Por ser rectángulo en B el triángulo b D B se tiene:

$$D\,b^2 = B\,b^2 + D\,B^2 \ldots. \quad (1)$$

siendo el triángulo D A B rectángulo en A, se tiene:

$$D\,B^2 = D\,A^2 + B\,A^2 \ldots. \quad (2)$$

sustituyendo en la ecuacion (1) y reemplazando por D A su igual B C resulta:

$$D\,b^2 = B\,b^2 + B\,C^2 + B\,A^2 \ldots. \quad (3)$$

que es lo que se debia demostrar.

Como las aristas de los triedros son respectivamente iguales, resulta que en el paralelipípedo rectangular las diagonales son iguales, además de verificarse en él las propiedades de los prismas y de los paralelipípedos en general.

668.—*Se llama cubo un paralelipípedo rectángular cuyas seis caras* (fig. 309) *son cuadrados.*

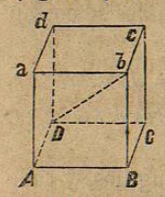

Figura 309.

En el cubo las caras son todas iguales entre sí, así como sus doce aristas. Las caras y las aristas son respectivamente perpendiculares. La gran simetría del cubo ha hecho que se le tome para unidad de volúmen en los cuerpos.

Siendo las aristas del cubo A B = B b = B C iguales entre sí, introduciendo estos valores en la ecuacion (3) del párrafo anterior resulta:

$$D\,b^2 = 3\,A\,B^2$$

esto es, *en el cubo el cuadrado de su diagonal es igual al triple del cuadrado de una de sus aristas.*

669.—*Se llama superficie de revolucion la que puede concebirse engendrada por una línea, recta ó curva, A C B D* (fig. 310) *que gira al rededor de una recta A B que le sirve de eje.*

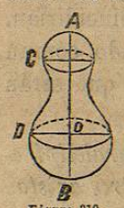

Figura 310.

El carácter distintivo de esta clase de superficies, es, que sea cual fuere la línea generatriz A C D B, cualquier plano perpendicular al eje produce por su interseccion una circunferencia de círculo. En efecto, una recta cualquiera D o perpendicular al eje, describirá un plano perpendicular al eje, y como la distancia o D permanece fija, el punto D trazará una circunferencia de círculo.

670.—*Se llama cilindro un prisma cuyas bases paralelas A B y a b* (fig. 311) *son círculos.*

Aunque las bases pueden ser otras curvas, en la geometría elemental no se considera sino el cilindro de base circular.

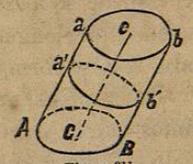

Figura 311.

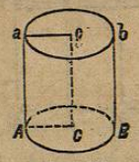

Figura 312.

La línea C c que une los centros de las bases, se llama *eje del cilindro.* Cuando el eje no es perpendicular á las bases del cilindro, se llama *oblícuo,* y cuando el eje es perpendicular á las bases (fig. 312) *el cilindro es recto.* La *altura* de un cilindro es la distancia de sus bases.

Lo mismo que un prisma, el cilindro puede concebirse originado por el movimiento de una recta A a paralelamente al eje, y de la que uno de sus extremos recorre una circunferencia de círculo. De esto resulta que cualquiera seccion paralela á las bases produce un círculo igual á éstas.

El cilindro recto (fig. 312) puede concebirse engendrado por la rotacion de un rectángulo A c al rededor de uno de sus lados C c, que viene á ser el eje del cilindro.

671.—Como el cilindro es un prisma de base circular, y el círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, resulta que *la área lateral del cilindro oblícuo es igual al producto de su generatriz A a* (fig. 311) *por la longitud de la curva a' b' de la seccion que le es perpendicular.* (659)

672.—Por la misma consideracion *la área lateral del cilindro recto es igual al producto de su altura por la circunferencia del círculo de su base.*

Si llamamos s la área lateral del cilindro, r el rádio de su base, h su altura y π la razon de la circunferencia al diámetro igual á 3'141593, la expresion del área lateral del cilindro recto será:

$$S = 2\,\pi\,r\,h$$

673.—*La área total de un cilindro es igual á la lateral mas la de sus dos bases.*

La área total del cilindro recto tendrá en consecuencia por expresion:

ó $$S = 2\pi r h + 2\pi r^2$$
$$S = 2\pi r (h + r)$$

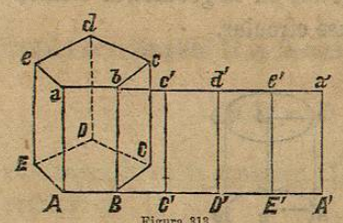

Figura 313.

