ó á este plano.

649.—*Dos figuras simétricas con relacion á un eje son iguales.*

Si, por ejemplo, tenemos el triángulo A B C simétrico con A' B' C' é hiciéramos girar la parte A B C al rededor de D o F, cada uno de los puntos A, B, C coincidirá con sus simétricos A', B' y C' al girar 180°, supuesto que B D es perpendicular á D o F é igual á D B' sucediendo otro tanto con o A y F C respecto á o A' y á F C'.

650.—*La simetría con relacion á un punto ó á una recta, envuelve siempre la condicion de simetría con respecto á un plano.*

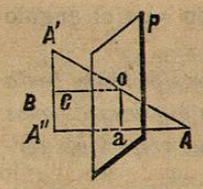


Figura 300.

En efecto, sean A y A' dos puntos simétricos con relacion al centro o (fig. 300). Hagamos pasar un plano P por o y tiremos B o perpendicular al plano. Vamos á demostrar que el punto A'', simétrico de A', con respecto al eje B O lo es igualmente de A con relacion al plano P.

Sea a el punto donde A A'' encuentra al plano P. Siendo C el medio de A' A'' y o el medio de A A', A A'' será paralela á o C (511), y por consiguiente perpendicular al plano P. La recta o a perpendicular á o C será paralela á A' A'', y como pasa por la mitad de A A', el punto a será igualmente el medio de A A''; luego los puntos A y A'' son simétricos con relacion al plano P.

Se ve, pues, por una parte, que la simetría de los puntos A y A' respecto á un centro, produce la simetría respecto á un plano, y por otra que la simetría de A'' y A' con relacion á un eje B o, envuelve igualmente la simetría respecto al plano entre A'' y A. Ahora, como lo que se ha probado de un punto es aplicable á todos los de una figura, resulta que nos bastará ocuparnos de la simetría con relacion á un plano.

651.—*Si tres puntos A, B y C* (fig. 301) *están en línea recta, sus simétricos A', B' y C' con relacion á un plano lo estarán igualmente.*

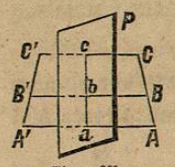


Figura 301.

Las rectas A A', B B' y C C', por ser perpendiculares al plano P, serán paralelas, y por pasar por la recta A B C determinan un plano cuya interseccion con P es la recta a b c. Si se hiciera girar A B C al rededor de a c por ser perpendiculares á c a é iguales las rectas C c y c C', b B y b B', a A y a A', los puntos A, B y C caerian sobre A', B' y C', y estando los primeros en línea recta, se infiere que tambien lo estarán sus simétricos.

652.—En consecuencia, *para que dos rectas sean simétricas, basta que lo sean dos de sus puntos.*

653.—Se deduce tambien (651) *que la distancia de dos puntos es igual á la de sus simétricos.*

654.—*Cuando cuatro puntos A, B, C y D* (fig. 302) *están en un mismo plano, sus simétricos A' B' C' y D' tambien estarán en un plano.*

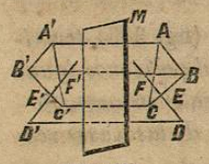


Figura 302.

Tiremos la recta D F que encuentre á B C y á C A en E y en F. Estando D, E y F en línea recta lo estarán igualmente sus simétricos D', E' y F'; pero E' como simétrico de E estará sobre la recta B' C' y F' sobre A' C', luego D' que pertenece á la

recta E' F' tendrá que estar sobre el mismo plano que el ángulo B' C' A', que es lo que se debia demostrar.

655.—*De esto resulta que, para que dos planos sean simétricos basta que lo sean tres de sus puntos respectivamente, y para que dos polígonos ó poliedros sean simétricos, es suficiente que lo sean sus respectivos vértices.*

656.—*Los triángulos, así como los ángulos simétricos, son iguales.*

En efecto, en la figura 302 se tiene: A B=A' B', B C=B' C', y A C=A' C', luego los triángulos A B C y A' B' C' serán iguales.

Ademas de la igualdad de los triángulos resulta que los ángulos simétricos son iguales: A C B=A' C' B', C A B=C' A' B', etc.