674.—Si en el prisma A d [figura 313] concebimos que la cara B c gira al rededor de la arista B b hasta colocarse en la prolongacion del plano de la cara A b se formará el rectángulo A c'. De la misma manera, si nos imaginamos que la cara E a gira al rededor de E e hasta ponerse en el plano de e D, en seguida que las dos caras se colocaran en el plano de c D, y las tres caras girando sobre C c se pusiesen en el plano de C b, y girando por último todo el sistema al rededor de B b se colocara en la prolongacion del plano de la primera cara A b, resultaria la superficie lateral del prisma tendida en plano é igual al rectángulo A a'. Las partes que componen este rectángulo son respectivamente iguales á las que forman la área lateral del prisma. La área de este rectángulo es equivalente á la lateral del prisma, pues una y otra tienen por valor el producto de la arista A a por A A' que es el perímetro de la base.

La figura A a a' A' se llama el *desarrollo* de la superficie lateral del prisma A d.

Igualmente el *desarrollo* de un cilindro recto es un rectángulo cuyas bases son las circunferencias del cilindro, y su altura la de este cuerpo.

La superficie lateral de un cilindro oblícuo A b [fig. 314] tambien puede desarrollarse en plano. Para esto tirarémos la recta a' a' igual a

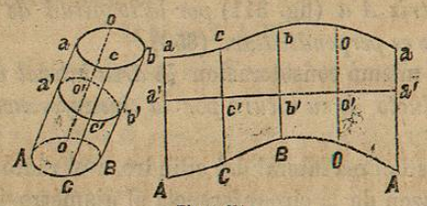

Figura 314.

la curva que daria la seccion hecha perpendicularmente á la generatriz A a, que es a' c' b' o' a'; sobre esta recta se llevarán las partes a' c', c' b'.... respectivamente iguales á las partes de la curva rectificadas a' c', c' b'....; por los puntos de division a', c'.... se levantarán perpendiculares y sobre ellas se llevarán las partes a' a=a' a de la generatriz, a' A =a' A, c 'c = c' c, c' C = c, C.... y se tendrá la área A a'' ter-

minada por dos curvas paralelas, que será el desarrollo de la superficie lateral del cilindro oblícuo.

675.—*La área total de una pirámide S A D* [fig. 315] *es igual á la suma de las áreas de los triángulos que forman sus caras y la del polígono A B C D.... de su base.*

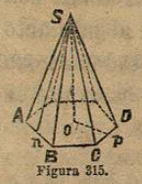

Figura 315.

676.—*La área lateral de una pirámide regular S A D* (fig. 315) *tiene por valor la mitad del producto del perímetro de su base por el apotema S n.*

Se llama *apotema, la altura S n de uno de los triángulos de las caras de la pirámide.* Cuando ésta es regular, su base es un polígono regular y su altura S o es una perpendicular que cae en el centro de la base. De esto resulta que las caras de una pirámide regular son triángulos iguales, pues por una parte sus bases A B, B C.... son lados de polígono regular, y por otra los lados S A, S B.... son oblícuas que se separan igualmente del pié de la perpendicular. Las alturas de estos triángulos son todas iguales á S n.

Así, pues, la área lateral de la pirámide será igual á

$$\tfrac{1}{2} S n (A B + B C + \ldots.)$$

y si llamamos s esta área, el apotema S n=A, y p el perímetro A B C D de la base, se tendrá:

área lateral de la pirámide $= s = \frac{1}{2} p A$.

Para obtener la área total de la pirámide, á la lateral debemos agregarle la del polígono de la base que tiene por valor $\frac{1}{2}$ p. r, llamando r el radio recto o p. Así, pues,

área total de la pirámide $= S = \frac{1}{2} p A + \frac{1}{2} p r$
ó ,, ,, ,, $= S = \frac{1}{2} p (A + r)$

677.—Se llama *trozo de pirámide la parte de una pirámide comprendida entre la base A D y la seccion hecha por un plano a d* (fig. 316) *que le es paralelo.*

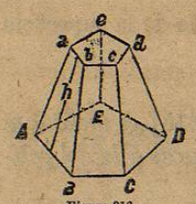

Figura 316.

La área lateral de un trozo de pirámide recta tiene por valor el producto de la altura h de una de sus caras por la semisuma de los perímetros de sus bases.

Las caras del trozo son trapecios iguales, cuyas alturas todas son iguales á h, y como la área de cada trapecio (565) es igual al producto de su altura por la semisuma de las bases A B + a b, la de todo el trozo tendrá por medida el producto de la altura de una de las caras por la semisuma de los perímetros A B C.... + a b c de sus bases.

678.—Se llama *cono una pirámide S A B* (fig. 317) *cuya base es un círculo.*

Aunque la base puede ser una curva cerrada cualquiera, en la geometría elemental sólo se considera el cono de base circular.

La recta S o que une el vértice con el centro de la base, se llama *eje* del cono, que *es recto* cuando el eje es perpendicular á la base, y *oblícuo* en el caso contrario. *Altura* del cono es la perpendicular bajada del vértice sobre la base.

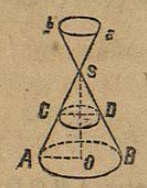

Figura 317.

El cono puede concebirse originado por el movimiento de una recta S A sujeta á pasar constantemente por un punto S y recorrer con el otro extremo la circunferencia A B, la cual traza otra capa cónica superior S a b que rara vez se considera. Cuando el cono es recto, como en la figura 317, puede considerarse engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo S o A girando al rededor de uno de sus catetos S o. Por esta razon (669) cualquiera seccion C D hecha paralelamente á la base en el cono, produce un círculo.

679.—*La área lateral del cono recto tiene por valor la mitad del producto de su generatriz S A por la circunferencia de la base.*

Esto resulta de que el cono es una pirámide cuya base es un polígono regular de una infinidad de lados (676). Si llamamos A el lado S A del cono, y r el radio A o de su base, tendrémos:

$$\text{área lateral del cono} = s = \pi\, r\, A.$$

Para obtener la área total debemos agregar la del círculo de la base, por lo que

$$\text{área total del cono} = S = \pi\, r\, A + \pi\, r^2 = \pi\, r\, (A + r)$$

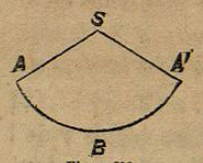

Figura 318.

La área lateral de un cono recto puede desarrollarse en plano, y es un sector de círculo S A B A' (fig. 318) *cuyo rádio es la generatriz S A de la figura 317, y el arco A B A' es igual á la circunferencia de la base.*

En efecto, basta concebir cortada la superficie lateral del cono segun una de sus generatrices S A, para comprender que al extender esta superficie se formaria un sector, supuesto que por una parte todas las generatrices vienen á concurrir al punto S, y por otra todos los puntos de la circunferencia de la base conservan una distancia igual á S A al vértice S. Además, la área del sector (570) y la lateral del cono tienen por valor la misma expresion, pues ambos son iguales á $\frac{1}{2}$ S A × A B A'.

Para determinar el número de grados del ángulo A S A', observarémos que la longitud del arco A B A' que le sirve de medida, es la de la circunferencia del círculo O (fig. 317) base del cono. Por consiguiente conservando las anotaciones de A para el lado S A del cono, y *r* para el radio A O de la base; y representando por *x* el número de grados del ángulo A S A', tendrémos:

longitud del arco A B A' $= 2\,\pi\, r$

Por otra parte, conocida esta longitud, se determinará el número de grados del arco A B A' por la proporcion:

circf. A S : arco A B A' :: 360° : x

$$2\,\pi\, A : 2\,\pi\, r :: 360^\circ : x^\circ = \frac{r.\ 360^\circ}{A}$$

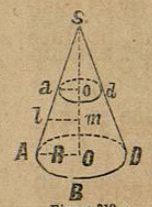

Figura 319.

680.—*La área lateral del trozo de cono recto A D b a* (fig. 319) *tiene por valor el producto de su generatriz A a por la semisuma de las circunferencias de sus bases A D y a b.*

Aun cuando esto es una consecuencia de lo que dejamos probado en el número 677, lo demostrarémos directamente.