657.—*Dos poliedros simétricos tienen todas sus partes respectivamente iguales.*

Las caras correspondientes serán iguales, porque pueden descomponerse en triángulos simétricos y por lo mismo iguales. Si se consideran tres aristas de un poliedro y sus correspondientes del otro, por una parte por ser simétricas serán iguales, y por otra los ángulos simétricos que forman tambien lo serán. Siendo iguales los ángulos planos, lo serán los diedros de los triedros en que pueden descomponerse los poliedros. Esto es, serán respectivamente iguales sus aristas, sus caras, sus ángulos diedros y los triedros de que están formados.

SUPERFICIES DE LOS CUERPOS.

658.—*Se llama prisma á un cuerpo ó poliedro A c* (fig. 303) *terminado por superficies planas, siendo las bases A D y a d polígonos iguales y paralelos, y las caras laterales A b, B c.... paralelógramos, formado cada uno de ellos por los lados A B y a b.... de las bases respectivamente iguales.*

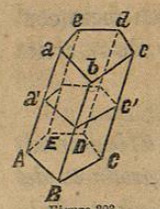


Figura 303.

El prisma puede considerarse engendrado por el movimiento de una recta A a que constantemente permanece paralela á sí misma y uno de sus extremos A recorre el polígono A B C D E.

Las rectas A a, B b.... se llaman aristas laterales, y las A B, B C....a b, b c.... aristas de las bases.

Altura del prisma es la distancia de sus bases. Un prisma es *recto* ú *oblícuo*, segun que sus aristas son perpendiculares ú oblícuas con relacion á sus bases. Se dice que es *triangular cuadrangular, pentagonal....* cuando su base es un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono....

Se llama *prisma regular* el que ademas de ser recto, tiene por base un polígono regular.

Todas las caras laterales de un prisma son paralelógramos, puesto que segun la definicion de prisma a b=A B y paralelas (450).

Las bases A D y a d, y las secciones como a' c' paralelas á éstas, son iguales, supuesto que por una parte son iguales los lados de los polígonos de estas secciones y por otra lo son sus ángulos por estar formados por lados paralelos (616).

Un prisma queda completamente determinado cuando se conoce la posicion y magnitud de su base y de una arista.

659.—*La área lateral de un prisma oblícuo es igual al producto de una de sus aristas A* a *por el perímetro de la seccion* a' b' c' d' (figura 304) *perpendicular á ésta.*

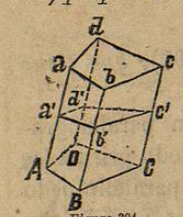


Figura 304.

El área lateral del prisma es igual á la suma de las áreas de las caras laterales que lo forman; pero como estas caras son paralelógramos, la superficie de cada una es igual al producto de su base por su altura. Las bases de los paralelógramos son las aristas del prisma, que todas son iguales á A a, y sus alturas son los lados de la seccion a' b' c' d' que por ser perpendicular á una de ellas lo será á todas las demas. Así es que haciendo la suma de las áreas de los paralelógramos, resulta que la área lateral del prisma es igual al producto de una de sus aristas por el perímetro de la seccion que le es perpendicular.

660.—*La área lateral de un prisma recto es igual al producto de su arista por el perímetro de su base.*

Porque en el caso de ser recto el prisma, la seccion perpendicular á su arista es la de su base. De otro modo, si en la figura 304 la porcion de prisma a' c la colocáramos en la parte inferior haciendo coincidir las

bases iguales a c con A C, el prisma oblícuo se convierte en recto conservando la misma área lateral, cuyo valor es el producto de su arista por el perímetro de su nueva base a' b' c' d'.

661.—*La área total de un prisma cualquiera es igual á la lateral, más la de sus bases. La total de uno regular es igual al producto del perímetro de su base por la suma de su arista con el radio recto de la base.*

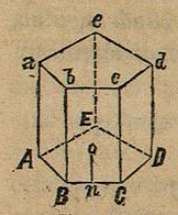


Figura 305.

La primera parte no necesita demostracion.

Si llamamos A la área total del prisma regular A d [fig. 305], p el perímetro A B C D E de la base, y r el radio recto o n de este perímetro, tendrémos:

$$A = A a \times p + 2. p \times \tfrac{1}{2} r = p (A a + r)$$

que es lo que se debia demostrar.