Llamemos R el radio de la base inferior cuya circunferencia es $2\,\pi$ R, r el radio de la base superior cuya circunferencia es $2\,\pi$ r, y l el lado A a del tronco. La área lateral que buscamos es igual á la del cono S A D ménos la del cono S a b. Representándola por T tendrémos [679]

$$T=\pi R.\ SA-\pi r.\ Sa \ldots [1]$$

$$SA=l+Sa \text{ y } SA-Sa=l$$

sustituyendo $T=\pi R\ (l+Sa)-\pi r\ Sa=\pi R l+\pi Sa\ (R-r) \ldots [2]$

Vamos á determinar el valor de S a en funcion de los radios y de l para sustituirlo en esta ecuacion. Comparando los triángulos semejantes S A O y S a o, se tiene:

$$R : r :: SA : Sa$$

Dividiendo $\quad R-r : r :: SA-Sa : Sa=\dfrac{r l}{R-r}$

sustituyendo en la ecuacion [2]

$$T=\pi R l+\frac{\pi r l}{R-r}[R-r]$$

reduciendo y sacando l como factor comun, se tiene por último:

$$T=l\,[\pi R+\pi r] \ldots [3]$$

que es lo que se debia demostrar.

Considerando el trapecio a o O A [459], en el que l es el medio de A a, se tiene: $\quad l\,m=\frac{1}{2}\,[R+r]$

multiplicando por 2π $\quad 2\pi.\ l\,m=\frac{1}{2}\,[2\pi R+2\pi r]$

$$2\pi.\ l\,m=\pi R+\pi r$$

sustituyendo en la ecuacion [3] resulta:

$$T=l\times 2\pi.\ l\,m$$

Esto es, *la área lateral del trozo de cono recto tiene por valor el producto de su lado por la circunferencia del círculo tirado á distancias iguales de sus bases.*

681.—*Se llama esfera un cuerpo A O B N* [fig. 320] *limitado por una superficie curva cuyos puntos todos están á igual distancia de uno interior C llamado centro.*

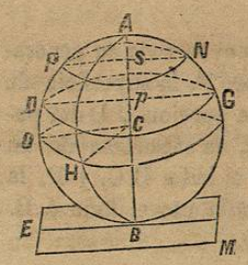

Figura 320.

La esfera puede considerarse engendrada por la revolucion de un semicírculo A D B al rededor de su diámetro A B. Cuando se corta la esfera por un plano que pasa por su centro C, se produce un círculo A O B N que se llama *círculo máximo. Todos los círculos máximos de una esfera son iguales,* porque todos tienen por rádio el de la esfera. De esto resulta que la esfera puede considerarse engendrada por la revolucion de cualquiera de sus círculos máximos.

Un plano, sea cual fuere su direccion, corta la esfera segun un círculo. Si este plano fuera por ejemplo F N, levantando el diámetro A B perpendicular, podria suponerse la esfera engendrada por el semicírculo A F O B girando al rededor de este eje A B, y por consiguiente (669) la seccion hecha por un plano perpendicular al eje, tiene que ser un círculo.

Todo círculo, cuyo centro no coincide con el de la esfera, trazado en su superficie, se llama círculo menor. F N y D G son círculos menores.

Se llama zona la parte de la superficie de la esfera F D G N comprendida entre dos circunferencias, cuyos planos son paralelos.

Se llama casquete esférico, ó zona de una base, la parte de la superficie de la esfera F N A limitada por una circunferencia F N.

682.—Se llama *plano tangente á la esfera el que, como M* (fig. 320), *no tiene mas que un punto B de contacto con ella.*

Como toda recta diversa de C B tirada del centro de la esfera al plano, tiene que ser mayor que su rádio, resulta que el rádio C B es la menor distancia del centro al plano, y por consiguiente le es perpendicular. Recíprocamente, todo plano M perpendicular al extremo de un radio C B será tangente á la esfera, porque debiendo ser cualquiera oblícua mayor que la perpendicular C B, el plano M no podrá tener mas que el punto B de contacto con la esfera.

Si se hace girar un círculo y su tangente B E al rededor del diámetro A B perpendicular á la tangente, se engendrará la esfera y un plano tangente al punto B, porque este plano M es perpendicular al radio C B.

683.—*Cuando un polígono regular A B C....* (fig. 321) *gira al rededor del diámetro A O del círculo inscrito, engendra una superficie que tiene por medida el producto de la circunferencia del círculo inscrito por la proyeccion de la parte del perímetro que se considera sobre el eje A O de revolucion.*

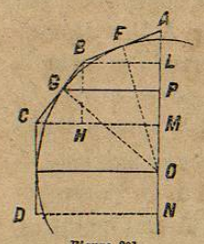

Figura 321.

Para demostrar este principio en toda su generalidad, consideraremos tres casos: 1°, la superficie de un cilindro engendrada por una porcion C D del polígono paralela al eje A O; 2°, la superficie de un trozo de cono engendrada por el lado B C, y 3°, la superficie de un cono engendrada por el lado A B.

1° La superficie del cilindro originado por la rotacion de C D tiene por valor (672): circf. D N×C D y sustituyendo sus iguales: circunferencia G O×M N, que es lo que expresa el principio que vamos demostrando.

2° La superficie de trozo de cono engendrado por la rotacion de B C al rededor del eje tiene por medida (680):

$$C\,B \times \text{circf. } G\,P \ldots. \quad (1)$$

Comparando los triángulos C B H y G O P que son semejantes por tener sus lados perpendiculares, se tiene:

$$C\,B : B\,H :: G\,O : G\,P$$
$$G\,O : G\,P :: \text{circf. } G\,O : \text{circf. } G\,P$$
luego $$C\,B : L\,M :: \text{circf. } G\,O : \text{circf. } G\,P$$

formando el producto de extremos y medios

$$C\,B \times \text{circf. } G\,P = \text{circf. } G\,O \times L\,M$$

y como el primer miembro de esta ecuacion es la área lateral del trozo de cono, se ve que esta segun lo expresado en el segundo miembro tiene por valor igualmente lo que indica el principio que venimos demostrando:

3° La superficie del cono engendrado por la rotacion de A B al rededor del eje tiene por valor (679):

$$\tfrac{1}{2}\,\text{circf. } B\,L \times A\,B \ldots. \quad (2)$$

Comparando los triángulos A B L y A O F que son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo A B L=A O F cuyos lados son perpendiculares, se tiene:

$$A\,L : A\,F :: B\,L : F\,O$$
$$B\,L : F\,O :: \text{circf. } B\,L : \text{circf. } F\,O$$
luego: $$A\,L : A\,F :: \text{circf. } B\,L : \text{circf. } F\,O$$

formando el producto de los medios y de los extremos

$$\text{circf. } B\,L \times A\,F = \text{circf. } F\,O \times A\,L$$
sustituyendo $$\text{circf. } B\,L \times \tfrac{1}{2}\,A\,B = \text{circf. } G\,O \times A\,L$$

Expresando el primer miembro la área del cono, se ve que tiene por valor igualmente lo que indica el segundo miembro de la ecuacion, que es la expresion algebráica del teorema que venimos demostrando.

En consecuencia, cualquiera que sea la posicion del lado del polígono generador de la superficie, el valor de ésta se determina por la regla que hemos demostrado.

684.—Cuando el polígono regular tiene un número infinito de lados la superficie que engendra es la de la esfera, y por medio del principio del párrafo anterior, podremos determinar la área de este cuerpo y la de sus diversas partes.

Si llamamos R el radio de la esfera, y la altura s p de la zona F D G N (fig. 320) la representamos por h, tendremos:

área de la zona esférica $= s = 2\,\pi\,R.\,h$

En el casquete esférico si representamos por a su altura s A, tendremos:

área del casquete esférico $= s = 2\,\pi\,R.\,a$

Como la área de la esfera es la suma de las áreas de las diversas zonas y casquetes que la forman, y la suma de las proyecciones de todas las partes del semicírculo generador sobre el eje es el diámetro, resulta que

la área de la esfera $= S = 2\,\pi\,R. = 4\,\pi\,R^2$

luego la superficie de la esfera es cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos.