662.—*La área de un trozo de prisma A d* (fig. 306) *es igual á la suma de las áreas de sus caras.*

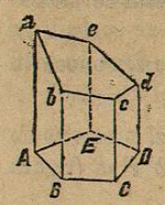


Figura 306.

Se llama trozo de prisma la parte de un prisma comprendido entre una de las bases A D y la seccion hecha por un plano a d que no es paralelo á la base.

663.—*Se llama paralelipípedo un prisma. A c* (fig. 307), *que tiene por base un paralelógramo.*

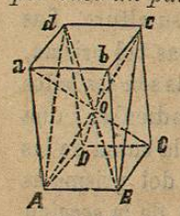


Figura 307.

En este cuerpo las caras opuestas son paralelógramos iguales y paralelos. En efecto, en todo prisma las bases A C y a c son iguales, pero por ser paralelipípedo el sólido serán paralelógramos. Las caras laterales son paralelógramos, y para persuadirse de que son iguales y paralelas por ej. las caras A b y D c, basta observar que los lados del ángulo A B b son respectivamente iguales, y paralelos á los del D C c (446). Lo mismo se verifica con las caras B c y A d por razon del paralelismo é igualdad de las rectas de los ángulos b B C y a A D.

Recíprocamente, *todo cuerpo compuesto de seis caras paralelas de dos en dos, es paralelipípedo.*

Por ser a c paralela á A C, será la recta a b paralela á A B. Por ser

B c paralela á A d, será B b paralela á A a; luego la cara A b será paralelógramo; pudiendo demostrarse igualmente que lo son todas las demás.

Un paralelipípedo está completamente determinado cuando se conoce uno de sus triedros A y la posicion y magnitud de las tres aristas que lo forman. Cualquiera de sus caras puede tomarse por base.

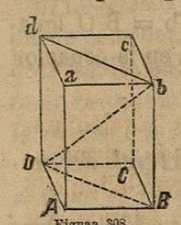
664.—*La seccion A B c d que determina el plano que pasa por dos aristas A B y d c opuestas de un paralelipípedo, es un paralelógramo.*

Siendo a b respectivamente igual y paralela á A B y á d c, A B y d c serán iguales y paralelas (602), y por lo mismo la figura A c será paralelógramo (450).

665.—*Las diagonales A c, B d, a C y b D* (fig. 307) *de un paralelipípedo, se cortan en partes mútuamente iguales y en el mismo punto o.*

Por ser la seccion A B c d un paralelógramo, las diagonales A c y B d se cortarán en partes mútuamente iguales en el punto o (451). Si consideramos ahora la seccion D A b c hecha por las aristas opuestas D A y b c, resulta que la diagonal A c de este nuevo paralelógramo, debe ser cortada por la D b en dos partes iguales, y por lo mismo tendrá que pasar por el mismo punto o, y como otro tanto puede demostrarse respecto á la diagonal a C, resulta que las cuatro diagonales se cortan en partes mútuamente iguales en el punto o.

666.—*Cuando la base A C* (fig. 308) *de un paralelipípedo es un rectángulo, y además las aristas laterales son perpendiculares á las bases, se dice que el paralelipípedo es rectangular.*



Figuaa 308.

En este caso todas las caras son rectángulos, y cada una de las aristas es perpendicular á las que pasan por sus extremos, así como á los planos sobre que cae.

Un paralelipípedo recto A c queda dividido en dos prismas triangulares iguales A B D a y C B D c por un plano d b B D que pasa por las diagonales d b y D B de sus bases.

En efecto si hiciéramos coincidir las aristas iguales A a y C c, siendo las tres caras que forman el triedro C respectivamente iguales á las caras que forman el triedro A (632—3°) estos triedros coincidirian. Por la misma razon el triedro c coincidiria con el a, y siendo comun á los dos prismas triangulares la cara d b B D, se infiere que serán iguales los prismas triangulares A B D a y C B D c.

667.—*El cuadrado de la diagonal D b* (fig, 308) *de un paralelipípedo rectangular, es igual á la suma de los cuadrados de las tres aristas que forman uno de sus triedros.*