Si por R ponemos su valor $\frac{D}{2}$, llamando D al diámetro, tendremos por expresion del área de la esfera:

$$S = \pi\,D^2$$

Se llama *huso á la porcion de la superficie de la esfera* A O B H A (fig. 320) *comprendida entre dos semicírculos máximos que terminan en el mismo diámetro* A B. Si desde el centro C de la esfera se tiran los radios C O y C H perpendiculares al diámetro comun A B, *el ángulo* O C H, que mide el ángulo diedro de los dos semicírculos que limitan el huso, *se llama ángulo del huso.*

Si el arco O H, medida del ángulo del huso, se divide en dos partes iguales y por el punto de division se tira un semicírculo que pase por A B, resultará un huso que será la mitad del primero por ser sobreponibles las porciones de la esfera de que están formados. Si el arco O H se divide en tres, cuatro ó más partes iguales, el huso quedará dividido igualmente en tres, cuatro ó más partes iguales entre sí. En consecuencia, *las superficies de los husos son proporcionales á sus ángulos, ó á los arcos que los miden.*

Si comparamos la superficie del huso con la de la esfera, tendremos: sup. huso A O B H : sup. esfera :: arco O H : circf. círc. máximo luego, *la superficie de un huso es igual á la de la esfera multiplicada por la relacion que existe entre el número de grados del ángulo del huso y* 360°

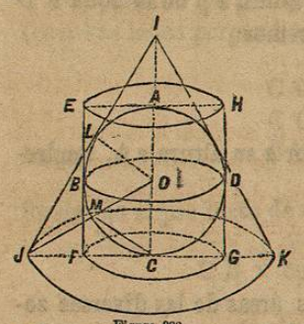

Figura 322.

685.—Si al círculo A B C D [fig. 322] circunscribimos un cuadrado E F G H y un triángulo equilátero I J K y suponemos que este sistema gira al rededor del eje I A C, resultará una esfera inscrita á un cilindro y á un cono, y vamos á determinar la relacion que existe entre la superficie de la esfera y las del cilindro y cono circunscritos á ella.

Llamando R el radio B O de la esfera, hemos visto ya que:

1° el área de la esfera $= S = 4 \pi R^2$.

Respecto al cilindro [672] tenemos:

2° área lateral del cilindro $= S' = 2 \pi R \times 2 R = 4 \pi R^2$

3° área total del cilindro $= S'' = 4 \pi R^2 + 2 \pi R^2 = 6 \pi R^2$. [673]

Para determinar la área del cono vamos á comenzar por establecer el valor del rádio de su base J C, que por razon del triángulo equilátero es la mitad de su lado I J, en funcion del rádio de la esfera. Siendo equilátero el triángulo que engendra el cono, el ángulo I J K vale 60° [465], y como los triángulos O L J y O C J son iguales, el ángulo

O J C vale 30°, y el J O C, que es su complemento valdrá 60°. Tirando la cuerda C M, ésta será igual al radio [497], y nos resulta el triángulo equilátero O M C en el que el ángulo O C M = 60°. Si del ángulo recto O C J se resta el O C M, queda el ángulo M C J = 30°. De consiguiente el triángulo M C J será isósceles, por tener iguales los ángulos M J C y M C J, y por tanto M J = M C = R. Por último se tendrá, J O = 2 R.

Considerando el triángulo rectángulo J O C, se tiene:

$$J C^2 = J O^2 - O C^2$$

y sustituyendo $\quad J C^2 = 4 R^2 - R^2 = 3 R^2$

por otra parte $\quad 2 J C = J I$

Ahora bien: la área total del cono [679] es

$$S''' = \pi J C [2 J C + J C] = 3 \pi J C^2$$

y sustituyendo $\quad S''' = 9 \pi R^2$

En resúmen: el área de la esfera $= 4 \pi R^2$
la lateral del cilindro $= 4 \pi R^2$
la total del cilindro $= 6 \pi R^2$
y la total del cono $= 9 \pi R^2$

De lo que resulta: 1° que la área de la esferra es igual á la lateral de cilindro circunscrito; 2° que es los dos tercios de la total del mismo cilindro; 3° que es los cuatro novenos de la total del cono circunscrito; y 4° que la área del cilindro es media proporcienal entre la de la esfera y la del cono, supuesto que

$$6 \pi R^2 = \sqrt{4 \pi R^2 \times 9 \pi R^2}$$

686.—*Las áreas de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Llamemos s, s', s''.... las áreas de las caras de un poliedro, y S, S', S''.... las de su semejante: l, l', l''.... las líneas del primer poliedro, y L, L', L''.... las líneas homólogas en el segundo. Se tiene [579]:

$$s : S :: l^2 : L^2 \qquad s' : S' :: l'^2 : L'^2 \text{ etc.}$$

Por ser las caras semejantes, tendremos: