DAD
CIÓN

QA39
C6
c.1



EX LIBRIS
HEMETHERII VALVERDE TELLEZ
Episcopi Leonensis



UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

QA39
C6

Capilla Alfonsina
Biblioteca Universitaria

OPINIONES publicadas sobre las Matemáticas del Ingeniero Manuel María Contreras.

47330

Los que suscribimos certificamos:

1.° Que el profesor D. Manuel María Contreras escribió su Tratado de Matemáticas por encargo del Director de la Escuela Nacional Preparatoria, con el objeto de satisfacer debidamente el programa del actual plan de estudios.

2.° Que el original de su Aritmética fué examinado por los CC. profesores Gabino Barreda, Francisco Diaz Covarrubias, Rafael A. de la Peña, é Ignacio Ortiz de Zárate; que el de su Algebra, lo fué por los profesores Manuel Fernández Leal y Luis del Castillo, y que los de su Geometría y Trigonometría lo fueron por los profesores Manuel Ramirez y Francisco Echeagaray, quienes unánimemente los consideraron buenos y adecuados á la enseñanza.

3.° Que la junta general de catedráticos de dicha Escuela ha ratificado esa calificación y los ha aceptado como obras de texto.

4.° Que las modificaciones que la experiencia ha indicado y hemos propuesto al autor las ha adoptado, y que seguirá haciendo algunas otras en las posteriores ediciones, con el fin de ir sucesivamente facilitando y mejorando la enseñanza de los alumnos, y

5.° Que con el uso de los mencionados tratados de Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría, hemos obtenido durante varios años, muy buenos resultados en la instrucción de nuestros discípulos, tanto en las clases del gobierno como en las particulares.

México, Octubre 16 de 1878.—*M. Fernández.—M. Ramírez.—M. Calderón.—A. Barroso.—F. Echeagaray.—J. Vallarino.—Rafael Barba.—M. Villamil.—Rafael Angel de la Peña.—Emilio G. Baz.—Luis del Castillo y Pacheco.—Ignacio Ortiz de Zárate.*

Del anterior documento resulta, pues, que las obras de Matemáticas del Sr. Contreras, no sólo fueron examinadas y declaradas buenas por

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
Biblioteca Valverde y Tellez
011157

FONDO EMETERIO
VALVERDE Y TELLEZ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

personas competentes, sino que con el uso de ellas durante algunos años, se han obtenido buenos resultados en la enseñanza.

Suplicamos á nuestros colegas, se sirvan reproducir el anterior certificado, en honor de una persona que como el Sr. Contreras, coopera con empeño á la instrucción de la juventud.

(*Diario Oficial*, Octubre 26 de 1878.)

Señores redactores de *La Libertad*:

Agradeceremos mucho á vdes. se sirvan publicar en su acreditado diario el certificado siguiente:

Los que suscriben, antiguos profesores de la Escuela Nacional de Agricultura y Veterinaria certifican: que durante los años de 1875 y 1876 han dado la clase de primer curso de Matemáticas siguiendo como obra de texto la del Sr. Ingeniero Manuel María Contreras, con notorio aprovechamiento de los alumnos, como consta por las calificaciones que obran en los libros respectivos de exámenes. Como constancia extendemos el presente en México, á 21 de Octubre de 1878.—*Manuel Cordero.*—*José C. Segura.*—*Vicente U. Alcaráz.*

Señores redactores de *La Libertad*:

Suplicamos encarecidamente á vdes. se sirvan insertar en su ilustrado diario el certificado adjunto:

Como directores de establecimientos de instrucción primaria y preparatoria en esta capital, certificamos: que en nuestros respectivos colegios y durante varios años, se han adoptado como obras de texto para la enseñanza de Matemáticas los tratados de Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría, escritos por el ingeniero Manuel María Contreras, y que con ellos se han obtenido buenos resultados en la instrucción y aprovechamiento de los discípulos.

México, Octubre 18 de 1878.—*Adrián Fournier*, director de. Liceo Franco-Mexicano.—*Ricardo Rode*, socio director del Rode's English Boarding School.—*Emilio Katthain.*—*A. Bracho.*—*Emilio G. Baz*, director del instituto Anglo-Franco-Mexicano.—*M. Soriano.*—*José Saturnino Yarza*, director del colegio Hispano-Mexicano.

(*La Libertad*, Octubre 22 y 31 de 1878.)

PRÓLOGO DE LA PRIMERA EDICIÓN.

Toda educación científica racional, se apoya en el estudio de las Matemáticas

Al publicar este tratado de primer curso de Matemáticas, que consta de Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría, debo indicar cuáles fueron las causas que me obligaron á emprender este trabajo y la manera con que lo he desempeñado.

A fines del año de 1868 fuí honrado con el nombramiento del Supremo Gobierno y con el voto de los profesores de la Escuela Nacional Preparatoria para dar la cátedra del primer año de Matemáticas; y habiendo creido el Señor Director D. Gabino Barreda que era no sólo conveniente, sino aun necesario formar un texto para la enseñanza del primer curso de Matemáticas; me encargó que lo escribiese conforme al programa de dicho plantel, en una forma accesible á los jóvenes de tierna edad, que sin más conocimientos que las primeras operaciones de Aritmética, se dedican á hacer los cursos preparatorios de instrucción profesional.

Aunque desde luego comprendí las dificultades de mi encargo, lo acepté porque era de mi deber corresponder á la confianza que de mí se había hecho, y porque como Profesor tenía la obligación de cooperar á plantear un sistema de enseñanza racional

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

y de utilidad práctica, como lo es el establecido por la actual ley de instrucción pública, y á allanar las dificultades con que los discípulos tropiezan en el estudio de las ciencias exactas.

Ningún medio he perdonado para formar un texto completo, claro y sencillo.

Después de leer las obras de varios autores semejantes á la mía, he consultado con otros profesores, y muy particularmente he hecho un estudio práctico al enseñar estas materias, para tratarlas en la forma más adecuada á su objeto. Esta obra la he escrito y corregido durante algunos años al dar mis lecciones, no sólo de acuerdo con el programa de la ley, sino muy especialmente con el fin de satisfacer las necesidades manifestadas por los discípulos.

Por último, para que este texto pudiera aceptarse en las Escuelas Nacionales como obra de asignatura, pasó por la prévia censura de una comisión de Profesores, y con este motivo me aproveché de las observaciones que se sirvieron comunicarme para introducir algunas mejoras.

La claridad y el orden han sido el objeto principal de mi trabajo, en el que, por estar destinado á servir de base á los demás estudios, he tenido que ocuparme desde las nociones más simples hasta los límites del programa. Algunos párrafos que, en mi concepto, no deben formar parte del curso de la Escuela Preparatoria, pero los cuales podrán leer con provecho los discípulos en su repaso, irán señalados con un asterisco.

A pesar de mi empeño y de mis esfuerzos, desconfío haber llenado satisfactoriamente la comisión que, por los motivos indicados, acepté; pues por una parte no he podido extenderme en una obra que debe ser elemental, y por otra no siempre es fácil tratar con claridad y concisión materias nuevas para alumnos que carecen de práctica en el estudio.

Si este trabajo llega á ser de alguna utilidad á la juventud, y si sirve para mejorar el sistema de enseñanza en México, quedarán satisfechos los deseos de

El Autor.

ELEMENTOS

DE

PRIMER CURSO DE MATEMÁTICAS.

ARITMÉTICA.

INTRODUCCIÓN Y SISTEMA DE NUMERACIÓN.

Definiciones de matemáticas y objeto de esta ciencia.—*Se llama Matemáticas, la ciencia que trata de la cantidad cuando es susceptible de medida. Su objeto es determinar las cantidades desconocidas, valiéndose de las relaciones que existen entre ellas y las conocidas, y enseñar los procedimientos más adecuados para obtener el resultado que se busca.*

Por ciencia se entiende el conocimiento de un sistema de verdades relativas todas á un objeto común.

Es indispensable que haya coordinación entre las verdades para constituir una ciencia, llamándose *teoría* al enlace que nuestra mente percibe entre las verdades ó hechos fundamentales de una ciencia y las que son sus consecuencias. El objeto de toda ciencia es poder prever lo desconocido, dándonos los medios más sencillos para deducir de las verdades conocidas otras nuevas.

Cantidad es todo lo que puede ser mayor ó menor, como el tiempo, la distancia, el peso de los cuerpos, etc.

Las matemáticas se ocupan de la cantidad únicamente cuando puede medirse. Así, el dolor y la alegría, por ejemplo, aunque son susceptibles de aumento ó disminución, no son objeto de las matemáticas, porque no es posible medir esas afecciones.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

y de utilidad práctica, como lo es el establecido por la actual ley de instrucción pública, y á allanar las dificultades con que los discípulos tropiezan en el estudio de las ciencias exactas.

Ningún medio he perdonado para formar un texto completo, claro y sencillo.

Después de leer las obras de varios autores semejantes á la mía, he consultado con otros profesores, y muy particularmente he hecho un estudio práctico al enseñar estas materias, para tratarlas en la forma más adecuada á su objeto. Esta obra la he escrito y corregido durante algunos años al dar mis lecciones, no sólo de acuerdo con el programa de la ley, sino muy especialmente con el fin de satisfacer las necesidades manifestadas por los discípulos.

Por último, para que este texto pudiera aceptarse en las Escuelas Nacionales como obra de asignatura, pasó por la prévia censura de una comisión de Profesores, y con este motivo me aproveché de las observaciones que se sirvieron comunicarme para introducir algunas mejoras.

La claridad y el orden han sido el objeto principal de mi trabajo, en el que, por estar destinado á servir de base á los demás estudios, he tenido que ocuparme desde las nociones más simples hasta los límites del programa. Algunos párrafos que, en mi concepto, no deben formar parte del curso de la Escuela Preparatoria, pero los cuales podrán leer con provecho los discípulos en su repaso, irán señalados con un asterisco.

A pesar de mi empeño y de mis esfuerzos, desconfío haber llenado satisfactoriamente la comisión que, por los motivos indicados, acepté; pues por una parte no he podido extenderme en una obra que debe ser elemental, y por otra no siempre es fácil tratar con claridad y concisión materias nuevas para alumnos que carecen de práctica en el estudio.

Si este trabajo llega á ser de alguna utilidad á la juventud, y si sirve para mejorar el sistema de enseñanza en México, quedarán satisfechos los deseos de

El Autor.

ELEMENTOS

DE

PRIMER CURSO DE MATEMÁTICAS.

ARITMÉTICA.

INTRODUCCIÓN Y SISTEMA DE NUMERACIÓN.

Definiciones de matemáticas y objeto de esta ciencia.—*Se llama Matemáticas, la ciencia que trata de la cantidad cuando es susceptible de medida. Su objeto es determinar las cantidades desconocidas, valiéndose de las relaciones que existen entre ellas y las conocidas, y enseñar los procedimientos más adecuados para obtener el resultado que se busca.*

Por ciencia se entiende el conocimiento de un sistema de verdades relativas todas á un objeto común.

Es indispensable que haya coordinación entre las verdades para constituir una ciencia, llamándose *teoría* al enlace que nuestra mente percibe entre las verdades ó hechos fundamentales de una ciencia y las que son sus consecuencias. El objeto de toda ciencia es poder prever lo desconocido, dándonos los medios más sencillos para deducir de las verdades conocidas otras nuevas.

Cantidad es todo lo que puede ser mayor ó menor, como el tiempo, la distancia, el peso de los cuerpos, etc.

Las matemáticas se ocupan de la cantidad únicamente cuando puede medirse. Así, el dolor y la alegría, por ejemplo, aunque son susceptibles de aumento ó disminución, no son objeto de las matemáticas, porque no es posible medir esas afecciones.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La medida ó valorización de una cantidad puede hacerse por métodos indirectos, y el conocimiento de éstos es uno de los principales objetos de la ciencia. Si aplicando una vara contra una pared se mide su altura, ésta será una operación mecánica y directa; pero si sin llegar á la pared determinamos su altura, el procedimiento tendrá que ser científico é indirecto. De esta valorización de las cantidades desconocidas por medios indirectos, se ocupa la ciencia, y el objeto final se obtiene por operaciones más ó menos complicadas, según sea la naturaleza de la cuestión, enseñando las matemáticas el medio más sencillo que pueda emplearse en cada caso para resolver las cuestiones relativas á la cantidad.

2.—*Principio es una verdad de la que se deducen otras.*

Los principios se dividen en *axiomas y en teoremas.*

Axioma es todo principio evidente por sí mismo, es decir, que expresa un hecho del que desde nuestros primeros años tenemos, aun sin percibirlo, continuas pruebas y que por lo mismo admitimos sin discusión y con solo verlo enunciado. Por ejemplo, es un axioma que el todo es mayor que una de sus partes.

Teorema es un principio, que no teniendo el carácter de evidencia patmaria que los axiomas, para persuadirnos de su verdad, necesitamos de un raciocinio que se llama demostración. Por ejemplo, es un teorema que el cociente no se altera cuando se multiplican el dividendo y el divisor por un mismo número.

Las matemáticas son una ciencia *exacta*, porque sus resultados, como los datos de que parte, son exactos, y además, la naturaleza de la ciencia es tal, que siempre es posible que quedemos persuadidos de la verdad de las conclusiones á que llega.,

3.—Partes de las matemáticas.—Las principales divisiones de las matemáticas son tres: el *cálculo, la geometría* y *la mecánica racional.*

El cálculo se ocupa de los procedimientos que sirven para deducir de las cantidades conocidas las desconocidas, valiéndose de las relaciones más sencillas entre unas y otras.

La geometría se ocupa del estudio de la extensión, considerando las relaciones de forma, posición y magnitud.

La mecánica racional trata de las leyes y de las causas del movimiento y del equilibrio.

Entre estas partes suele haber un íntimo enlace, interviniendo frecuentemente el cálculo en todas ellas.

El cálculo se divide en *álgebra, y en aritmética. El álgebra tiene por objeto determinar el modo de formación de una cantidad desconocida por medio de ciertas relaciones que existen entre las cantidades conocidas.*

La aritmética tiene por objeto determinar un valor numérico desconocido que satisfaga determinadas condiciones, sirviéndose de los valores conocidos.

Reuniendo á estas divisiones la combinación que se ha hecho del cálculo con la geometría para poder tratar de un modo más general y abstracto las cuestiones relativas á la extensión, á lo cual se ha dado el nombre de *geometría analítica ó general* y el *cálculo infinitesimal*, se tendrá una idea de las principales divisiones adoptadas para el estudio de las matemáticas, y que son: *aritmética, álgebra, geometría, geometría analítica ó general, cálculo infinitesimal y mecánica racional.*

4.—*Aritmética es la ciencia que se ocupa en el estudio de las cantidades expresadas por números: considera la naturaleza de éstos, sus propiedades, y suministra medios fáciles, así para expresarlos como para calcular por medio de ellos.*

5.—*Número es un conjunto de unidades ó de partes de la unidad.*

6.—*Unidad es una cantidad que se toma ó elige, comunmente á arbitrio para valuar todas las cantidades de su misma especie.* La unidad siempre se expresa por la palabra *uno* ó *una.*

Si se trata de valuar el peso de un cuerpo, se refiere, por ejemplo, al gramo, que es la unidad que se ha escogido con este objeto, y así se dice que una barra de plata pesa mil gramos. Para medir las distancias se ha escogido el metro. En estos dos casos la elección de la unidad ha sido convencional; pero otras veces, como cuando decimos que han muerto veinte hombres; la unidad es un objeto de la naturaleza.

7.—Todo número es cantidad, pero no toda cantidad es número. En efecto, pudiendo todo número hacerse mayor ó menor, será siempre cantidad; pero, por ejemplo: un montón de harina, una afección moral, la intensidad de la luz, etc., pudiendo ser más ó menos grandes, serán cantidades reales, y sin embargo, no son números.

8.—Los números en cuanto á su formación pueden ser *enteros, quebrados ó mixtos*, y en cuanto á las clases de sus unidades pueden ser *abstractos ó concretos.*

Se llama número entero, al que consta exclusivamente de una ó de varias unidades cabales, como 1, 3, 9, que no se componen de partes de la unidad.

Quebrado es el número menor que la unidad, como dos tercios ó siete octavos. A los quebrados también se les llama fracciones.

Número mixto es el que consta de unidades completas y de partes de la unidad, como cinco y tres cuartos.

Número abstracto es el que no determina la especie de sus unidades, como 2, 6, 8, ó como cuando se dice 5 veces.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Número concreto es el que determina la especie de sus unidades, como 5 litros, 9 toros, 26 años.

Los números concretos pueden ser homogéneos ó heterogéneos.

Números homogéneos son los de la misma especie, como 5 pesos, 9 pesos y 3 pesos.

Números heterogéneos son los de diferente especie, como 7 arrobas, 9 metros y 6 árboles.

Número dígito es el que se escribe con un solo guarismo, y compuesto es el que se escribe con dos ó más.

9.—Sistema de numeración.—*Sistema de numeración, es la parte de la aritmética que se ocupa en el modo de denominar por medio de pocas palabras todos los números posibles, y de representarlos con un reducido número de caracteres. Se divide en hablada y escrita.*

La numeración hablada tiene por objeto denominar con pocas palabras combinadas entre sí, todos los números posibles.

La numeración escrita tiene por objeto representar con solo diez caracteres todos los números posibles.

10.—Si á la unidad le agregamos otra unidad formaremos el número dos; si á este número le agregamos otra unidad, formaremos el número tres, y agregando sucesivamente una unidad, iremos formando todos los números.

La unidad y los primeros conjuntos de unidades simples, ó unidades de primer orden, se representan y se denominan como sigue:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve,

que se llaman números *cardinales*.

La carencia de unidades se llama *cero*, y se representa por este símbolo, 0.

Con el objeto de reducir el número de voces necesarias para denominar todos los números, y para concebir más fácilmente su valor, se ha convenido en que el conjunto de *diez* unidades constituya una *decena*, ó unidad mayor de *segundo orden;* en que *diez* decenas formen la *centena* ó unidad de *tercer orden*; en que *diez* centenas formen el *millar*, etc.; y en denominar los números combinando los nombres de las partes de que constan.

Para representar con solo *diez* caracteres todos los números, se ha convenido en darles á los símbolos, 1, 2, 3...9, con que se representan las unidades simples, dos valores: uno correspondiente á su figura y otro al lugar que ocupe, de manera que un guarismo *solo*, representa unidades; si está seguido de una cifra á la derecha, representará decenas; si está seguido de dos cifras, representará centenas; si está seguido de tres, representará millares; y así sucesivamente.

Los números que únicamente constan de decenas se representan por alguna de las nueve cifras 1, 2....9 seguida de un cero y se denominan como sigue:

1 decena	se escribe	10	y se llama	diez unidades
2 decenas	„	20	„	veinte „
3 decenas	„	30	„	treinta „
4 decenas	„	40	„	cuarenta „
5 decenas	„	50	„	cincuenta „
6 decenas	„	60	„	sesenta „
7 decenas	„	70	„	setenta „
8 decenas	„	80	„	ochenta „
9 decenas	„	90	„	noventa „

Para representar los números compuestos de decenas y de unidades basta reemplazar el cero, que indica carencia de unidades simples, por una de las cifras 1 á 9, y para formar sus nombres es suficiente expresar después del nombre de las decenas el de las unidades. Por ejemplo, los números comprendidos entre 3 y 4 decenas se representan y se nombran como sigue:

30 treinta.
31 treinta y uno.
32 treinta y dos.
.
.
38 treinta y ocho.
39 treinta y nueve.

De esta manera se forman los nombres y los símbolos de los números desde 1 hasta 99. El uso ha sancionado las siguientes excepciones: en lugar de diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, diez y cinco, se denominan estos números: *once*, *doce*, *trece*, *catorce* y *quince*. Como se habrá notado, para que un guarismo represente decenas, es preciso que esté seguido de otro.

Las centenas se representan también con una de las nueve cifras cardinales, pero seguida de dos ceros á la derecha, que indican carencia de decenas y de unidades.

1 centena	se escribe	100	y se llama	cien unidades.
2 centenas	„	200	„	doscientas „
3 centenas	„	300	„	trescientas „
4 centenas	„	400	„	cuatrocientas „

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
Biblioteca Valverde y Tellez

5 centenas se escribe 500 y se llama quinientas unidades.
6 centenas „ 600 „ seiscientas „
7 centenas „ 700 „ setecientas „
8 centenas „ 800 „ ochocientas „
9 centenas „ 900 „ novecientas „

Para representar los números compuestos de centenas y de unidades, basta reemplazar el primer cero de la derecha por las cifras 1 á 9, y en los números compuestos de centenas, decenas y unidades se reemplazarán los dos ceros por las cifras de 10 á 99. Para formar sus nombres se expresan en seguida del de las centenas las voces con que denominamos los números 1 al 99. Tomemos como ejemplo algunos de los números comprendidos entre 500 y 600.

501 quinientos uno.
509 quinientos nueve.
510 quinientos diez.
511 quinientos once.
590 quinientos noventa.
599 quinientos noventa y nueve.

De esta manera se forman los nombres y los símbolos de los números desde 1 hasta 999, y como se habrá observado, para que un guarismo indique centenas, es preciso que esté seguido de otros dos.

11.—Agregando una unidad al número 999 nos resulta un grupo compuesto de *diez centenas* ó de *mil unidades*, que se llama *millar*, y que constituye una *clase* especial. Los millares se cuentan de 1 á 999, y los nombres de los números que constan únicamente de millares se forman posponiendo á los de los números de 1 á 999 la palabra *mil*. Se escriben y denominan como sigue:

1,000 un mil.
2,000 dos mil.
3,000 tres mil.
10,000 diez mil.
11,000 once mil.
100,000 cien mil.
101,000 ciento un mil.
999,000 novecientos noventa y nueve mil.

Para representar los números compuestos de millares y de unidades, considerando como unidades los números de 1 á 999, bastará reemplazar, según sea el caso, uno, dos, ó los tres ceros que siguen á los millares por los números correspondientes desde 999 hasta 1; y para formar sus nombres será suficiente decir en seguida de la palabra mil el nombre del número de las unidades de 999 á 1. Para aclaración pondremos los siguientes ejemplos:

1,001 un mil uno
4,060 cuatro mil sesenta.
500,068 quinientos mil, sesenta y ocho.
706,800 setecientos seis mil, ochocientos.
999,999 novecientos noventa y nueve mil, novecientos noventa y nueve.

De esta manera se forman los nombres y los símbolos de los números de 1 á 999,999 unidades, y como se habrá observado, para que un guarismo indique millares tiene que estar seguido de tres cifras.

Con el conjunto de *mil* millares se forma una clase mayor que se denomina *millón*, se cuentan los millones como si fueran unidades de 1 á 999,999, y para denominar estas cantidades se anteponen á la palabra *millón* los nombres de los números desde 1 hasta 999,999, expresando en seguida los nombres de los números desde 999,999 hasta 1.

Para representar estas cantidades se escriben primero los números desde 1 hasta 999,999 que indiquen los millones de que consta la cantidad, luego se pone un punto y á la derecha se escriben primero tres cifras que indiquen los millares y luego otras tres que representen las unidades simples.

Un millón de millones forman el *billón;* un millón de billones forman el *trillón;* un millón de trillones forman el *cuatrillón*; etc., escribiéndose cada clase de unidades á la izquierda de su inmediata menor, y los números se denominan expresando sucesivamente el nombre de cada cifra unido al del orden ó al de la clase que representa, comenzando por las clases mayores y siguiendo con las menores; pasando en silencio los órdenes y las clases de unidades de que carezca el número.

12.—A continuación ponemos una tabla graduada de nuestro sistema de numeración, que se llama *decimal*, de todos los órdenes de unidades hasta las decenas de billón

Uno.....1
Diez.....10
Cien.....100
Mil.....1,000
Diez mil.....10,000
Cien mil.....100,000
Un millón.....1.000,000
Diez millones.....10.000,000
Cien millones.....100.000,000

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Mil millones.....1,000.000,000
Diez mil millones.....10,000.000,000
Cien mil millones.....100,000.000,000

Un billón.....1.000,000.000,000
Diez billones.....10.000,000.000,000

Como se habrá observado, toda cifra representa un orden de unidades 10 veces mayor que la cifra de su derecha. Por tanto, si á una cifra se le agrega un cero á la derecha, su valor se hace diez veces mayor, si se le agregan dos ceros se hará cien veces mayor, y así sucesivamente; pero el valor *de una cifra* no se altera cuando se le escriben ó se suprimen ceros ó cifras significativas á su izquierda.

13.—En resumen, *las convenciones del sistema de numeración son: que con diez unidades de un orden cualquiera se forma siempre una unidad del orden inmediato superior; que la reunión de los seis primeros órdenes de unidades forman la clase mayor de los millones; que la reunión de los seis órdenes de unidades de millón, forman la clase de los billones; que la reunión de los seis órdenes de unidades de billón, forman la clase de los trillones, etc.; que con el conjunto de los tres primeros órdenes de unidades de cada clase mayor se constituye la clase menor de los millares; y que el número de unidades de cualquier orden se representa por las mismas cifras, escribiendo en el primer lugar de la derecha las unidades, en el segundo las decenas, en el tercero las centenas, etc.*

14.—Las convenciones especiales de la numeración hablada son: 1°, *no dar nombres simples sino á los números de uno á quince, á las decenas, á cien, á quinientos, á mil, al millón, al billón, al trillón, etc.;* y 2°, *en formar el nombre de cualquier número combinando los de sus partes, comenzando por los órdenes de unidades superiores, enunciando sucesivamente el nombre del número de unidades de cada orden y en seguida el nombre de la clase ó del orden de unidades.*

15.—Las convenciones de la numeración escrita son: 1°, *que á todo guarismo se le dan dos valores; uno propio, que es el que tiene por su figura, y otro relativo, por el lugar que ocupa;* 2°, *que un guarismo cualquiera representa un orden de unidades diez veces mayores que el que está á su derecha;* y 3°, *que para conservar á un guarismo el valor relativo que le corresponde se ocupan con ceros los órdenes de unidades de que carece una cantidad.*

16.—*El cero es el símbolo de la nada* y sirve para ocupar los lugares de los órdenes de unidades de que carece una cantidad.

17.—*Para escribir una cantidad, se comienza por los órdenes y las clases superiores, escribiendo de izquierda á derecha sucesivamente los guarismos que representan las unidades de cada uno de los órdenes de que consta la cantidad, teniendo cuidado de ocupar con ceros los órdenes de que carezca.*

Es conveniente proceder por períodos menores de tres cifras, y en cada periodo se examina de qué órdenes de unidades consta la cantidad y de cuáles carece. En el lugar de cada uno de los órdenes de unidades de que *conste* la cantidad se escribirá la *cifra significativa* que represente el número de esas unidades, y en el lugar de cada uno de los órdenes de unidades de que *carezca* la cantidad se pondrá *cero.*

18.—Regla para leer una cantidad.—*Contando de derecha á izquierda, se divide el número propuesto en períodos mayores de seis cifras cada uno, que se señalan con un punto y con un número pequeño de orden que se pone arriba. En seguida cada período mayor se divide por medio de una coma en dos menores de tres guarismos. El primer período mayor de la derecha representa unidades simples, el segundo millones, el tercero billones, el cuarto trillones, etc.*

Una vez hecha la división de la cantidad, se empieza á leer por la izquierda, enunciando sucesivamente el nombre de cada cifra unido al del orden ó al de la clase que representa, pasando en silencio los órdenes que estén ocupados por ceros; al fin de cada período menor, marcado con una coma, se pronuncia mil; y al fin de cada período mayor se dice unidades, ó millones, ó billones, etc., según sea la clase indicada por el pequeño número puesto arriba.

El siguiente ejemplo aclarará esta regla:

2.	1.	0.
billones	millones	
7	8	0,
decenas de billón	centenas de millar	millares
2	3	6
unidades	centenas	decenas
3	7	4
centenas de millares de millón	decenas de millar	centenas de millón
0	5,	0
decenas de millares de millón	millares de millón	decenas de millón

Esta cantidad se lee: setenta y dos billones, trescientos cinco mil, cuatrocientos millones, ochocientos setenta mil, trescientas sesenta y dos unidades.

19.—En el conjunto de convenciones que hemos explicado consiste el sistema de nomenclatura y escritura de los números. En la numeración

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

hablada se tiene la doble ventaja de que la lista de los nombres empleados, aunque diferentes todos entre sí, se forma fácilmente con la combinación de un corto número de palabras, y de que se puede tener una idea exacta del valor de un número por el significado de las voces simples empleadas para denominarlo.

En la numeración escrita, como habrá podido observarse, si se comienza á contar de derecha á izquierda, el lugar de cada guarismo indica el orden de las unidades que representa: así las unidades simples ó unidades de primer orden ocupan el primer lugar; las decenas, que se colocan en el segundo lugar, representan unidades de segundo orden; las centenas, que están en el tercer lugar, representan unidades de tercer orden, y así sucesivamente. De esto resulta que el orden de unidades que representa un guarismo cualquiera, vale diez, cien, mil, etc., unidades del orden del guarismo que está respectivamente uno, dos, tres, etc., lugares á la derecha después que él. Por ejemplo, el millón vale diez centenas de millar, que es el orden de unidades que se escribe un lugar á la derecha; vale 100 decenas de millar que se escriben dos lugares á la derecha de los millones: vale mil millares que se escriben tres lugares á la derecha de los millones, etc.

Los números enteros forman una serie creciente, en la que la diferencia entre los números consecutivos es constantemente la unidad, estando expresado el valor de un número por el orden del lugar que ocupa en dicha serie. Así, por ejemplo, el número 725 indica el resultado de la adición sucesiva de 725 unidades de una en una, y su valor marca el orden del lugar que ocupa en la escala ascendente de los números enteros. Si nos fijamos en las voces simples con que componemos el nombre del número 725 y en los guarismos con que lo representamos, esto nos indicará otro modo de formación del número 725, igual á la suma de varios grupos de unidades de diversos órdenes cuya base es 10; así, 725 se compone de 7 cientos, más 2 dieces, más 5 unidades.

Por último, el sistema de convenciones de nuestra numeración, además de satisfacer bastante bien el objeto de denominar con pocas palabras y de escribir con solo diez caracteres todos los números posibles, presenta la gran ventaja de que puedan efectuarse las operaciones numéricas con suma facilidad, como veremos más adelante, en virtud de que las convenciones adoptadas carecen de excepciones, y de que son sencillas y adecuadas á su objeto.

Nuestro sistema de numeración se llama *décuplo* ó *decimal*, porque *diez* es la base que ha servido para formarlo.

20.—Si á un número se le agrega uno, dos, tres, etc., ceros á la derecha, el valor de este número se hará 10, 100, 1000 veces mayor, por-

que conforme á las convenciones del sistema de numeración, cada guarismo ocupará el lugar de las unidades de segundo, tercero, cuarto, etc., orden superior, al que tenía antes: esto es, unidades superiores que tienen un valor 10, 100, 1000 veces mayor que el primitivo. Por ejemplo si á 45 se le agregan dos ceros á la derecha, resultará el número 4500; y se vé que el 5, que primero representaba unidades, ahora representa centenas, que es un orden 100 veces mayor que el de las unidades simples, y el 4 que antes representaba decenas, ahora representa millares que son 100 veces mayores que las decenas; luego habiéndose hecho 100 veces mayores todas las partes de 45, el número 4500 será cien veces mayor que 45.

La supresión de uno, dos ó tres ceros á la derecha de una cantidad, hace el valor de ésta 10, 100, 1000, etc., veces menor.

Si se quiere determinar el número de unidades de cierto orden, contenidas en un número, bastará separar las cifras que indican las unidades cuyo orden se quiere conocer, y leer las que quedan á la izquierda.

Así, el número 734568 encierra 73456 decenas y 8 unidades, ó 7345 centenas y 68 unidades, ó 734 millares y 568 unidades, etc.

La adición de ceros á la izquierda de un número no altera su valor, porque tanto el valor relativo como el absoluto de los guarismos que lo representan permanece el mismo.

CALCULO DE LOS NUMEROS ENTEROS.

PRELIMINARES.

21.—*El cálculo en aritmética enseña á hacer ciertas operaciones con los números, á fin de formar del modo más sencillo otros números que satisfagan determinadas condiciones.*

El cálculo es *mental* cuando se concibe una operación en el entendimiento y no se practica; *escrito* cuando se representa lo que se ha concebido; y *oral* cuando se expresa lo concebido ó escrito.

22.—El cálculo comprende un gran número de operaciones compuestas, pero las simples y fundamentales son cuatro: *la adición, la substracción, la multiplicación y la división. Para indicar las operaciones hechas ó por hacer, nos servimos de ciertas señales que se llaman signos.*

La *adición* tiene por objeto reunir en un número el valor de varios. Se le indica con el signo + llamado más, el cual se coloca entre las cantidades que se quieran sumar, y el resultado se llama suma. Cuando se

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

hablada se tiene la doble ventaja de que la lista de los nombres empleados, aunque diferentes todos entre sí, se forma fácilmente con la combinación de un corto número de palabras, y de que se puede tener una idea exacta del valor de un número por el significado de las voces simples empleadas para denominarlo.

En la numeración escrita, como habrá podido observarse, si se comienza á contar de derecha á izquierda, el lugar de cada guarismo indica el orden de las unidades que representa: así las unidades simples ó unidades de primer orden ocupan el primer lugar; las decenas, que se colocan en el segundo lugar, representan unidades de segundo orden; las centenas, que están en el tercer lugar, representan unidades de tercer orden, y así sucesivamente. De esto resulta que el orden de unidades que representa un guarismo cualquiera, vale diez, cien, mil, etc., unidades del orden del guarismo que está respectivamente uno, dos, tres, etc., lugares á la derecha después que él. Por ejemplo, el millón vale diez centenas de millar, que es el orden de unidades que se escribe un lugar á la derecha; vale 100 decenas de millar que se escriben dos lugares á la derecha de los millones: vale mil millares que se escriben tres lugares á la derecha de los millones, etc.

Los números enteros forman una serie creciente, en la que la diferencia entre los números consecutivos es constantemente la unidad, estando expresado el valor de un número por el orden del lugar que ocupa en dicha serie. Así, por ejemplo, el número 725 indica el resultado de la adición sucesiva de 725 unidades de una en una, y su valor marca el orden del lugar que ocupa en la escala ascendente de los números enteros. Si nos fijamos en las voces simples con que componemos el nombre del número 725 y en los guarismos con que lo representamos, esto nos indicará otro modo de formación del número 725, igual á la suma de varios grupos de unidades de diversos órdenes cuya base es 10; así, 725 se compone de 7 cientos, más 2 dieces, más 5 unidades.

Por último, el sistema de convenciones de nuestra numeración, además de satisfacer bastante bien el objeto de denominar con pocas palabras y de escribir con solo diez caracteres todos los números posibles, presenta la gran ventaja de que puedan efectuarse las operaciones numéricas con suma facilidad, como veremos más adelante, en virtud de que las convenciones adoptadas carecen de excepciones, y de que son sencillas y adecuadas á su objeto.

Nuestro sistema de numeración se llama *décuplo* ó *decimal*, porque *diez* es la base que ha servido para formarlo.

20.—Si á un número se le agrega uno, dos, tres, etc., ceros á la derecha, el valor de este número se hará 10, 100, 1000 veces mayor, por-

que conforme á las convenciones del sistema de numeración, cada guarismo ocupará el lugar de las unidades de segundo, tercero, cuarto, etc., orden superior, al que tenía antes: esto es, unidades superiores que tienen un valor 10, 100, 1000 veces mayor que el primitivo. Por ejemplo si á 45 se le agregan dos ceros á la derecha, resultará el número 4500; y se vé que el 5, que primero representaba unidades, ahora representa centenas, que es un orden 100 veces mayor que el de las unidades simples, y el 4 que antes representaba decenas, ahora representa millares que son 100 veces mayores que las decenas; luego habiéndose hecho 100 veces mayores todas las partes de 45, el número 4500 será cien veces mayor que 45.

La supresión de uno, dos ó tres ceros á la derecha de una cantidad, hace el valor de ésta 10, 100, 1000, etc., veces menor.

Si se quiere determinar el número de unidades de cierto orden, contenidas en un número, bastará separar las cifras que indican las unidades cuyo orden se quiere conocer, y leer las que quedan á la izquierda.

Así, el número 734568 encierra 73456 decenas y 8 unidades, ó 7345 centenas y 68 unidades, ó 734 millares y 568 unidades, etc.

La adición de ceros á la izquierda de un número no altera su valor, porque tanto el valor relativo como el absoluto de los guarismos que lo representan permanece el mismo.

CALCULO DE LOS NUMEROS ENTEROS.

PRELIMINARES.

21.—*El cálculo en aritmética enseña á hacer ciertas operaciones con los números, á fin de formar del modo más sencillo otros números que satisfagan determinadas condiciones.*

El cálculo es *mental* cuando se concibe una operación en el entendimiento y no se practica; *escrito* cuando se representa lo que se ha concebido; y *oral* cuando se expresa lo concebido ó escrito.

22.—El cálculo comprende un gran número de operaciones compuestas, pero las simples y fundamentales son cuatro: *la adición, la substracción, la multiplicación y la división. Para indicar las operaciones hechas ó por hacer, nos servimos de ciertas señales que se llaman signos.*

La *adición* tiene por objeto reunir en un número el valor de varios. Se le indica con el signo + llamado más, el cual se coloca entre las cantidades que se quieran sumar, y el resultado se llama suma. Cuando se

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

quiere sumar 3 con 4, y se obtiene el resultado 7, la operación se indica así:

3+4=7, y se lee: 3 más 4 igual á 7.

Con el signo = que se llama igual, se forma una ecuación, indicando una operación y el resultado de ella: 3+4 es el primer miembro de la ecuación, y 7 el segundo miembro.

Ecuación es la expresión de la igualdad del valor de dos cantidades, formadas generalmente de un modo diferente.

La operación recíproca de la adición se llama *substracción*. Cuando se quiere saber cuál es el número que reunido con 3 forma la suma 7, la operación es una substracción: se indica 7—3=4, y se lee 7 menos 3 igual á 4.

Cuando todas las cantidades que se han de sumar son iguales, como cuando se tiene 3+3+3+3=12, la operación se llama *multiplicación*; y en vez de repetir cuatro veces el número 3, la operación se indica 3×4=12 y se lee: 3 multiplicado por 4 igual á 12.

Cuando se quiere saber cuál es el número que multiplicado por 3 produce 12, la operación es una división. Se indica de este modo $\frac{12}{3}$, ó 12÷3=4, y se lee: 12 dividido por 3 igual á 4.

El objeto de toda operación aritmética es encontrar un número desconocido engendrado por los conocidos de un modo peculiar en cada operación. Toda proposición, así como el resultado de cualquiera operación aritmética, es casi siempre el enunciado del modo de formación de un número.

23.—Además de los signos +, —, ×, ÷, é =, se emplea *un punto* para indicar la multiplicación y *dos puntos* para indicar la división. Cuando dos cantidades no son iguales se usa el signo > *(mayor que)*; poniendo la cantidad mayor del lado de la abertura.

9>4 se lee: 9 mayor que 4, y 3<5 se lee 3 menor que 5.

Cuando se tiene que ejecutar una operación con varias cantidades, se colocan éstas dentro de un paréntesis. Así (3+4—5)×(3+8) significa que el resultado de 3+4—5 se ha de multiplicar por el de 3+8.

Ya hemos dicho que signos son las señales con que se indican las operaciones hechas ó por hacer, y en el cálculo los signos son en extremo útiles porque expresan con claridad y precisión las operaciones que hay que ejecutar y las relaciones que existen entre las cantidades sobre las cuales debemos fundar nuestros raciocinios.

24.—En las operaciones fundamentales consideraremos ocho cosas:

1.ª *Definición*, ó qué cosa es la operación.

2.ª *Regla general*, ó cómo se ejecuta la operación.

3.ª *Demostración de la regla general*, ó por qué se ejecuta así la operación.

4.ª *Ejemplo*, ó aplicación de la operación.

5.ª *Prueba*, ó rectificación de la ejecución de la operación.

6.ª *Casos*, ó maneras de presentarse los datos de una operación.

7.ª *Demostración de las reglas para resolver los casos*, y

8.ª *Usos*, ó en qué clase de cuestiones se debe aplicar la operación.

25.—*Definición es la enunciación clara y concisa de las propiedades necesarias para dar á conocer la cosa que expresamos por una palabra, de manera que se distinga de cualquiera otra cosa.*

La definición para ser buena ha de ser *clara*, *corta* y no debe emplearse en ella la palabra que se trata de definir.

26.—*Regla general es un discurso que nos prescribe las operaciones auxiliares que debemos efectuar y el orden de ellas para resolver la operación principal.*

Las reglas son: generales ó particulares, preparatorias ó resolutivas.

27.—*Demostración es el razonamiento que se hace para inferir una verdad de otras, ó para persuadirnos de que un principio es cierto.*

La demostración puede ser: 1.º *Positiva* ó directa: 2.º *Negativa* ó indirecta, á la que también se llama *por absurdo*.

Demostración positiva es aquella en la que el teorema por demostrar resulta como consecuencia de otros principios admitidos ó demostrados ya, y á esto se llama en general deducción.

Negativa es aquella que nos hace ver, que de no ser cierta la verdad que trata de demostrarse, resultaría cierto un principio incompatible con los que hemos admitido ó demostrado.

La demostración negativa no siempre es matemática, por lo que sólo debe usarse en casos especiales y con la mayor circunspección.

En las demostraciones directas se pasa de una afirmación á otra; en las negativas partimos generalmente de una negación para llegar á una afirmación.

28.—*Prueba ó comprobación es una segunda operación por medio de la cual rectificamos la primera, haciéndonos ver que probablemente no se ha cometido ningún error en su ejecución.*

La prueba debe ser de más fácil ejecución que la operación que se va á rectificar, con el objeto de que sea menos probable cometer en ella una equivocación.

No se debe confundir la demostración con la prueba.

La primera es una operación intelectual, mientras que la prueba es una operación mecánica. *La demostración* nos da la razón ó fundamento

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

que hay para efectuar de cierta manera *todas las operaciones semejantes;* mientras que la *prueba* sólo nos sirve para adquirir la probabilidad ó certeza de que no se ha cometido error en la ejecución de *una operación particular.* La demostración es el fundamento de un principio ó de una regla general aplicable á un número indefinido de casos: la prueba nada más rectifica ó comprueba la exactitud de un sólo resultado.

29.—*Casos son las diferentes maneras de presentarse los datos de una operación. Se llaman datos, las cantidades y condiciones conocidas en una operación ó cuestión.* Los casos se distinguen con el objeto de facilitar la ejecución de las operaciones á que pertenecen, pudiendo resolverse de un modo más fácil y sencillo que por el método prescrito en la regla general.

30.—Usos.—Con el objeto de facilitar la resolución de los problemas numéricos se determinan de una manera general las clases de cuestiones que con cada una de las operaciones fundamentales pueden resolverse, atendiendo al modo peculiar con que en cada una de ellas se forma el resultado.

Usos de una operación son las clases de cuestiones á cuya resolución puede aplicarse.

31.—*Problema es una cuestión en la que por medio de cantidades conocidas, se trata de encontrar una desconocida que satisfaga determinadas condiciones.* A las cantidades y condiciones conocidas, se les llama *datos,* y á las cantidades desconocidas se les llama *incógnitas.*

Un problema consta de dos partes: *resolución y demostración.* Resolución es la série de operaciones que se efectúan con las cantidades conocidas para llegar á determinar la desconocidá. Cuando la resolución se hace con números, se llama aritmética, y cuando se ejecuta por medio de figuras ó instrumentos, se llama gráfica. La demostración de un problema es la série de razonamientos en que se funda su resolución.

32.—Axiomas.—Los principios que sirven de base á las matemáticas tienen que ser evidentes, porque de lo contrario habría necesidad de buscar otros en que apoyar su demostración. Los principales axiomas de que haremos uso en aritmética, son los siguientes:

Dos cantidades iguales á una tercera, son iguales entre sí.

Una cantidad es igual á la reunión de sus partes.

Si á cantidades iguales se agregan ó quitan cantidades iguales, los resultados serán iguales.

Si con todas las partes de una cantidad se ejecuta una operación, el resultado es igual al que se obtendría ejecutando la operación con toda la cantidad.

Si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, los resultados serán iguales.

ADICION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

33.—Cuando se nos dan, por ejemplo, tres cantidades, que constan: la primera de 2 unidades, la segunda de 4 y la tercera de 5, teniendo necesidad de averiguar el valor de un número, compuesto él sólo de tantas unidades como son las que tienen las tres cantidades dadas, la operación es una *suma* que se indica:

$$2+4+5=11$$

y se lee, 2 más 4 más 5 igual á 11.

Las cantidades que se suman, 2, 4 y 5 en este ejemplo, se llaman sumandos, y el resultado 11 de la operación se llama *suma.*

Es condición indispensable *para que las cantidades puedan sumarse que sean de la misma especie.* Si por ejemplo, quisieran sumarse 2 pesos, con 4 horas y con 5 leguas no se sabría de qué especie sería el resultado, y se comprende además que éste no podría ser un *número,* supuesto que todo número es el conjunto de unidades de la misma especie.

34.—Definición.—*Adición es la operación que tiene por objeto reunir en una sola cantidad el valor de varias de la misma especie.*

También puede decirse, que en aritmética *la adición tiene por objeto encontrar un número compuesto de tantas unidades como son las unidades de que constan dos ó más.*

35.—Teorema.—*El valor de la suma no se altera cuando se invierte el orden de los sumandos.*

Si $3+4+2=9$

decimos que $2+3+4$ será también igual á 9.

Demostración.—Como la suma debe constar de tantas unidades como sean las que tengan los sumandos y como cuando se invierte el orden de éstos no se altera el número de unidades de que constan, se infiere que el valor de la suma no se altera cuando se invierte el orden de los sumandos.

36.—*Si á uno de los sumandos se agrega una cantidad, la suma resultará aumentada la misma cantidad.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Si sabemos que $4+5+3=12$
y que $6=2+4$

vamos á demostrar que $6+5+3$ será igûal á $2+12$.

En efecto, reemplazando por 6 su igual $2+4$ se tiene:

$$6+5+3=2+4+5+3$$

y como $4+5+3=12$
resulta $6+5+3=2+12$

que es lo que se quería demostrar.

Recíprocamente: *si á uno de los sumandos se le quita una cantidad, la suma resultará disminuida la misma cantidad.*

Si sabemos que $6+5+3=14$
y que $4=6-2$

demostraremos que $4+5+3$ será igual á $14-2$

En efecto, reemplazando por 4 su igual $6-2$ se tiene:

$$4+5+3=6-2+5+3=6+5+3-2$$

y como $6+5+3=14$
resulta: $4+5+3=14-2$

que es lo que se quería demostrar.

Se ve, pues, que *la suma experimenta variaciones iguales á las que tenga uno de los sumandos.*

37.—Teorema.— *La suma no se altera cuando á uno de los sumandos se le agrega una cantidad y á otro se le quita la misma cantidad.*

Si se sabe que $3+4+7=14$
agregando 5 unidades al primer sumando y quitando 5 unidades al último, la operación se cambia en

$$8+4+2,$$

y vamos á demostrar que el resultado deberá ser igual al anterior.

En efecto, si sólo hubiéramos agregado 5 unidades al primer sumando, la suma 14 habría resultado aumentada 5 unidades; pero como al quitar 5 unidades al último sumando la suma resulta disminuida también 5 unidades, se infiere que aumentando por una operación tanto como se disminuye por la otra, la suma no alterará.

38.—Para ejecutar la operación de la suma, el método natural está fundado en el último teorema. Cuando se quiere sumar 4 con 3, se va quitando una unidad á un sumando y agregándola al otro sucesivamente, hasta que desaparece el menor, de la manera siguiente:

$4+3=5+2=6+1=7$, luego $4+3=7$

Este método sería excesivamente laborioso y dilatado para cantidades de gran valor, y por esto la adición de las unidades con cualquier número se hace á la memoria. Además, para más facilitar la ejecución de la adición, se hace ésta descomponiendo las cantidades por sumar en las partes de que están formadas, según el sistema de numeración, esto es, en unidades, decenas, centenas, etc.

Si tenemos que sumar 345 con 684, la operación abreviada de la práctica debe concebirse como sigue:

$345=300+40+5$ que son las partes que lo forman, y
$684=600+80+4$

Sumando las unidades del mismo orden resulta:

$$345+684=900+120+9=900+100+20+9=1{,}000+20+9=1029$$

Reduciéndose así la operación á tener que sumar números de un solo guarismo.

En lo expuesto se funda la siguiente:

39.—Regla general.—*Para sumar los números enteros, se escriben unos debajo de otros, teniendo cuidado de colocar en una columna vertical las unidades del mismo orden; esto es: las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, las centenas debajo de las centenas, etc. Después se tira por debajo del último sumando una linea horizontal para separar el resultado, y se comienza la suma por las unidades de especie menor: si ésta no pasa de 9, se escribe debajo; pero si excede de 9, se escriben las unidades y el número de decenas se reune á los guarismos de la columna siguiente de las decenas, repitiéndose en esta columna, en la de las centenas, y en las siguientes, la misma regla; pero en la última columna de la izquierda se escribe el resultado tal como salga. El número encontrado será la suma total.*

40.—Ejemplo.—Sea por sumar las cantidades 386, 459 y 908. Se escriben de la manera siguiente:

386
459
908
1753

La operación se ejecuta comenzando á sumar los números de la columna de la derecha, la cual da 23 unidades, igual á 3 unidades simples y 2 decenas. Se pone 3 en el lugar de las unidades y se retienen en la

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

memoria las 2 decenas para agregarlas á los números de la segunda columna, que son los que representan decenas, cuya suma nos da 15 decenas, igual á 5 decenas y una centena. Se escribe 5 en el lugar correspondiente, y se agrega una centena á las demás centenas, cuya suma 17 se escribe en el lugar correspondiente, siendo 1753 unidades la suma total.

El pormenor de las operaciones fundamentales de la regla puede concebirse como sigue:

$$\begin{array}{rl} 386 = & 300 + 80 + 6 \\ 459 = & 400 + 50 + 9 \\ 908 = & 900 + 00 + 8 \\ \hline & 1600 + 130 + 23 \end{array}$$

23 suma de las unidades.
130 „ „ „ decenas.
1600 „ „ „ centenas.
1753 „ total.

Y como se comprende fácilmente, la base de este procedimiento es que la suma de todas las partes de los sumandos es igual á la suma de éstos.

41.—Demostración.—1º. Se han sumado las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, las centenas con las centenas, etc., porque *es indispensable que sean de la misma especie las cantidades que se suman.* 2º Se comienza la suma por las unidades de la especie menor, porque *la suma de los números de especie menor conduce á la formación de unidades de orden mayor*, las cuales deben agregarse á las de su especie para tener en la suma representada la reunión de cada orden de unidades por un solo número. 3º Si con todas las partes de varias cantidades se ejecuta una operación, el resultado es igual al que se obtendría ejecutando con las cantidades la misma operación; practicando la regla, hemos reunido en la suma el valor de las unidades, de las decenas, de las centenas, etc., de los sumandos, *que son las partes de éstos*, luego habremos reunido en la suma el valor total de los sumandos.

42.—Prueba.—Siendo la adición la operación más sencilla de aritmética, no hay otra en cuya ejecución sea menos probable una equivocación; por lo cual la adición se prueba por la misma adición, de dos modos: 1º Si la suma se encontró sumando de arriba para abajo, se vuelve á ejecutar la operación sumando de abajo para arriba, y el resultado debe ser igual al primero, *porque el valor de la suma es el mismo, cualquiera que sea el orden de los sumandos.* 2º Se dividen los sumandos, cuando son muchos, en dos ó tres porciones; se hace separadamente

la suma de cada porción; y por último, se adicionan las sumas parciales, debiendo obtenerse una cantidad igual á la primera suma si no ha habido equivocación en la ejecución de la operación ó de la prueba. El fundamento de esta prueba consiste en que *una cantidad es igual á la reunión de sus partes, y las sumas parciales son las partes de que está compuesta la suma total.*

No obstante que esta prueba es operación más larga que la suma, debemos hacer notar que se adopta en la práctica porque es menos probable tener una equivocación en la prueba que en la operación definitiva, descomponiendo esta en operaciones más fáciles, esto es, en sumas que consten de pocos sumandos.

43.—Casos.—En la adición se presentan dos casos: 1º *Cuando los sumandos son desiguales.* 2º *Cuando los sumandos son iguales.*

1º 347+389+ 22
2º 975+975+975

El primer caso se resuelve por la regla general, y el segundo se simplifica mucho valiéndose de la multiplicación, operación que no es en realidad mas que el segundo caso de la suma abreviado.

44.—Usos.—El primer caso tiene los mismos usos á que da lugar el objeto de la suma; esto es, se aplica: cuando se quiere averiguar el total de varios números de la misma especie: cuando se quieran reunir varios valores para formar uno solo: cuando se quiere aumentar una cantidad con el valor de uno ó de varios números, etc.

El segundo caso de la suma tiene dos usos: 1º *Conocido el valor de una unidad, determinar el de muchas.* 2º *Reducir unidades de especie mayor á menor.*

45.—Como ejercicio pondremos los siguientes ejemplos:

345	4 678	936 086	343 266
8 946	309 779	40 700	294 309
9 090	166 405	865 497	903 444
7 746	84 708	304 960	55 767
12 963	14 996	165 744	186 935
904	465 766	75 392	46 747
39 994	1 046 332	2 388 379	1 830 468

Omitimos poner ejemplos del 2º caso de la suma, porque estos se resuelven más facilmente por la multiplicación.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

SUBSTRACCION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

46.—La substracción es una operación recíproca de la adición. Cuando se suman 3 y 4, se pide cuál es el valor del conjunto de las unidades contenidas en los dos números conocidos. En la substracción es conocido el resultado 7 de la suma y uno de los números que la forman, 3 por ejemplo, y se trata de determinar cuál es el número que sumado con 3 forma 7.

Esta operación se indica con el signo — *menos*, así:

$$7-3=4$$

y se lee: 7, menos 3, igual á 4.

Se llama diferencia lo que le falta ó sobra á una cantidad para ser igual á otra, y en consecuencia lo mismo es encontrar la diferencia entre dos cantidades, que hallar un número que, sumado con el menor, forme el mayor.

Es condición indispensable que las cantidades que se restan sean de la misma especie, porque ambas tienen que ser de la especie de la diferencia que se busca.

La *cantidad mayor*, esto es, aquella de la que se tiene que restar la otra conocida, *se llama minuendo*. La *cantidad menor*, que es la que se ha de restar, *se llama sùbstraendo*, y el resultado de la operación, *se denomina resta, exceso ó diferencia.*

47.—Def.—*Substracción es la operación que tiene por objeto encontrar la diferencia entre dos cantidades homogéneas.*

Puede decirse igualmente, *que la substracción es la operación por medio de la cual se encuentra una cantidad, que sumada con otra conocida forma un número propuesto.*

48.—Teorema.—*Cuando al minuendo se le agrega una cantidad, la resta resulta aumentada el mismo número de unidades; y si se le quita, la resta resultará disminuida la misma cantidad.*

Hemos dicho que la substracción tiene por objeto encontrar un número que sumado con el substraendo dé por suma el minuendo; pues bien, si al minuendo le agregamos una cantidad será forzoso que uno de los dos sumandos que lo forman aumente la misma cantidad, (36) y como suponemos que el substraendo permanece constante, será necesario

que la resta, que es el otro sumando, resulte aumentada el mismo número de unidades que se hayan agregado al minuendo.

Cuando al minuendo se le quita una cantidad es forzoso que uno de los dos sumandos que lo forman disminuya la misma cantidad (36), y como el substraendo no cambia, es indispensable que la resta, que es el otro sumando, resulte disminuida el mismo número de unidades que se hayan quitado al minuendo.

49.—Teorema.—*Cuando al substraendo se le agrega una cantidad, la resta resultará disminuida la misma cantidad, y cuando al substraendo se le quita una cantidad, la resta resultará aumentada.*

Cuando se agregue un número al substraendo, esto menos le faltará para ser igual al minuendo y como la resta debe expresar lo que le falta al substraendo para ser igual al minuendo, se infiere que resultará disminuida la cantidad que se haya agregado al substraendo. Cuando se quite al substraendo una cantidad eso más le faltará para ser igual al minuendo, y por consiguiente la resta resultará aumentada.

50.—Teorema.—*La resta no se altera cuando se agrega ó se quita un mismo número al minuendo y al substraendo.*

Demostración.—Cuando se agrega una cantidad al minuendo, la resta resultará aumentada tantas unidades como tenga la cantidad agregada; pero como cuando se agrega la misma cantidad al substraendo la resta resulta disminuida igual número de unidades; se infiere que la resta habrá aumentado por una operación el mismo número de unidades que ha disminuido por la otra, razón por la cual no sufre ninguna alteración.

Igualmente, cuando se quita una cantidad al minuendo, la resta disminuye; pero como cuando se le quita la misma cantidad al substraendo la resta aumenta tanto como había disminuido; resulta, pues, que no sufrirá alteración.

De esto se infiere el principio general de que *la diferencia entre dos cantidades no se altera cuando á ambas se les agregan ó quitan cantidades iguales.*

51.—El método natural para ejecutar la substracción, está fundado en el último teorema. Cuando queremos averiguar la diferencia, por ejemplo, entre 9 y 4, se va quitando sucesivamente una unidad al minuendo y al substraendo hasta que éste se reduzca á 0, del modo siguiente:

$$9-4=8-3=7-2=6-1=5;\ \text{luego}\ 9-4=5.$$

Como este método sería muy dilatado, es preciso conocer de memoria la diferencia entre los números menores que 20 y las unidades. Esta diferencia se deduce del valor de la suma, pues sabiendo que 4+5=9

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

se infiere que 5 es la diferencia entre 9 y 4. Una vez que se conoce de memoria la diferencia entre las unidades y los números inferiores á 20, la substracción puede ejecutarse fácilmente descomponiendo los números por restar en unidades, decenas, centenas, millares, etc. Si queremos restar 543 de 796, la operación abreviada que se hace en la práctica, debe concebirse como sigue:

796=700+90+6
Menos 543=500+40+3 restando las unidades de las unidades,
——— ——————— las decenas de las decenas, etc.
resulta que

796—543=200+50+3=253.

Puede suceder que alguno de los números del substraendo sea mayor que el correspondiente del minuendo del cual deba restarse. Para comprender lo que se hace en este caso, es necesario recordar que el minuendo es igual á la suma del substraendo con la resta. Si se tiene que restar, por ejemplo, 338 de 865, la operación se dispondrá como antes:

865
Menos 338
———
527

pero siendo 8 unidades mayor que 5, se tiene que buscar un número que sumado con 8 forme, no ya 5, sino 15 unidades. Este número es 7, y como cuando sumamos 8 con 7 ponemos las unidades en el lugar correspondiente y agregamos una decena á las decenas de los sumandos; en el caso actual, la decena comprendida en 15 unidades, suma de 8 con 7, formará parte de las decenas del substraendo que sumadas con la resta han de formar 6 decenas del minuendo. En consecuencia, tendremos que buscar el número que agregado, no á 3 decenas del substraendo, sino á 4, forme 6 decenas del minuendo, el cual es 2; y por esto, cuando alguna cifra del substraendo es mayor que la correspondiente del minuendo, se le agrega á ésta 10 unidades del orden que representa, y al número que sigue á la izquierda de la cifra del substraendo se le agrega una unidad para restarla de la correspondiente del minuendo.

De estas consideraciones se deduce la siguiente:

52.—Regla general.—*Para restar los números enteros se coloca el menor debajo del mayor, teniendo cuidado de que queden las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, las centenas debajo de las centenas, etc. Después se tira una linea horizontal, debajo de la cual*

se escribe el resultado. En seguida se restan las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, etc., y la diferencia se escribe en la columna correspondiente, repitiéndose la misma operación en cada columna hasta la última de la izquierda.

Cuando alguno de los guarismos del substraendo es mayor que el correspondiente del minuendo, se agregan á éste 10 unidades de su orden, y de la suma se resta la cifra inferior, teniendo cuidado, al continuar la resta, de agregar á la cifra del substraendo que sigue inmediatamente á la izquierda una unidad.

53.—Ejemplo.—Se quiere restar de 87.400,538, el número 60,304,365.

87 400 538
—60 304 365
———— ———
27 096 173

Se comienza la operación por la derecha diciendo: de 5 á 8, la diferencia es 3: la cual se escribe en el lugar de las unidades. Como 6 decenas es mayor que 3, se le agregan 10 á la cifra del minuendo, y se dice: de 6 á 13, la diferencia es 7, que se escribe; y va 1, que se agrega á las centenas: 1 y 3 son 4, á 5, la diferencia es 1, que se escribe debajo de las centenas. La operación se sigue así: de 4 á 10, 6; y va 1, á 10, 9; y va 1, y 3 son 4, á 4, 0; de 0 á 7, 7; y por último, de 6 á 8, 2. La diferencia ó resta total, es: 27 096 173. (*)

54.—Demostración.—1° Se han restado las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, las centenas de las centenas, etc., porque *es necesario que sean de la misma especie las cantidades que se restan.* 2° Cuando un guarismo del minuendo es menor que el correspondiente del substraendo y se ejecuta la regla dada para este caso, la resta no sufrirá alteración supuesto que se *han agregado 10 unidades del mismo orden al minuendo y al substraendo* (50). 3° Si con todas las partes de dos cantidades se ejecuta una operación, el resultado es igual al que se obtendría ejecutando con las cantidades la misma operación; practicando la regla hemos encontrado la diferencia entre las unidades, entre las decenas, entre las centenas, etc., del substraendo y del minuendo, que *son las partes de que se componen*, luego habremos encontrado la diferencia entre el substraendo y el minuendo.

(*) Este procedimiento es preferible al de pedir una unidad prestada al guarismo siguiente del minuendo: 1º porque es más sencillo; 2º porque sin ninguna variación es aplicable al caso de que haya ceros; y 3º porque es exactamente el que se emplea para hacer la resta en la división de enteros, como puede verse dividiendo 87.400,538 entre 60.304, 365 y fijándose en la manera de determinar la resta.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

55.—Prueba.—La substracción se prueba sumando el substraendo con la resta, y si no ha habido error, la suma debe ser igual al minuendo, porque la resta expresa la cantidad que le falta al substraendo para ser igual al minuendo.

56.—Casos.—Los casos de la substracción, son dos: 1º *Cuando hay que restar una cantidad de otra una sola vez.* 2º *Cuando una cantidad se debe restar de otra cuantas veces sea posible.*

Primer caso 445—387=58

Segundo caso, restar 151 de 453 cuantas veces se pueda.

453
—151
———
302
—151
———
151
—151
———
000 luego 453 es igual á 3 veces 151.

Como habrá podido observarse, estos dos casos son distintos, no porque sean diferentes los valores numéricos del minuendo y del substraendo, sino por *ser diversa la condición* de restar una cantidad de otra *una sola vez*, de la de restarla *cuantas veces sea posible.*

El primer caso se resuelve por la regla general, y la ejecución del segundo se facilita mucho por medio de la división, operación que no es más que el segundo caso de la substracción abreviado.

57.—Usos.—El primer caso tiene los usos á que da lugar el objeto de la operación, por lo que se emplea; primero, cuando se quiere conocer la diferencia entre dos cantidades; segundo, cuando se quiere encontrar un número que sumado con otro conocido, forme una cantidad propuesta, lo que equivale á hallar el *exceso* de un número sobre otro: y tercero, cuando se quiere quitar á un número el valor de otro: que es propiamente *restarlo.*

El segundo caso de la substracción tiene cuatro usos:

1º *Ver cuántas veces un número contiene á otro:* 2º *Reducir unidades de especie menor á mayor.* 3º *Conocido el valor de muchas unidades y el número de ellas, determinar el valor de una unidad.* 4º *Conocido el valor de muchas unidades y el de una sola, determinar el número de ellas.*

58.—Para ejercicio pondremos los siguientes ejemplos:

84 367 965	30 409 700	45 000 040
—37 478 704	—15 700 967	—12 673 436
46 889 261	14 708 733	32 326 604

Omitimos poner ejemplos de los usos del 2º caso, porque éstos se resuelven con más facilidad por medio de la división.

Nuestra Madre me dio

MULTIPLICACION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

59.—Ya hemos dicho en el párrafo 43, que cuando en la suma los sumandos son iguales, la operación se facilita por medio de la multiplicación, operación que es en realidad el segundo caso de la suma abreviado.

Cuando queremos sumar, por ejemplo, 16 cinco veces, esto es:

16+16+16+16+16=80;

esto equivale á buscar un valor igual á cinco veces 16, ó á encontrar una cantidad 5 veces mayor que 16. Tal es el objeto de la multiplicación.

La operación se indica con el signo × multiplicado por, ó por medio de un punto puesto entre las dos cantidades.

16×5=80, ó 16.5=80.

Se lee 16 multiplicado por 5 igual á 80.

La cantidad que se había de sumar se llama *multiplicando;* la que indica el número de veces que se había de sumar, se llama *multiplicador*, y el resultado *producto.* Al multiplicando y al multiplicador juntos se les llama *factores del producto.*

El producto es de la misma especie que el multiplicando; y el multiplicador, que en rigor puede considerarse como número abstracto, es las más veces de una especie diferente de la del multiplicando.

Definición.—*La multiplicación de los números enteros es la operación por medio de la cual se suma ó se toma un número tantas veces como unidades hay en otro.*

El objeto de la multiplicación es formar una cantidad que tenga con un número dado la misma relación que otro tiene con la unidad.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

60.—Primer teorema—*El valor del producto de dos cantidades, no se altera cuando se invierte el orden de los factores.*

Esto es: $3\times5=5\times3$

Demostración.—Cuando los factores son dos, se puede descomponer el multiplicando en las unidades que lo forman y después multiplicarlas por el multiplicador, con lo cual se obtiene por resultado el multiplicador repetido ó sumado tantas veces como unidades hay en el multiplicando.

Así $5\times3=(1+1+1+1+1)\times3$

ejecutando la multiplicación se obtiene

$$5\times3=3+3+3+3+3=3\times5$$

luego $5\times3=3\times5$

En el caso de que tengamos formado un producto por tres factores, por ejemplo,

$$3\times5\times7=105$$

demostraremos que el primer factor 3 puede ocupar el segundo ó el tercer lugar sin que se altere el valor del producto.

Como $3\times5=5\times3$

se infiere que $3\times5\times7=5\times3\times7$ . . . . . (1)

Como $3\times7=7\times3$

se infiere que $3\times5\times7=5\times7\times3$ . . . . . (2)

luego $3\times5\times7=5\times3\times7=5\times7\times3$

61.—Segundo teorema.—*Si se hace á uno de los factores cierto número de veces mayor, el producto resultará igual número de veces mayor.*

Demostración.—Sea $6\times4=24$. Si á 6 lo hacemos tres veces mayor, la operación se cambiará en

$$18\times4=72$$

y tendremos que demostrar que 18×4 es igual á 24×3.

Como $18=6\times3$, tendremos:

$$18\times4=6\times3\times4$$

invirtiendo el orden de los factores se tiene·

$$18\times4=6\times4\times3$$

y como $6\times4=24$, finalmente resulta:

$$18\times4=24\times3$$

que es lo que se quería demostrar.

Ahora, como el valor del producto no se altera tomando por multiplicando el multiplicador, resulta que el principio es cierto para cualquiera de los factores.

62.—Tercer teorema.—*Si se hace á uno de los factores cierto número de veces menor, el producto resultará el mismo número de veces menor.*

Demostración.—Si sabemos que

$$15\times4=60$$

y hacemos á uno de los factores, 15, por ejemplo, 3 veces menor,

decimos que $5\times4=20$

será 3 veces menor que 60.

En efecto, por ser 15 *tres* veces mayor que el factor 5, el producto, 60, conforme al teorema anterior, será *tres* veces mayor que 20, y en consecuencia

5×4 será *tres* veces menor que 15×4

que es lo que se quería demostrar.

De lo expuesto resulta que *el producto experimentará variaciones semejantes á las que tenga cualquiera de los factores.*

63.—Cuarto teorema.—*El producto de dos factores no se altera cuando uno de ellos se aumenta, y el otro se disminuye el mismo número de veces.*

Demostración.—Cuando se aumenta uno de los factores, el producto se hace cierto número de veces mayor, pero como cuando se disminuye igual número de veces el otro factor, se hace el producto menor tanto como antes se hizo mayor, resulta que hay perfecta compensación quedando el producto con igual valor.

64.—Quinto teorema.—*Toda cantidad multiplicada por* 1 *da por producto la misma cantidad.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Demostración.—Porque como cuando el multiplicador es la unidad, esto indica que el multiplicando se ha de tomar ó sumar una vez para obtener el resultado, naturalmente éste, que es el producto, será igual al multiplicando.

65.—Sexto teorema.—*Toda cantidad multiplicada por cero da cero por producto.*

Demostración.—Como el valor del producto no se altera cuando se invierte el orden de los factores (60), se tendrá, por ejemplo que

$$16\times0=0\times16$$

Ahora bien, como si se suma 0 diez y seis veces consigo mismo el resultado es 0,

tendremos $0\times16=0$

luego $16\times0=0$

que es lo que se debía demostrar; y como el raciocinio hecho con 16 es aplicable á cualquier número, resulta que toda cantidad multiplicada por cero dará cero por producto.

Debe notarse que cuando se multiplica una cantidad por 1 ó por 0 el producto no es mayor que cualquiera de los factores. La multiplicación, según hemos dicho, es una operación por medio de la cual se obtiene un resultado que tiene con una cantidad conocida (con el multiplicando), la misma relación que otra cantidad (el multiplicador), tiene con la unidad. Esto explica por qué en matemáticas no siempre produce la multiplicación el aumento que podría atribuírsele por la significación de la palabra en el lenguaje común.

66.—Para ejecutar la multiplicación de dos números de cualquiera magnitud es preciso conocer primero los productos de los guarismos que representan unidades simples, y los cuales se encuentran en la tabla adjunta llamada de Pitágoras. Esta se forma escribiendo en una línea horizontal los 10 primeros números: en seguida, se va sumando cada uno consigo mismo 10 veces, escribiendo cada suma debajo de la anterior en la misma columna vertical. Para formar, por ejemplo, los productos de 5, después de escrito el primer renglón, se sumará 5 con 5 y se escribe 10 debajo: $10+5=15$ que se escribe debajo de 10: $15+5=20$: $20+5=25$, etc., y de este modo se obtienen los productos de 5 por 1, por 2, por 3, por 4, etc.

TABLA DE PITAGORAS.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Si se quiere encontrar, por ejemplo, el producto de 8 por 4 bastará bajar en la columna vertical debajo del 8 hasta la intersección de la línea horizontal de 4, y 32 será el producto de 8 por 4.

Así pues, el producto de dos factores que no pase de 10 puede obtenerse por medio de la tabla, cuando no se conoce á la memoria.

Esta tabla es una nueva demostración de que el producto es el mismo cualquiera que sea el orden de los factores, supuesto que las columnas generadoras de los productos, esto es, la horizontal y la vertical pueden invertirse sin variación del producto. La demostración se concibe que es general dando suficiente extensión á la tabla.

Cuando uno de los factores tiene más de una cifra, se considera éste dividido en unidades, decenas, centenas, etc., y se ejecuta la multiplicación por partes. Para multiplicar, por ejemplo, el número 9,437 por 4, basta considerar la suma que sería necesario efectuar, para comprender el fundamento de la operación. La columna de las unidades contiene el número 7, repetido cuatro veces; luego para encontrar la suma de las unidades bastará multiplicar 7 por 4 igual á 28, poner 8

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

unidades y retener 2 decenas para reunirlas á las de su especie; en la columna compuesta de 3 repetido 4 veces igual á 12, más dos decenas retenidas forman 14; se pone 4 y se retiene una centena para reunirla á las centenas, etc. Hemos representado debajo de la suma la multiplicación, y así se ve que *la operación equivale á multiplicar cada una de las cifras del multiplicando por el multiplicador, comenzando por las de especie menor; cada producto se escribe debajo de la cifra de que procede y se retienen las decenas para reunirlas al producto del guarismo siguiente.*

9 437
9 437
9 437
9 437
37 748
9 437
4
37 748

Cuando ambos factores constan de más de un guarismo, se descompone el multiplicador en las unidades, decenas, centenas, etc., de que consta: se multiplica el multiplicando por cada una de las partes del multiplicador, y el producto total es igual á la suma de los productos parciales.

Si se quiere, por ejemplo, multiplicar 9,437 por 864, se tendrá que

$$9437\times864=9437\times4+9437\times60+9437\times800$$

y en consecuencia, se multiplicará 9437 por 4, por 60 y por 800 que son las partes del multiplicador y después se sumarán los tres productos. El primero de 9437 por 4=37748 se forma como acaba de explicarse. El de 9437 por 60 se obtiene multiplicando cada una de sus cifras por 6, pero como 60 es 10 veces mayor que 6, se tiene cuidado de que este producto exprese decenas y no unidades, para lo cual se agrega un cero á la derecha del primer producto de 6 por las unidades del multiplicando, á fin de dar al producto parcial el valor que le corresponde. En efecto, 9437 multiplicado por 6 unidades, produce 56622 unidades; pero como lo que se busca es el producto por 60, que es 10 veces mayor que 6 unidades, será necesario hacer el producto 10 veces mayor, lo cual se consigue agregando un cero á la derecha ó colocando este producto en el lugar correspondiente. Para obtener el producto por 800 se multiplican todas las cifras del multiplicando por 8, y se agregan dos ceros á la derecha. Por último, se suman los tres productos parciales para formar el total.

9437
864
37748
566220
7549600
8153568

67.—Tales son los fundamentos de la siguiente:

Regla general para multiplicar los enteros.—1°—*Cuando ambos factores tienen un solo guarismo, el producto se obtiene á la memoria ó por la tabla de Pitágoras.*

2°—*Cuando uno de los factores tiene varias cifras y el otro consta de un solo guarismo, se coloca este comunmente debajo del número mayor, se tira una línea horizontal para separar el producto, y se comienza á multiplicar cada una de las cifras del factor mayor, comenzando por las unidades, por el guarismo del multiplicador: se escriben las unidades de cada producto en el orden de la cifra del multiplicando de que procede, y las decenas que contenga se reunen al producto de la cifra siguiente, y así se continúa la operación hasta multiplicar el guarismo de mayor especie, cuyo producto se escribe tal como sale.*

3°—*Cuando ambos factores tienen varias cifras, se escribe comunmente el menor debajo del mayor, y se tira una línea horizontal para separar los factores de los productos parciales. Conforme á la regla anterior, se forma el producto del multiplicando por las unidades del multiplicador: en seguida se forma el producto del multiplicando por el guarismo de las decenas del multiplicador, escribiendo el primer guarismo de este producto en la columna de las decenas; después se forma el producto del multiplicando por el guarismo de las centenas del multiplicador, escribiendo el primer guarismo en la columna de las centenas, y así se continuará la operación; sumando, por último, los productos parciales.*

68.—Ejemplo.—Sea por multiplicar 72048 por 347. Conforme á la regla, las cantidades se escribirán como se ve al lado. Se multiplicarán por 7 todos los guarismos del multiplicando, comenzando por las unidades, diciendo: 7 por 8, 56; se ponen 6 unidades y se retienen 5 decenas para unirlas al producto de 7 por 4 decenas, son 28, y 5, 33; se escribe 3 y se retienen las 3 decenas; 7 por 0 es 0 y 3 son 3; 7 por 2, 14; se escribe 4 y va 1; 7 por 7, 49 y 1, 50 que se escribe. Después se multiplican todas las cifras del multiplicando por 4 decenas, y como este producto parcial debe expresar decenas, el primer producto de 8 por 4 se escribe en el lugar de las decenas, omitiéndose el 0, que por claridad podría ponerse á la derecha. En seguida se multiplican todas las cifras del multiplicando por 3 centenas, escribiendo el primer producto de 3 por 8 en el lugar de las centenas para que este producto parcial exprese centenas. Por último, se suman los productos parciales para obtener el total.

72048
347
504336
288192
216144
25000656

Obsérvese que el producto de los números enteros consta de tantos guarismos como tienen ambos factores juntos ó de uno menos. Para comprender el fundamento de lo cual, basta observar en el ejemplo propuesto, que siendo 347 mayor que 100 y menor que 1000, el producto estará entre los límites 7204800 y 72048000, esto es, constará de tantas cifras como tiene el multiplicando mas dos ó tres guarismos, que es la suma de los dos factores ó una menos.

69.—Demostración de la regla general.—Cuando con todas las par-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

tes que constituyen una cantidad se ejecuta una operación, el resultado es el mismo que si se ejecutara la operación con toda la cantidad: practicando la regla hemos multiplicado las unidades, decenas, centenas, etc. del multiplicando, por las unidades, decenas, centenas, etc., del multiplicador, luego habremos obtenido el producto del multiplicando por el multiplicador. Cuando multiplicamos el multiplicando por el guarismo que representa las decenas del multiplicador considerándolo como unidades, el producto parcial resultaría 10 veces menor que el verdadero; pero escribiendo este producto en el lugar de las decenas, le damos el valor que le corresponde, y así obtenemos el verdadero producto del multiplicando por las decenas del multiplicador; continuando la operación conforme á la regla, y escribiendo el producto de las centenas del multiplicador en la columna de las centenas, el producto de los millares en la columna de los millares, etc., haremos que cada producto parcial tenga el valor que debe tener.

70.—Prueba.—Sea por multiplicar 718345 por 867. Después de ejecutar la multiplicación, para hacer la prueba sumamos las cifras del multiplicando:

718345	28,	10,	1
867	21		3
5028415			3
4310070			
5746760			
622805115	30		3

$7+1+8+3+4+5=28$;

como 28 contiene decenas, volvemos á sumar los guarismos que lo forman:

$2+8=10$: y por último, $1+0=1$ que es el resultado final de la suma de los guarismos del multiplicando. En seguida se suman los guarismos del multiplicador.

$8+6+7=21$, y $2+1=3$.

De igual manera se suman las cifras significativas del producto:

$6+2+2+8+0+5+1+1+5=30$, y $3+0=3$

Ahora formamos el producto de la cifra 1, que resultó del multiplicando por la 3, que provino del multiplicador, y si el producto, 3, resulta igual á la cifra 3, que dió la suma de los guarismos del producto, es prueba de que no se cometió ningún error en la ejecución de la multiplicación.

Definición.—En las pruebas de la multiplicación y de la división de enteros entendemos por *reducir una cantidad á unidades simples, sumar unas con otras todas sus cifras significativas; si la suma, además de unidades consta de decenas, de centenas, etc., se suman entre sí las cifras de la suma, y si fuere necesario, los guarismos de la nueva suma y los de las siguientes hasta obtener como resultado unidades simples.*

Regla.—*Para hacer la prueba de la multiplicación de los números enteros, se reducen á unidades simples el multiplicando, el multiplicador y el producto. Se forma el producto de la cifra que resultó del multiplicando por la del multiplicador, reduciendo si fuese necesario, este pequeño producto á unidades simples; debiendo obtenerse, cuando no ha habido error, un guarismo igual al que resultó de reducir á unidades simples el producto del multiplicando por el multiplicador.*

Nos falta conocer las propiedades de los factores y divisores de los números, que expondremos al fin de enteros, para dar la demostración de esta regla, que puede verse en el párrafo 132.

71.—*Los casos de la multiplicación son siete.*

1°—*Cuando ambos factores tienen un solo guarismo.*

2°—*Cuando uno de los factores tiene un solo guarismo y el otro varios.*

3°—*Cuando ambos factores tienen más de un guarismo.*

4°—*Cuando uno de los factores es la unidad seguida de ceros.*

5°—*Cuando alguno ó ambos factores terminan en ceros.*

6°—*Cuando entre las cifras del multiplicador hay uno ó varios ceros, y*

7°—*Cuando la primera ó la última cifra del multiplicador es la unidad.*

El primer caso se resuelve á la memoria, y el 2° y 3° conforme á la regla general (67).

Cuarto caso.—Cuando uno de los factores es la unidad seguida de ceros, se obtiene el producto agregando al otro factor tantos ceros como son los que acompañan á la unidad, conforme á lo demostrado en el número 20, pues esto equivale á hacer el otro factor 10, 100, 1000, etc., veces mayor.

Quinto caso.—Cuando alguno ó ambos factores terminan en ceros, para obtener el producto se hace abstracción de dichos ceros, se multiplican las cifras significativas por la regla general, y al producto se le agregan tantos ceros, como sean los que tienen los factores.

Demostración.—Cuando se hace abstracción de los ceros con que termina el multiplicando, lo hacemos menor (20), 10, 100, 1000, etc., veces, y en consecuencia, el producto resultará igual número de veces menor (62). Cuando hacemos abstracción de los ceros del multiplicador, hacemos á este factor, y en consecuencia, al produto, cierto número de

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

veces menor. Pero como al agregar al producto tantos ceros á la derecha como hay en ambos factores juntos, lo hacemos tantas veces mayor (20) como antes se había hecho menor al hacer abstracción de los ceros, resulta que restituiremos al producto el valor que le corresponde, por lo cual será el verdadero.

Sexto caso.—Cuando entre las cifras del multiplicador hay uno ó varios ceros, para obtener el producto se omite multiplicar el multiplicando por los ceros del multiplicador, teniendo cuidado de colocar la primera cifra significativa de cada producto parcial en la columna del orden de unidades que representa la cifra del multiplicador que lo ha producido.

Sea por ejemplo, multiplicar 764789 por 20008.

Demostración.—El producto total se compone de la suma de los productos del multiplicando por las partes de que está formado el multiplicador, y como en el caso de que nos ocupamos, éste carece de decenas, centenas y millares, no habrá productos parciales producidos por las decenas, ni por las centenas, ni por los millares; pero para que el producto parcial de las decenas de millar tenga el valor que le corresponde, debemos hacer que exprese decenas de millar, lo cual se consigue colocando el producto de las unidades del multiplicando en la columna del orden de unidades de la cifra del multiplicador.

	764789
	20008
	6118312
	1529578
	15301898312

Septimo caso.—Cuando la primera ó la última cifra del multiplicador es la unidad, para obtener el producto, se deja el multiplicando como primer producto parcial, y se colocan los de las demás cifras significativas en la columna que corresponda al orden de unidades de la cifra del multiplicador.

Sea por multiplicar 2789 por 241: la operación se dispone como se ve al lado.

Demostración.—El fundamento de esta operación es que toda cantidad multiplicada por la unidad, produce la misma cantidad: y en que á cada producto parcial se le da el valor que le corresponde.

Este caso es de frecuente aplicación para los factores entre 10 y 20, que son tan comunes, colocándose entonces el multiplicando en el lugar del producto parcial de las decenas, como es debido.

Sea por multiplicar 346785 por 16. La operación se dispone y ejecuta como se ve aquí al lado.

	2789×241
	11156
	5578
	672149
	346785×16
	2080710
	5548560

72.—Usos de la multiplicación.—Los usos de la multiplicación son los mismos que los del 2.° caso de la suma, esto es:

1.°—*Conocido el valor de una unidad determinar el de muchas.*

2.°—*Reducir unidades de especie mayor á menor*, y además los que se derivan de la naturaleza de la multiplicación como son: sumar ó tomar una cantidad cierto número de veces, hacer una cantidad cierto número de veces mayor, etc.

73.—Como ejercicio de la multiplicación pondremos los siguientes ejemplos:

1.°—Se quiere saber cuál será el costo de construcción de un ferrocarril de 186 millas de longitud, calculando el costo de cada milla á razón de $49700.

2.°—Se quiere saber qué cantidad de algodón podrá cosecharse en una extensión de terreno igual á 5209 hectaras, bajo el supuesto de que una hectara produce 708 libras de algodón.

3.°—Se quiere reducir 97658 quintales á onzas, componiéndose un quintal de 1600 onzas.

4.°—Se quiere reducir 3809 leguas á pulgadas, dividiéndose una legua en 5000 varas y una vara en 36 pulgadas.

1.° millas	2.° hectáreas.	3.° quintales. onzas.	4.° leguas.
$49700×186	5209	97658×1600	3809
3976	708 lb.	585948	5000
2982	41672	onz. 156252800	vs. 19045000
$9244200	36463		36
	3687972 lb.		114270
			57135
			pulgs. 685620000

DIVISION DE LOS NUMEROS ENTEROS.

74.—En el número 56 dijimos que la ejecución del 2° caso de la resta, se facilita por medio de la división, operación que es en realidad, el 2.° caso de la resta abreviado. La división es una operación recíproca de la multiplicación. Cuando se multiplica 3 por 4, se conocen los

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

dos factores y se busca el producto 12. En la división, conocido el producto 12 y uno de los factores 3, se trata de encontrar cuál es el otro factor, que multiplicado por 3 dé 12.

La división se indica de tres maneras:

$$\frac{12}{3}=4 \qquad 12\div 3=4 \qquad \text{y} \qquad 12:3=4$$

y se lee: 12, dividido, ó partido por 3, igual á 4.

La cantidad que se ha de dividir se llama *dividendo:* aquella por la cual se ha de dividir, *divisor:* y el resultado de la operación, *cociente.* El dividendo es, pues, el producto del divisor por el cociente.

El dividendo y el divisor suelen ser de la misma especie; otras veces son cantidades heterogéneas, y á veces el divisor es abstracto. *Respecto de la especie de las unidades del cociente, debe tenerse presente que no siempre es de la especie del dividendo, ni de la del divisor, sino que la determina la pregunta.*

Por ejemplo, si partimos $12 entre 3 hombres y queremos saber *cuántos pesos* le tocan á cada hombre, el cociente expresará pesos por indicarlo la pregunta.

Si se quiere saber *á cuántas varas* equivalen 12 piés, dividiremos 12 piés por 3 piés, que tiene una vara, y el cociente 4 nos expresará varas, siendo en este caso de especie diferente de la del dividendo y de la del divisor.

75.—Definición.—*La división de los números enteros es la operación por medio de la cual se determina cuántas veces un número contiene á otro.*

Puede decirse igualmente *que la división tiene por objeto, conocido el producto y uno de sus factores, determinar el otro factor.*

76.—Teorema.—*Cuando se multiplica el dividendo por un número, el cociente resultará multiplicado, y si se divide, resultará dividido el cociente por el mismo número.*

Porque siendo el dividendo el producto del divisor por el cociente, al hacerse este producto cierto número de veces mayor, tendrá que hacerse uno de sus factores el mismo número de veces mayor; pero como el divisor permanece constante, resulta que el otro factor que es el cociente, tendrá que multiplicarse por el mismo número por el que se haya multiplicado el dividendo (61.) Recíprocamente, si se divide el dividendo, á causa de permanecer constante el divisor, el cociente que es el otro factor del dividendo, tendrá que resultar dividido. (62.)

77.—Teorema.—*Si se multiplica el divisor por un número, el cociente resultará dividido, y si se divide resultará multiplicado por el mismo número.*

Porque siendo el dividendo el producto del divisor por el cociente, es necesario que al multiplicarse el divisor, que es uno de los factores, por un número, el cociente que es el otro factor, se divida por el mismo número para que permanezca invariable el dividendo; y recíprocamente será necesario multiplicar el cociente por el número por que se divida el divisor (63) para que no se altere el dividendo.

78.—De los teoremas anteriores resulta que *en la división de los números enteros el cociente experimenta variaciones en el mismo sentido de las que se hacen sufrir al dividendo: y en sentido contrario de las que tenga el divisor.*

79.—Teorema.—*El cociente no se altera cuando se multiplican ó se dividen el dividendo y el divisor por el mismo número.*

Demostración.—Cuando se multiplica el dividendo por un número, el cociente se hace mayor tantas veces como unidades tiene este número (76); pero como cuando se multiplica el divisor, el cociente se hace menor el mismo número de veces (77), resulta que habrá perfecta compensación, y aumentando por una operación tanto cuanto disminuye por la otra el cociente permanecerá invariable.

Cuando se divide el dividendo, el cociente se hace menor tantas veces como unidades tiene el número por el que se divide el dividendo [76]; pero como cuando se divide el divisor, el cociente se hace mayor el mismo número de veces (77); resulta que habiendo perfecta compensación, el cociente permanecerá invariable.

80.—Teorema.—*Cuando hay que ejecutar varias divisiones sucesivas es arbitrario el orden en que deban efectuarse, pudiendo hacerse una sola tomando por divisor el producto de todos los divisores.*

Si se divide 30 por 3, y en seguida el cociente 10 se divide por 2, decimos: que el resultado 5 de estas divisiones sucesivas será igual al que se obtiene dividiendo primero 30 por 2, y en seguida dividiendo el cociente 15 por 3; é igual al que se obtiene dividiendo 30 por 6, producto de los divisores 3 y 2. Esto es:

$$(30\div 3)\div 2=(30\div 2)\div 3=30\div(3\times 2).$$

Demostración.—Como el objeto de la división es determinar uno de los factores de un producto, resulta que *si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, el cociente será el otro factor.*

Luego para dividir una cantidad compuesta de varios factores por uno de ellos, bastará suprimir éste para obtener el cociente; y como en el ejemplo tomado por base de nuestra demostración se tiene que

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$30=3\times2\times5=6\times5$$

se infiere que para obtener el cociente de las divisiones sucesivas de 30 por 3 y por 2, es indiferente suprimir primero el factor 3 y en seguida 2 ó viceversa, ó ambos á la vez para obtener el cociente final de 5.

81.—Teorema—*El cociente de toda cantidad dividida por la unidad es la misma cantidad.*

Demostración.—Como toda cantidad multiplicada por la unidad produce la misma cantidad, (64) y el dividendo es el producto del divisor, (que en este caso es la unidad) por el cociente, éste tendrá que ser igual al dividendo, para que multiplicado por la unidad, dé por producto el mismo dividendo.

82.—Fundamento de la regla para la división de enteros.—Supuesto que la división es una operación recíproca de la multiplicación, el conocimiento de los productos de las unidades simples nos conduce á determinar los cocientes de los números inferiores á 100 divididos por las unidades. Si sabemos que $8\times7=56$, inferimos que $56\div8=7$. Cuando no se saben de memoria estos cocientes, la tabla de Pitágoras (66) puede servir para hacerlos conocer. Se busca el divisor en la línea horizontal, 8 por ejemplo, y después se recorre la columna vertical de los números que quedan debajo del 8, hasta encontrar el número 56; recorriendo entonces la línea horizontal, el guarismo 7 que la termina nos indica el cociente de $56\div8$.

El producto de dos números enteros es siempre un número entero: pero como no todos los números provienen del producto de dos números enteros, resulta que en el mayor número de casos el cociente es un número mixto. Así, por ejemplo, como $8\times2=16$, y $8\times3=24$, todos los números intermedios entre 16 y 24, carecen de cociente entero cuando se les divide por 8, supuesto que es necesario multiplicar 8 por un número mayor que 2 y menor que 3. En este caso, que es el más común, el dividendo se compone de un producto, más una cantidad *que se llama resta;* por ejemplo, $19=(8\times2)+3$.

Cuando se busca el cociente de un número que no es divisible exactamente por otro, se determina el cociente de otro número menor que el dividendo que dé un cociente exacto y *una resta menor que el divisor.* Si se quiere conocer el cociente de $50\div8$, se tiene $6\times8=48$, y $7\times8=56$; luego 50 está entre los productos de 8 por 6 y por 7: se toma el próximo menor 6 y el producto 48 se resta de 50 para determinar la resta 2.

$$50=8\times6+2$$

Conocido el cociente de las cantidades menores que 100 divididas por las unidades, se puede fácilmente obtener el cociente de cualquiera cantidad dividida por un número inferior á 10. Para esto se descompone el dividendo en las partes que lo forman, según los órdenes del sistema de numeración; se dividen estas partes por el divisor y se obtienen tantos cocientes parciales como sean las partes del dividendo, cuya suma nos dará el cociente total.

Cuando tanto el dividendo como el divisor tienen muchas cifras, la operación se hace igualmente por partes. Para esto, comenzando por las unidades de orden superior del dividendo, se dividen por el divisor sucesivamente todas las partes de que está formado, y el cociente es igual á la suma de los cocientes parciales. La operación abreviada de la práctica debe concebirse como sigue:

Sea por dividir 1720312 por 4972. Como los cocientes parciales han de estar formados de un solo guarismo, con el objeto de encontrar el primer cociente parcial, separaremos del dividendo los guarismos suficientes de la izquierda para formar la cantidad próxima mayor á 4972, que es 17203, y en consecuencia, consideramos el dividendo compuesto de centenas, decenas y unidades, esto es, $1720312=1720300+10+2$ que dividiremos sucesivamente por 4972. Para hallar el primer cociente, dividiremos 17203 por 4972 y encontraremos el cociente 3: pero como 17203 es 100 veces menor que 1720300, dividendo parcial verdadero, al cociente le agregaremos dos ceros para darle el valor que le corresponde, haciéndolo 100 veces mayor y obtendremos 300 como primer cociente parcial. Multiplicando este número por el divisor, se obtiene el producto 1491600, que restado de la primera parte del dividendo deja la resta 228700. A esta se le agrega la segunda parte del dividendo 10, y dividida la suma por el divisor, se obtiene, haciendo consideraciones semejantes, por segundo cociente parcial 40, y la resta 29830. A esta se le agrega 2, última parte del dividendo, y se obtiene 6 unidades como último cociente parcial, que multiplicado por el divisor produce 29832 y 0 por resta, por lo cual la división es exacta y el cociente igual á 346, suma de los tres cocientes parciales.

1720300+10+2	4972
−1491600	300
228700	40
+ 10	6
228710	346
− 198880	
29830	
+ 2	
29832	
− 29832	
0000	

83.—Tales son los fundamentos de la siguiente

REGLA GENERAL PARA DIVIDIR LOS NÚMEROS ENTEROS.—*A la derecha del dividendo se escribe el divisor separado por una línea vertical, y se tira otra horizontal para poner debajo de ella el cociente.*

El primer dividendo parcial se forma separando con una coma de la izquierda del dividendo tantos guarismos como tiene el divisor ó uno más para formar una cantidad mayor que el divisor; y á fin de determinar el primer guarismo del cociente se divide la primera ó las dos primeras cifras del dividendo por la primera del divisor, y el número que resulte se escribe debajo del divisor. En seguida se multiplica este guarismo del cociente por el divisor, y el producto se va restando á paso y medida que se forma de las cifras separadas del dividendo.

Para formar el segundo dividendo parcial se baja al lado de la resta la cifra siguiente del dividendo y se determina el segundo guarismo del cociente, lo mismo que se determinó el primero, á cuya derecha se escribe. Se multiplica el divisor por el segundo guarismo del cociente y al formar el producto se va restando del dividendo parcial, y así se continúa la operación hasta obtener las unidades del cociente y la última resta.

Cuando alguno de los dividendos parciales es menor que el divisor, se pone cero en el cociente antes de bajar la cifra siguiente del dividendo y continuar la operación.

Se conoce que un cociente parcial es mayor que el verdadero, en que su producto por el divisor resulta mayor que el dividendo parcial; y se conoce que un cociente parcial es menor que el verdadero, en que la resta resulta mayor que el divisor. En ambos casos debe corregirse el cociente y repetirse la multiplicación por el divisor haciendo la resta.

84.—Para encontrar fácilmente los cocientes parciales, puede seguirse la siguiente regla: *Después de haber encontrado el cociente, dividiendo el primero ó los dos primeros guarismos del dividendo por el primero del divisor, se comienza á hacer la multiplicación y la resta por las cifras de orden superior: si el producto no puede restarse, el cociente será mayor que el verdadero; en caso contrario, se formará con la resta y la cifra de orden inmediatamente menor del dividendo una cantidad de la cual se restará el producto del cociente por el guarismo que sigue del divisor, y así se continuará la operación hasta que un producto no pueda restarse, ó hasta hallar una resta igual ó mayor que el guarismo del cociente. Cuando se encuentra un producto mayor que el dividendo, el cociente será mayor que el buscado, y cuando se obtiene una resta igual ó mayor que el cociente, éste será el verdadero, ó tal vez menor que el verdadero.*

Por ejemplo, vamos á buscar el cociente de 372456 dividido por

6945. 37 entre 6 á 6, y decimos: 6 por 6, 36, á 37, 1, que unido al 2 siguiente del dividendo forma 12; 6 por 9, 54, que no pudiendo restarse de 12, nos indica que 6 es un cociente muy fuerte. Repetimos la operación con el cociente 5. Multiplicando 5 por 6 da 30, á 37, 7; resta que siendo mayor que el cociente 5 nos indica que este número es el cociente verdadero, supuesto que ya probamos que 6 no puede serlo. Esta operación auxiliar se ejecuta siempre á la memoria. La razón de esta parte de la regla es que la cifra retenida al formar el producto de un número por otro que no llega á 10, es menor que el multiplicador; y en consecuencia, cuando comenzando por las unidades de especie mayor se obtiene una resta igual ó mayor que el cociente, es seguro que podrá hacerse la resta al ejecutar la operación en el orden directo.

```
372456 | 6945
1      | 6
```

```
372456 | 6945
7      | 5
```

85.—EJEMPLO.—Sea por dividir 28.003,842 por 875. Conforme á la regla, las cantidades se escriben como se ve en la operación adjunta. Separando tres cifras del dividendo, resulta 280 que no puede contener al divisor 875, por lo que tomaremos cuatro cifras, 2800 que representan decenas de millar, de cuyo orden será el primer guarismo del cociente. Dividiendo 28 entre 8, se obtiene 3 por cociente. El producto y la resta se forman como sigue: 3 por 5, 15, á 20, 5 y van 2; 3 por 7, 21, y 2 retenidas son 23, á 30, 7 y van 3; 3 por 8, 24, y 3, 27, á 28, 1. Al lado de la resta 175, que es menor que 875, se baja el guarismo 3 del dividendo, y dividiendo 1753 entre 875 se encuentra el cociente 2, que se pone á la derecha de 3; y la resta 3. Al lado de esta resta se baja el guarismo 8, y como 38 no puede dividirse entre 875 se pone 0 en el cociente y se baja el 4 del dividendo. Como 384 es menor que el divisor, se pone otro 0 en el cociente y se baja el 2 del dividendo. Dividiendo 3842 por el divisor, se encuentra 4 unidades por cociente, y la resta 342.

```
28003842 | 875
1753     | 32004
003842
342
```

El cociente es 32004 y la resta 342. Esto es,

28003842=875×32004+342. Con la resta y el divisor se forma un quebrado como lo explicaremos en el párrafo 150.

El cociente de dos números enteros consta de tantos guarismos como tiene el dividendo, menos los del divisor, ó de uno más. En efecto, el cociente consta de la cifra que resulta de dividir el primer dividendo parcial por el divisor y de una cifra más por cada una de las que se separaron á la derecha. Cuando el primer dividendo parcial tenga una

cifra más que el divisor, el cociente constará de tantas cifras como tenga el dividendo menos las del divisor; y cuando el primer dividendo parcial tenga igual número de cifras que el divisor, el cociente constará de tantas cifras como tenga el dividendo menos las del divisor y de una más.

86.—Demostración de la regla general de dividir enteros.—Cuando con todas las partes que constituyen una cantidad, se ejecuta una operación, el resultado es el mismo que se obtiene de ejecutar con toda la cantidad la misma operación. Practicando la regla hemos encontrado el cociente de todas las partes del dividendo divididas por el divisor, y hemos dado á cada cociente parcial el valor que le corresponde; luego la suma de los cocientes parciales, que es el cociente obtenido, será el valor verdadero del dividendo dividido por el divisor.

87.—Prueba.—Para ejecutar la prueba de la división procederemos como en el siguiente ejemplo:

734645	638
966	1151
3284	
945	
307	

La suma de los guarismos del dividendo da 29; sumando los dos de esta cantidad se obtiene 11, y los de esta dan 2 *unidades*. La suma de los guarismos del divisor da 17 y la de los del 17 da 8. Los del cociente dan 8. La suma de los guarismos de la resta da 10 y los de este número, 1 *unidad*. Ahora multiplicamos el número que procede del divisor por el del cociente: 8×8=64, agregamos el de la resta 1; y sumamos los guarismos del resultado 65, 6+5=11, 1+1=2, hasta obtener *unidades*. El número encontrado, 2, deberá ser igual al que procede del dividendo 2, si la operación ha estado bien hecha.

PRUEBA.

Dividendo.	*Divisor.*
29....11....2	17....,8
Resta....1	8 cociente.
8×8=64+1=65.....11.....2	
Suma del dividendo.....2	

Regla.—*Para hacer la prueba de la división de los números enteros, se reducen á unidades simples separadamente el dividendo, el divisor, el cociente y la resta. Se forma el producto de la cifra del cociente por la del divisor y se agrega la de la resta. El resultado se reduce á unidades simples; debiendo obtenerse, cuando no ha habido error en la división, un guarismo igual al que resultó de reducir á unidades simples el dividendo.*

El fundamento de esta prueba lo daremos en el párrafo 133.

88.—Casos.—Los casos de la división de enteros son seis:

1.° *Cuando el divisor consta de una sola cifra, y el dividendo es menor que el producto de esta cifra por* 10.

2.° *Cuando el divisor tiene un guarismo y el dividendo consta de muchos.*

3.° *Cuando tanto el divisor como el dividendo constan de muchos guarismos.*

4.° *Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros.*

5.° *Cuando el dividendo y el divisor terminan en ceros; y*

6.° *Cuando solo el divisor termina en ceros.*

El primer caso se resuelve á la memoria.

Segundo caso.—*Cuando el divisor tiene un solo guarismo,* la operación se dispone y ejecuta como vamos á explicarlo en el ejemplo adjunto:

Se dice séptima de 43 son 6, que se escribe debajo del 3; 6 por 7 son 42 á 43 sobra una centena que unida á 8 decenas forma 18; séptima de 18 son 2, que se escribe debajo; 2 por 7 son 14 á 18 sobran 4 decenas, que unidas á 6 unidades forman 46; séptima de 46 son 6 por 7 son 42 á 46 sobran 4 unidades. El cociente es 626 y la resta 4.

4386÷7=626+4 de resta.

626+4

Tercer caso.—*Cuando tanto el dividendo como el divisor constan de muchos guarismos, la operación se resuelve por la regla general* (83.)

Cuarto caso.—*Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros, se separan en el dividendo, contando de derecha á izquierda tantos guarismos como ceros tenga el divisor: el cociente será la cantidad representada por los guarismos del dividendo que quedaron á la izquierda, y la resta la indicarán los guarismos separados á la derecha.*

Ejemplo. 38745÷1000=38(745

el cociente es 38 y la resta 745.

Demostración.—Como toda cantidad dividida por la unidad da por cociente la misma cantidad (81), si el divisor fuera la unidad, el cociente sería el dividendo; pero como aquel es 10, 100, 1000, etc., veces mayor que la unidad, según sea el número de ceros en que termine; para que el cociente sea el verdadero, tendremos que hacer al dividendo 10, 100, 1000, etc., veces menor; lo cual se consigue separando tantas cifras á la derecha como ceros tenga el divisor (20;) quedando la otra parte como resta, supuesto que cualquier cociente multiplicado por los ceros del divisor, produce cero, que restado del dividendo, la diferencia es igual á las cifras del dividendo separadas á la derecha.

Quinto caso.—*Cuando el dividendo y el divisor terminan en ceros, se*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

suprime igual número de ceros en ambos términos, y se dividen las cifras restantes.

Ejemplo. $385000 \div 2200 = 3850 \div 22$

el cociente es 17 y la resta 11.

Demostración.—Como se ha visto (76), cuando se suprimen los ceros del dividendo, se hace el cociente 10, 100, 1000, etc, veces menor; pero al suprimirse igual número de ceros en el divisor, el cociente se hace 10, 100, 1000, etc., veces mayor (77); luego disminuyendo por la supresion de los ceros del dividendo, tanto como aumenta por la de los del divisor, el valor del cociente no sufrirá alteración y será el verdadero (79).

Sexto caso.—*Cuando sólo el divisor termina en ceros, se separan éstos, é igual número de guarismos á la derecha del dividendo, se hace la división de las cifras significativas que no se hayan separado, y al concluir la división se agregan á la resta las cifras separadas en el dividendo, volviendo á expresar el divisor con los ceros de que consta.*

Sea por ejemplo, dividir 7345785 por 328000.

Se separan los tres ceros del divisor y las tres últimas cifras del dividendo, dividiendo únicamente 7345 entre 328, siendo el cociente 22; pero el resultado final debe expresarse así

7345(785	328(000
785	22
129785	

$$7345785 = 328000 \times 22 + 129785$$

Demostración.—Hay dos cosas que demostrar; 1.ª que el cociente verdadero es 22, y 2.ª que la resta de la división es 129785. Cuando hemos hecho abstracción de los tres ceros separados del divisor lo hemos hecho *mil* veces menor; pero como al prescindir de las tres últimas cifras separadas en el dividendo hemos hecho este término también *mil* veces menor, el cociente 22 será el verdadero (79). En cuanto á la resta, como al multiplicar el cociente 22 por el divisor 328000 la resta de los millares es 129 millares, y el producto de los tres ceros con que termina el divisor es cero, la diferencia al dividendo seria 785 unidades, y por tanto, la resta total de la división será 129785.

89.—Usos.—Los usos de la división son cuatro principales:

1.º—*Ver cuántas veces un número contiene á otro.*

2.º—*Reducir unidades de especie menor á mayor.*

3.º—*Conocido el valor total de muchas unidades y el número de ellas, determinar el valor de una.*

4.º—*Conocido el valor de muchas unidades y el de una sola, determinar el número de ellas.*

Además, tiene los usos que en general se derivan de la naturaleza de la operación, como determinar cuántas veces se puede restar una cantidad de otra; buscar una cantidad cierto número de veces menor que otra; dividir un número en partes iguales; hacerlo cierto número de veces menor, determinar uno de los dos factores de un producto, etc.

90.—Como ejercicio, pondremos los siguientes ejemplos:

1.º Una persona quiere repartir el caudal de $125,000 entre sus ocho hijos, por partes iguales, y se quiere conocer la cantidad que le tocará á cada uno de ellos.

2.º La superficie de una hacienda es de 443.988,745 varas cuadradas, y se quiere reducir á criaderos de ganado mayor, en el concepto de que un criadero de ganado mayor es igual á 6.250,000 varas cuadradas.

3.º Por 1200 toneladas de rieles se han pagado 288,000 pesos, y se quiere conocer el precio de cada tonelada.

4.º Se quiere saber cuántas veces podrá restarse 100 del número 8000.

5.º Una compañía ha gastado 22.914,795 pesos en la construcción de un ferrocarril de una sola vía, y según sus cuentas, como término medio, el costo de la legua ha resultado á razón de $78,745: se quiere saber cuántas leguas de largo tendrá la vía.

6.º Un distrito, cuya superficie es de 345 leguas cuadradas, tiene una población de 66230 habitantes: se quiere saber cuál es su población relativa, esto es, cuántos habitantes tiene por legua cuadrada

1.º—$125000 \div 8$ = 15625

2.º—

44398(8745	625(0000
648	71 criad. y 238745 vs. cds.
238745	

3.º—

$2880(00	12(00
48	240 $ tonelada
00	

4.º—

80(00	1(00
	80 veces.

5.º—

$229147,95	78745 $
716579	291 leguas
78745	
0000	

6.º—

66230	345 leguas.
3173	191
680	
335	

Prueba.

3	4
3	
12....3	

Prueba.

8	3
2	2
6+2=8.	

91.—Como habrá podido observarse, la división es la única operación de enteros que se comienza por la izquierda, lo cual tiene por objeto que la resta de las partes de mayor especie pueda reducirse á la

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

inmediata siguiente, obteniéndose así en el cociente por cada resta un solo guarismo de cierto orden.

La división de los números enteros pocas veces conduce á un cociente entero, y por esto es necesario concebir el dividendo formado por el producto de dos números, más una cantidad igual á la resta.

Cuando el cociente es entero y no hay resta, el dividendo es tantas veces mayor que el divisor, como unidades tiene el cociente, y recíprocamente el divisor es tantas veces menor que el dividendo como unidades tiene el cociente, supuesto que el dividendo es el producto del divisor por el cociente.

En consecuencia, si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, el cociente será el otro factor.

Por último, debemos repetir que el cociente suele ser de especie diferente á la del dividendo y á la del divisor: que no se debe obtener un cociente parcial mayor que 9, ni ninguna resta mayor que el divisor; y que por cada resta se determina un guarismo en el cociente pudiendo ser éste cero.

PROPIEDADES DE LOS FACTORES Y DIVISORES ENTEROS.

92.—Definiciones.—*Número primo es el que no da un cociente entero sino cuando se le divide por sí mismo ó por la unidad.* Tales son los números 7 y 13, de los que no se obtiene un cociente entero sin resta, sino cuando el divisor es el mismo número ó la unidad.

93.—*Todo número que no es primo, es el producto de varios factores diferentes de la unidad, y se llama múltiplo* de cualquiera de sus factores. Por ser $35=7\times5$, será múltiplo de 7 y de 5.

94.—*Recíprocamente, se llama submúltiplo ó parte alícuota de una cantidad, el número que la puede dividir dando un cociente entero sin ninguna resta.*

95.—*Varios números son primos entre sí cuando no tienen más divisor común que la unidad.* Por ejemplo: 4 y 9 son primos entre sí, y los números 6, 9 y 12 no son primos entre sí, porque son divisibles por 3.

96.—*Se llama máximo común divisor de varios números, el mayor número que puede dividirlos exactamente.*

Por ejemplo: 6 es el máximo común divisor de 12 y de 18, habiendo otros números menores que 6, como 3, que también pueden dividirlos.

El máximo común divisor de varios números primos es la unidad.

97.—*Se llama menor múltiplo común de varios números, el menor número que puede resultar como producto de multiplicar sucesivamente cada uno de los propuestos por algún número entero.*

Por ejemplo: 24 es el menor múltiplo de 6 y de 8; habiendo otros, como 48, mayores que 24 que son múltiplos de 6 y de 8.

98.—*Descomponer un número en sus factores, es encontrar varios números cuyo producto sea el número propuesto.* Siendo $30=2\times3\times5$ se ha descompuesto en tres factores, 2, 3 y 5.

99.—*Cuando los factores de un producto son todos iguales entre sí, al producto se llama potencia del número que ha servido de factor.*

Siendo $25=5\times5$ y $81=3\times3\times3\times3$, 25 es la segunda potencia de 5 y 81 es la cuarta potencia de 3.

Se llama grado de la potencia el número de factores del producto. Así, 2 y 4 son los grados de las potencias á que ha sido necesario elevar respectivamente 5 y 3 para producir 25 y 81.

A la 2.ª potencia se le llama generalmente *cuadrado* y á la 3.ª potencia *cubo* del número propuesto.

La potencia de una cantidad se indica poniendo arriba y á la derecha, un pequeño número llamado *exponente, que expresa cuántas veces ha entrado la cantidad como factor en el resultado.*

Así $5^2=25$ y $3^4=81$

se lee 5 elevado al cuadrado igual á 25, y 3 elevado á la 4ª potencia igual á 81.

Debe observarse que *por ser 10 la base del sistema de numeración, toda potencia de 10 es igual á la unidad seguida de tantos ceros como unidades tenga el exponente ó grado de la potencia.*

100.—*Se llama raíz de un número, otro número que multiplicado una ó varias veces por sí mismo da por producto el primer número.* Siendo $81=3\times3\times3\times3$ se dice que 3 es raíz de 81, y por entrar el número 3, cuatro veces como factor en el producto 81 decimos que es la raíz 4ª

Se indica $3=\sqrt[4]{81}$

leyéndose 3 igual á la raíz 4.ª de 81.

10 es la raíz del número representado por la unidad seguida de tantos ceros como expresa el índice de la raíz. Por ejemplo:

$10=\sqrt[3]{1000}$. En efecto, $10^3=10\times10\times10=1000$.

011157

inmediata siguiente, obteniéndose así en el cociente por cada resta un solo guarismo de cierto orden.

La división de los números enteros pocas veces conduce á un cociente entero, y por esto es necesario concebir el dividendo formado por el producto de dos números, más una cantidad igual á la resta.

Cuando el cociente es entero y no hay resta, el dividendo es tantas veces mayor que el divisor, como unidades tiene el cociente, y recíprocamente el divisor es tantas veces menor que el dividendo como unidades tiene el cociente, supuesto que el dividendo es el producto del divisor por el cociente.

En consecuencia, si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, el cociente será el otro factor.

Por último, debemos repetir que el cociente suele ser de especie diferente á la del dividendo y á la del divisor: que no se debe obtener un cociente parcial mayor que 9, ni ninguna resta mayor que el divisor; y que por cada resta se determina un guarismo en el cociente pudiendo ser éste cero.

PROPIEDADES DE LOS FACTORES Y DIVISORES ENTEROS.

92.—Definiciones.—*Número primo es el que no da un cociente entero sino cuando se le divide por sí mismo ó por la unidad.* Tales son los números 7 y 13, de los que no se obtiene un cociente entero sin resta, sino cuando el divisor es el mismo número ó la unidad.

93.—*Todo número que no es primo, es el producto de varios factores diferentes de la unidad, y se llama múltiplo* de cualquiera de sus factores. Por ser $35=7\times5$, será múltiplo de 7 y de 5.

94.—*Recíprocamente, se llama submúltiplo ó parte alícuota de una cantidad, el número que la puede dividir dando un cociente entero sin ninguna resta.*

95.—*Varios números son primos entre sí cuando no tienen más divisor común que la unidad.* Por ejemplo: 4 y 9 son primos entre sí, y los números 6, 9 y 12 no son primos entre sí, porque son divisibles por 3.

96.—*Se llama máximo común divisor de varios números, el mayor número que puede dividirlos exactamente.*

Por ejemplo: 6 es el máximo común divisor de 12 y de 18, habiendo otros números menores que 6, como 3, que también pueden dividirlos.

El máximo común divisor de varios números primos es la unidad.

97.—*Se llama menor múltiplo común de varios números, el menor número que puede resultar como producto de multiplicar sucesivamente cada uno de los propuestos por algún número entero.*

Por ejemplo: 24 es el menor múltiplo de 6 y de 8; habiendo otros, como 48, mayores que 24 que son múltiplos de 6 y de 8.

98.—*Descomponer un número en sus factores, es encontrar varios números cuyo producto sea el número propuesto.* Siendo $30=2\times3\times5$ se ha descompuesto en tres factores, 2, 3 y 5.

99.—*Cuando los factores de un producto son todos iguales entre sí, al producto se llama potencia del número que ha servido de factor.*

Siendo $25=5\times5$ y $81=3\times3\times3\times3$, 25 es la segunda potencia de 5 y 81 es la cuarta potencia de 3.

Se llama grado de la potencia el número de factores del producto. Así, 2 y 4 son los grados de las potencias á que ha sido necesario elevar respectivamente 5 y 3 para producir 25 y 81.

A la 2.ª potencia se le llama generalmente *cuadrado* y á la 3.ª potencia *cubo* del número propuesto.

La potencia de una cantidad se indica poniendo arriba y á la derecha, un pequeño número llamado *exponente, que expresa cuántas veces ha entrado la cantidad como factor en el resultado.*

Así $5^2=25$ y $3^4=81$

se lee 5 elevado al cuadrado igual á 25, y 3 elevado á la 4ª potencia igual á 81.

Debe observarse que *por ser 10 la base del sistema de numeración, toda potencia de 10 es igual á la unidad seguida de tantos ceros como unidades tenga el exponente ó grado de la potencia.*

100.—*Se llama raíz de un número, otro número que multiplicado una ó varias veces por sí mismo da por producto el primer número.* Siendo $81=3\times3\times3\times3$ se dice que 3 es raíz de 81, y por entrar el número 3, cuatro veces como factor en el producto 81 decimos que es la raíz 4ª

Se indica $3=\sqrt[4]{81}$

leyéndose 3 igual á la raíz 4.ª de 81.

10 es la raíz del número representado por la unidad seguida de tantos ceros como expresa el índice de la raíz. Por ejemplo:

$10=\sqrt[3]{1000}$. En efecto, $10^3=10\times10\times10=1000$.

011157

101.—Determinación de los números primos.—Para determinar los números *primos* hasta cierto límite, bastará excluir todos los números que son *múltiplos* de otros, y á este fin haremos observar que los números que se forman por la adición sucesiva de un mismo número son *múltiplos* de este sumando. Por ejemplo, si sumamos 5 consigo mismo, obtendremos: 5+5=10 múltiplo de 5; 5+5+5=15 múltiplo de 5; 5+5+5+5 =20 múltiplo de 5. En consecuencia, si formamos por la adición sucesiva de 2 en 2 unidades los números 4, 6, 8, etc., resultarán los múltiplos de 2, que debemos excluirlos. En seguida, por la adición sucesiva de 3 en 3 unidades formaremos los números 6, 9, 12, etc., que serán múltiplos de 3; y continuando este procedimiento hasta el límite fijado excluiremos todos los números que sean *múltiplos* de otros y quedarán los números primos.

Pongamos la serie de números desde 1 hasta 30:

1—2—3—4—5—6—7—8—9—10—11—12—13—14'

15—16—17—18—19—20—21'—22"—23—24

25—26"'—27—28'—29—30.

Desde luego el número 1 es primo porque no puede dividirse más que por sí mismo, y los números 2 y 3, son primos, en razón de que no pueden descomponerse en grupos iguales entre sí, á menos que los formemos por adiciones sucesivas de la unidad. En seguida, por la adición de 2 en 2 unidades formaremos los múltiplos de 2. El número 4 es múltiplo de 2 porque 4=2+2=2×2. El número 6=2+2+2=2×3. El número 8=2+2+2+2=2×4, y en general, si partiendo del número 2 se va contando de dos en dos los números 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 y 30, marcados con una línea por debajo, se excluirán los múltiplos de 2.

Si se buscan ahora los números formados por la adición sucesiva de tres en tres unidades, los encontraremos si partiendo del número 3 contamos de tres en tres guarismos. Así se determinan los números 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 y 30; marcados con un punto por debajo, y que son los múltiplos de 3. No nos ocuparemos en determinar los múltiplos de 4, porque no siendo este número primo, todos sus múltiplos lo son de 2, y por consiguiente ya están excluidos.

Pasando al número 5, determinaremos todos sus múltiplos contando desde 5 los guarismos de cinco en cinco, y señalaremos con dos puntos por debajo los números 10, 15, 20, 25 y 30, múltiplos de 5. Los múltiplos de 6 siéndolo de 3 ya están excluidos.

Contando desde 7, de siete en siete guarismos, determinaremos los números 14, 21 y 28, marcados con una coma por encima, y que son los múltiplos de 7. Los múltiplos de 8, 9 y 10 ya están excluidos.

Contando de 11 en 11 determinaremos el número 22, múltiplo de 11, señalado con dos comas por encima.

Y por último, contando de 13 en 13 guarismos, se determina el número 26, múltiplo de 13, marcado con tres comas.

Los números primos inferiores á 30, son los siguientes:

1—2—3—5—7—11—13—17—19—23 y 29,

los cuales no se han excluido, porque no son múltiplos de ninguno otro.

Por este procedimiento, algo abreviado en la práctica, se forman tablas de los números primos hasta el límite que se quiere.

Para determinar si un número aislado es primo, deberá dividirse sucesivamente por los números primos 2, 3, 5, 7, etc., menores que su mitad, y en caso de que no sea divisible exactamente por ninguno de ellos, el número propuesto será primo.

Si queremos averiguar si 11 es número primo, lo dividiremos sucesivamente por 2, por 3 y por 5, números primos menores que su mitad, y no siendo divisible por ninguno de ellos será número primo. Es inútil hacer la división por los números primos mayores que su mitad, supuesto que no puede descomponerse un número en menos de *dos* partes, cada una de ellas iguales á su *mitad*.

Si se trata de averiguar si 27 es número primo, su división por 2 conduce á la resta 1; pero como dividido por 3 da el cociente exacto 9, resulta que es múltiplo de 3.

102.—Descomposición de un número en sus factores primos.—Una vez conocidos los números primos 2, 3, 5, 7, 11.....hasta el límite que se quiera, *para descomponer un número en sus factores primos, se le dividirá primero por 2, en caso de que la división sea exacta, se dividirá el cociente que resulte otra vez por 2, repitiéndose la división por este número hasta que se obtenga un cociente indivisible por 2. En seguida, ese cociente se dividirá por 3, y siendo posible se repetirán las divisiones hasta obtener un cociente indivisible por 3, y así continuarán dividiéndose los cocientes que vayan resultando sucesivamente por cada uno de los números primos, 5, 7, 11, etc., cuantas veces sea posible, hasta obtener 1 como último cociente.*

El número propuesto será igual al producto de los números primos que hayan servido de divisores, elevado cada uno de ellos á una potencia expresada por el número de divisiones que con él se hayan hecho

168|2 Por ejemplo, si se quiere descomponer el número 168 en sus
84|2 factores primos, lo dividiremos por 2 y se tendrá el cociente
42|2 exacto 84, el cual lo volveremos á dividir por 2 y se obtiene
21|3 42, que dividido por 2, da por cociente 21, número indivisible
7|7 por 2. Dividido este cociente por 3, se obtiene 7, número que
1 siendo primo, dará, dividido por sí mismo, la unidad por cociente.

En consecuencia: $168=2^3\times3\times7$.

La descomposición de los números en sus factores primos, sirve. 1.°, para conocer todos los divisores enteros que puede tener una cantidad; 2.°, para determinar el menor múltiplo de varios números; y 3.°, para encontrar el máximo común divisor.

103.—Determinación de los divisores de un número.—Si queremos determinar todos los números enteros que pueden dividir exactamente, por ejemplo, á 180, comenzaremos por descomponerlo en sus factores primos, empleando el procedimiento explicado en el párrafo anterior, y es claro que siendo $180=2\times2\times3\times3\times5$, será divisible exactamente por cada uno de sus factores primos y por los diversos productos que con ellos puedan formarse.

180|2
90|2—4
45|3—6—12
15|3—9—18—36
5|5—10—20—15—30—60—45—90—180
1|

Para determinar fácilmente estos productos diversos, multiplicaremos el segundo divisor 2, por el primero que está encima de él, y el producto 4, que será divisor de 180, lo escribimos á la derecha del segundo divisor. En seguida multiplicaremos el tercer divisor 3, por todos los números que están encima de él; y los productos 6 y 12 se escriben á su derecha, omitiéndose los resultados iguales á los obtenidos; y así se continúa la operación hasta el último factor 5. Los números todos que pueden dividir á 180, serán los factores primos y los productos diferentes encontrados. Ordenándolos se tiene que los divisores de 180, serán: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90 y 180, y solo estos números lo dividirán exactamente.

Regla.—*Para encontrar todos los divisores de un número, se le descompondrá en sus factores primos, se multiplicará el segundo factor por el primero, y se escribirá á su derecha el producto; en seguida, el tercer factor se multiplicará por los dos factores primos y por el producto encontrado, y se continuará la operación multiplicando cada divisor por los números que haya encima de él; teniendo cuidado de omitir los productos ya obtenidos.*

Todos los factores primos y los productos diferentes, dividirán exactamente al número propuesto.

El fundamento de esta regla es que cuando se han determinado los factores primos de que está compuesto un número, éste será divisible por todos estos factores y por todas las combinaciones que con ellos puedan hacerse, pero nada más por estos factores y sus respectivas combinaciones.

Se puede determinar el número de divisores, que tendrá un número, *agregando una unidad á cada uno de los exponentes de los factores primos de que está formado, y formando el producto de los números que resulten.* Cuando algún factor no tenga exponente, se supondrá que lo es la unidad.

Por ejemplo $180=2^2\times3^2\times5$
siendo los exponentes 2, 2, y 1,
formaremos el producto de $3\times3\times2=18$,

y 18 serán los divisores que tendrá 180, cuyo resultado es en efecto el que acabamos de obtener.

104.—Determinación del menor múltiplo.—Regla.—*Para encontrar el menor múltiplo común de varios números, se comienza por excluir los que son factores de alguno de los propuestos; los números que queden se descompondrán en sus factores primos, y el menor múltiplo común será el producto de todos los factores primos diferentes que entren en su formación, afectado cada uno de estos factores del mayor de sus exponentes.*

Por ejemplo, si se busca el menor múltiplo de

3, 5, 8, 10, 15, 24 y 72

comenzaremos por excluir á 3 que es factor de 15, á 5 que lo es de 10, á 8 que lo es de 24 y á 24 que es factor de 72; en seguida, descomponiendo en sus factores primos los números no excluidos, tendremos:

$10=2\times5$
$15=3\times5$
$72=2^3\times3^2$

y el menor múltiplo de los números propuestos será

$2^3\times3^2\times5=360$

Este número será *múltiplo* de los demás, porque contiene todos los factores de que cada uno está formado, y será el *menor* múltiplo, porque solo contiene los factores absolutamente indispensables para poder ser producto de todos los números propuestos.

105.—Máximo común divisor.—Regla.—*Para determinar el máximo común divisor de varios números, se les descompondrá en sus factores*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

primos, y el máximo común divisor será el producto de los factores primos iguales que entren en su formación, afectado cada uno del menor de sus exponentes.

Si, por ejemplo, se busca el máximo común divisor de 72 y de 180, descomponiendo estos números en sus factores primos tendremos:

$$72=2^3\times3^2$$
$$180=2^2\times3^2\times5$$

y el máximo común divisor será:

$$2^2\times3^2=36$$

Este número *dividirá exactamente* á 72 y á 180, supuesto que está formado de factores comunes á estos dos números; y será el *mayor divisor* de ellos en razón de que cada uno de los factores comunes se ha elevado á la mayor potencia que ha sido posible,

106.—Primer teorema.—*Un número que divide exactamente á otro, divide igualmente á todos sus múltiplos.*

Si 8 divide á 24, todo múltiplo de 24 será también divisible exactamente por 8.

Demostración.—Si para fijar el raciocinio de nuestra demostración tomamos como múltiplo de 24 á $96=24\times4$, tendremos en virtud de ser 24 divisible exactamente por 8 que $\frac{24}{8}$ dará por cociente un número entero.

$$\frac{24}{8}=3$$

si multiplicamos el dividendo por 4, el cociente de $24\times4=96$ dividido por 8, será (76) 4 veces mayor que el cociente 3, esto es,

$$\frac{24\times4}{8}=\frac{96}{8}=3\times4$$

pero como el producto 3×4 de dos números enteros siempre es entero y cuando el cociente es entero, los números son divisibles exactamente, resulta que tanto 96 como cualquiera otro múltiplo de 24 será divisible exactamente por 8; en razón de tener que ser el cociente respectivo el producto de 3 por otro número entero.

107.—Segundo teorema.—*Si las dos partes en que puede descomponerse una cantidad son divisibles exactamente por un número, la cantidad total será divisible por dicho número.*

Sea $72=48+24$; si las dos partes 48 y 24 son divisibles exactamente por 6, también 72 será divisible por 6.

Supuesto que las dos partes de 72 son divisibles exactamente por 6, darán por cociente números enteros, y tendremos:

$$48\div6=8$$
$$24\div6=4$$

y como el cociente de una cantidad es igual á la suma de los cocientes de sus partes, sumando ordenadamente las expresiones anteriores, se tendrá:

$$(48+24)\div6=8+4$$

ó bien

$$72\div6=8+4.$$

pero como estos dos cocientes 8 y 4 son números enteros, su suma también lo será, y en consecuencia 72 será divisible exactamente por 6.

108.—Tercer teorema.—*Siempre que una cantidad pueda descomponerse en dos partes, y tanto la cantidad como una de sus partes sean divisibles exactamente por un número, la otra parte también será divisible por este número.*

Sea $60=40+20$: si tanto 40 como 60 son divisibles exactamente por 4, decimos que la otra parte 20 será también divisible por 4.

Demostración.—Supuesto que tanto 60 como una de sus partes 40, son divisibles exactamente por 4, sus respectivos cocientes serán números enteros y tendremos:

$$60\div4=15$$
$$40\div4=10$$

como si de cantidades iguales se restan cantidades iguales, los resultados serán iguales, tendremos.

$$(60-40)\div4=15-10$$

ó bien

$$20\div4=15-10$$

pero como los dos cocientes, 15 y 10 son números enteros, su diferencia también lo será, y en consecuencia 20, que es la otra parte de 60, será divisible exactamente por 4.

Corolarios.—En la división de los números enteros podemos distinguir dos casos.

1.º—Cuando no hay resta, por ejemplo $60\div15=4$

de lo que se deduce $60=15\times4$

2.º—Cuando hay resta, por ejemplo: $60\div8$ da 7 por cociente y 4 de resta, de lo cual se deduce que

$$60=8\times7+4.$$

En el primer caso, cuando la división no da resta, siendo

$$60=15\times4$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

cualquier número que divida exactamente al divisor ó al cociente dividirá al dividendo. En efecto, 5 que divide á 15 dividirá á 60, y 2 que divide á 4 dividirá á 60 (106).

En el 2º caso cuando la división deja una resta, por ejemplo $60 \div 8$, da

$$60 = 8 \times 7 + 4$$

si el divisor 8, y la resta 4, son divisibles por un mismo número, por 4, por ejemplo, lo será igualmente el dividendo; supuesto que las dos partes en que 60 está descompuesto son divisibles por 4 (107); la primera 8×7, por ser múltipla de 8, y la segunda por el supuesto.

Si tanto el dividendo como el divisor son divisibles por un número, 2 por ejemplo, lo será igualmente la resta. La parte 8×7 será divisible por 2 por ser múltipla de 8 y siendo divisible la cantidad 60 y una de sus partes, lo será la otra, que es la resta 4 (108).

109.—Cuarto teorema.—*Si el producto de dos factores y cada uno de ellos se dividen separadamente por un número dado, la resta que queda en la división del producto, es igual á la que resulta de dividir el producto de las restas de los factores por el mismo número.*

Sea

$$23 \times 47 = 1081$$

$23 \div 7$ da 3 por cociente y 2 de resta.
$47 \div 7$ da 6 por cociente y 5 de resta.

y decimos que la resta de 1081 dividido por 7 es igual á la que resulta de dividir 2×5, producto de las restas de los factores, por el mismo número 7.

Demostración.—De la división de cada uno de los factores por 7, resulta que

$$23 = 7 \times 3 + 2$$
$$47 = 7 \times 6 + 5$$

y como si cantidades iguales se multiplican por iguales, los resultados serán iguales, tendremos que

$$23 \times 47 = (7 \times 3 + 2) \times (7 \times 6 + 5)$$

Ejecutaremos la multiplicación indicada en el segundo miembro de la ecuación, multiplicando primero las dos partes del multiplicando, 7×3 y 2 por la primera del multiplicador 7×6, y obtendremos los productos.

$$(7 \times 3 \times 7 \times 6) \text{ y } (2 \times 7 \times 6)$$

que ambos son múltiplos de 7.

En seguida multiplicaremos las dos partes del multiplicando por 5, que es la segunda del multiplicador, y se obtendrá:

$$(7 \times 3 \times 5) \text{ y } (2 \times 5)$$

de cuyos productos el primero es múltiplo de 7.

Así es que

$$\begin{array}{r} 23 = 7 \times 3 + 2 \\ \times 47 = 7 \times 6 + 5 \\ \hline 23 \times 47 = (7 \times 3 \times 7 \times 6) + (2 \times 7 \times 6) + (7 \times 3 \times 5) + (2 \times 5) \end{array}$$

A consecuencia de haber descompuesto cada uno de los factores en una parte que es un producto de 7, tres de las cuatro partes de que está formado el producto total, son también múltiplos de 7, y por tanto divisibles exactamente por este número, y solo en la última parte 2×5 que resultó del producto de las restas de los factores, no entra como factor 7. Si dividimos por 7 la ecuación, tendremos:

$$\frac{23 \times 47}{7} = \frac{(7 \times 3 \times 7 \times 6)}{7} + \frac{(2 \times 7 \times 6)}{7} + \frac{(7 \times 3 \times 5)}{7} + \frac{(2 \times 5)}{7}$$

y como las tres primeras partes del segundo miembro no dan ninguna resta en razón de ser cada uno de los dividendos múltiplo del divisor 7, se infiere que *la resta que dé el producto* 23×47 *dividido por* 7, *será igual á la que resulte de dividir el producto* 2×5 *de las restas de los factores, por el número dado* 7.

Como aplicaciones de estos cuatro teoremas, pondremos los siguientes ejemplos:

1º Si el número 10 es divisible exactamente por 5, cualquiera múltiplo de 10 será divisible por 5. En efecto, cualquiera número de decenas, por ejemplo, 780, que es igual á 78×10, será divisible exactamente por 5. Del mismo modo toda potencia de 10, por ser múltiplo de este número, será divisible por 5; así, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$ y todas las potencias de 10 son exactamente divisibles por 5.

2º Si descomponemos el número 956 en dos partes $950 + 6 = 95 \times 10 + 6$ y observamos que por ser la primera parte, 95×10 múltiplo de 10 es divisible por 2, y que también lo es la otra parte 6, inferiremos que el número 956 será divisible por 2, en virtud del segundo teorema.

3º Si dividimos 7200 entre 7, hallaremos 1028 por cociente y 4 por resta, luego

$$7200 = 1028 \times 7 + 4$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

y observando que la cantidad 7200, lo mismo que la resta 4 son números divisibles por 4, inferiremos conforme al tercer teorema, que la otra parte 1028×7 también será divisible exactamente por 4.

4º Considerando á 30 como el producto de los factores 10×3 tendremos, conforme al cuarto teorema, que la resta que queda en la división del producto es igual á la que se obtiene dividiendo el producto de las restas de los factores, por ejemplo, por el número 6. Si dividimos 10 entre 6, la resta es 4, dividiendo 3 entre 6 el cociente es 0 y la resta 3; luego la resta de 30 dividido por 6, será igual á la del producto 3×4 ó 12 dividido por 6, y como esta resta es 0 inferiremos, lo que es una verdad, que 30 es divisible exactamente por 6, supuesto que da 0 por resta.

5º Si dividimos 10 entre 7 obtendremos por resta 3; para determinar la resta que dejaría 100 dividido por 7, conforme al cuarto teorema, tendremos que siendo $100 = 10 \times 10$, la resta de 100 será la que deje el producto de las restas $3 \times 3 = 9$ dividido por 7, esto es 2. Si queremos determinar la resta que dejaría 1000, considerando este número como el producto de 100 por 10, dividido por 7, tendremos que siendo 2 la resta de 100 dividido por 7, y 3 la resta de 10, la resta de 1000 será igual al producto de las restas 2×3 dividido por 7, esto es, 6. Se ve, pues, con qué facilidad pueden determinarse las restas de las potencias sucesivas de 10 divididas por un número dado.

110.—Regla para encontrar el máximo común divisor entre dos cantidades.—*Se divide la mayor por la menor: si la división resulta exacta, esto es, si no da resta, la cantidad menor será el máximo común divisor; en caso contrario, se divide el divisor por la resta, y si la división no sale exacta se continúa la operación dividiendo sucesivamente el último divisor por la resta hasta obtener una división exacta. El último divisor será el máximo común divisor. Cuando éste sea la unidad, los números serán primos entre sí.*

111.—Ejemplo.—Sea por determinar el máximo común divisor de los números 1440 y 624. Dividiremos 1440 por 624:

	1440	624	
624	192	2	
192	48	3	
00	4		

se obtiene el cociente 2 y la resta 192. Después dividiremos 624 por la resta 192, se obtiene 3 por cociente y 48 por resta. En seguida dividiremos 192 por 48 y obteniéndose una división sin resta, el último divisor, 48, será el máximo común divisor de los números 1440 y 624.

A esta serie de divisiones se les da comunmente la forma de tabla, poniendo las restas á la derecha del divisor como se ve aquí al lado, y los cocientes 2 3 y 4 debajo de sus correspondientes divisores.

1440	624	192	48	00
	2	3	4	

112.—Demostración de la regla para hallar el máximo común divisor.—Hemos dicho que máximo común divisor de dos cantidades es el mayor número que puede dividirlas exactamente (96). En consecuencia, aplicando nuestros raciocinios al ejemplo propuesto, tendremos que demostrar dos cosas: 1º, que 48 divide exactamente á los números propuestos 1440 y 624; 2º, que 48 es el mayor número que puede dividirlos exactamente.

1º—Vamos á demostrar que 48 *divide exactamente* á 624 y á 1440.

Sabemos que 48 se divide exactamente á sí mismo, porque toda cantidad multiplicada por 1 da por producto la misma cantidad (64).

Como resultado de la última división, hemos obtenido:

$$192 = 48 \times 4$$

luego conforme al primer teorema (106), se infiere que 48 dividirá exactamente á 192 por ser múltiplo de 48.

Como resultado de la penúltima división hemos obtenido:

$$624 = 192 \times 3 + 48$$

sabemos que 48 se divide exactamente á sí mismo; hemos demostrado que 48 divide á 192, y conforme al primer teorema, dividirá á su múltiplo 192×3. Si, pues, 48 divide exactamente á las dos partes de 624, conforme al segundo teorema (107), se infiere que dividirá exactamente á 624.

Como resultado de la primera división obtuvimos:

$$1440 = 624 \times 2 + 192$$

hemos demostrado que 48 divide exactamente á 192 y á 624, y como también dividirá al múltiplo de este número, 624×2, se infiere que dividiendo á las dos partes de 1440, dividirá 48 exactamente á 1440.

Fundándonos en los teoremas demostrados (106 y 107) y examinando los resultados obtenidos por la aplicación de la regla, hemos visto sucesivamente que 48 se divide á sí mismo, que divide á 192, á 624 y á 1440; luego *queda demostrado que el número* 48, *encontrado conforme á la regla, divide exactamente á los números dados* 624 *y* 1440.

2º—Vamos á demostrar que 48 *es el mayor número que puede dividirlos exactamente.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El mayor número que puede dividir exactamente á 1440 y á 624 *no puede ser mayor que* 624, porque aunque pudiera dividir á 1440 no podría obtenerse un cociente entero dividiendo 624 por un número mayor que él. En consecuencia, debemos probar si 624 divide exactamente á 1440; pero como la primera división deja una resta, nos hace ver que 624 *no es* el máximo común divisor, y además encontramos que

$$1440=624\times2+192$$

Esto es, 1440 se compone de dos partes: una 624×2, y la otra 192. Ahora bien, conforme al primer teorema (106) el número que divida á 624 dividirá á la parte 624×2, múltiplo de ella; pero como buscamos un divisor común de 1440 y de 624, conforme al tercer teorema (108), será preciso que este divisor divida exactamente á la otra parte 192, y en consecuencia, *no podrá ser mayor* que este número.

Por tanto debemos probar si 192 divide ó no exactamente al número menor 624. Ejecutando la división, encontramos una resta, por lo cual vemos que 192 *no es* el máximo común divisor, y además

$$624=192\times3+48$$

Esto es, 624 consta de dos partes: 192×3 y 48. El divisor de 192 lo será de 192×3 (106), y como para que un número pueda dividir á 624 y á 192 (circunstancia indispensable para que divida á 1440), es necesario que divida á la otra parte 48 (108), resulta que el máximo común divisor *no puede ser mayor* que la resta 48.

En consecuencia, debemos probar si 48 divide ó no exactamente á 192, y como se obtiene que

$$192=48\times4$$

sin ninguna resta, resulta que 48 *es el mayor número que puede dividir exactamente á* 624 y á 1440.

En resumen, hemos demostrado sucesivamente que el máximo común divisor:

No puede ser mayor que..... 624
Que no es..... 624
Que no puede ser mayor que..... 192
Que no es..... 192
Y que no puede ser mayor que..... 48

Vemos, pues, que la aplicación de la regla nos ha conducido á encontrar el número 48 que, además de dividir exactamente á 624 y 1440, es el mayor número que puede dividirlos exactamente.

113.—Observaciones.—Como en el curso de la operación las restas van disminuyendo sin cesar, forzosamente se llega á obtener un cocien-

te exacto, aunque no sea sino cuando el divisor es la unidad, caso en que, como lo hemos dicho, los números propuestos serán primos entre sí.

Cuando una de las restas es un número primo que no divide exactamente la resta anterior, es inútil continuar la operación, pues como se sabe, el máximo común divisor debe dividir todas las restas, lo cual será imposible siendo número primo una de ellas.

Cuando dos restas consecutivas tienen un factor común, se puede suprimir éste y continuar la operación, teniendo cuidado de multiplicar el máximo común divisor que se encuentre por el factor suprimido, con el objeto de restituir el factor común de las restas, que debe ser parte integrante del máximo común divisor.

114.—Determinación de los cocientes de los números propuestos partidos por el máximo común divisor.—Supuesto que el máximo común divisor de dos números debe dividir exactamente todas las restas, se puede fácilmente obtener el número de veces que cada resta contiene al máximo común divisor.

Volvamos al ejemplo propuesto. Como 48 se contiene á sí mismo una vez, ponemos 1 debajo de 4. En seguida 192 contiene á 48 cuatro veces, que es el producto de 1 por el número que está encima de él, y este número 4 lo colocamos en la columna vertical debajo de 192, para expresar las veces que contiene esta resta al máximo común divisor. En seguida, supuesto que $624=192\times3+48$, y que $192=48\times4$, resulta que

1440	624	192	48
	2	3	4
30	13	4	1

$$624=48\times4\times3+48=48\times(4\times3+1)=48\times13$$

13 es el número de veces que 624 contiene á 48. Este número 13 se obtiene en la tabla multiplicando 4 por el número 3, que está encima de él, y agregando 1 que está á su derecha; debiendo observarse que 4 indica las veces que 192 contiene á 48; 3 las veces que 624 contiene á 192, 1 las veces que 48 se contiene á sí mismo.

Para determinar el número de veces que 1440 contiene á 48, multiplicaremos 13 por 2 y añadiremos 4, supuesto que

$$1440=624\times2+192$$

y que $624=48\times13$ y $192=48\times4$, luego poniendo por cada cantidad su valor, resulta que

$$1440=48\times13\times2+48\times4=48\times(13\times2+4)=48\times30.$$

En consecuencia, para determinar el número de veces que cada resta contiene al máximo común divisor, se comienza poniendo la unidad en la columna vertical debajo del último cociente; en seguida se multiplica la uni-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

dad por este cociente, escribiendo el producto en la casilla de la izquierda, y se continúa multiplicando el guarismo inferior por el cociente que está sobre él, y agregando el guarismo inferior de la derecha se pone el resultado en la casilla de la izquierda.

Esta regla es de frecuente aplicación en la abreviación de los quebrados, como se verá en el número 147.

115.—Determinación del máximo común divisor de más de dos números.—Para encontrar el máximo común divisor entre más de dos números, *sin descomponerlos en sus factores primos*, se buscará primero el correspondiente á dos de los números dados; después se busca el máximo común divisor entre el hallado y otro de los números propuestos: en seguida se determina el máximo común divisor entre el último encontrado y otro de los números propuestos, continuando así la operación hasta el último número.

116. Ejemplos.—Como ejercicio pondremos las siguientes cuestiones:

1ª Descomponer (102) en sus factores primos el número 12936.

2ª Determinar (103) todos los divisores enteros del número 144.

3ª Encontrar (105) el máximo común divisor de los números 627 y 1425.

4ª Encontrar (110) el máximo común divisor de los números 477 y 1219.

5ª Encontrar (104) el menor múltiplo común á los números 2, 3, 12 y 21.

6ª Encontrar (104) el menor múltiplo común á los números 6, 8, 15, 9 y 5.

CONDICIONES

para que una cantidad sea divisible por los números menores que 12.

117.—Principios fundamentales.—Es conveniente con frecuencia, en las operaciones de aritmética, conocer con facilidad si una cantidad puede dividirse exactamente por los guarismos que representan unidades, y el objeto de este capítulo es dar á conocer los medios que pueden emplearse con tal fin, explicando sus fundamentos.

Conforme á las convenciones de nuestro sistema de numeración, resulta que toda cantidad mayor que 10, es igual á la suma de los productos de cada cifra significativa por la potencia correspondiente de 10, más las unidades simples.

Por ejemplo: $3475=3\times10^3+4\times10^2+7\times10+5$.

En consecuencia, las condiciones para que una cantidad sea divisible por un número, dependen de las propiedades del número 10, de las de sus potencias, de las de los guarismos que multiplican á estas potencias, y de las del guarismo que representa las unidades.

Los números primos menores que 10, son 2, 3, 5 y 7, por lo cual pueden hacerse las siguientes descomposiciones de la base de la numeración.

$$10=2\times5$$
$$10=3\times3+1=3^2+1=9+1$$
$$10=7\times1+3$$

118.—Siendo $10=2\times5$

inferiremos (106) que *todas las potencias y los múltiplos de* 10 *son divisibles por* 2 *y por* 5.

Si elevamos á la 2ª potencia estas dos cantidades, cuyos valores son iguales, tendremos:

$$10^2=2^2\times5^2$$

esto es, $100=4\times25$

de donde inferimos *que* 100 *y todos sus múltiplos son divisibles exactamente por* 4 *y por* 25.

Si elevamos á la 3ª potencia $10=2\times5$

tendremos $10^3=2^3\times5^3$

esto es, $1000=8\times125$

luego 1000 *y todos sus múltiplos son divisibles por* 8 *y por* 125.

Siendo cualquiera potencia de 10 igual al producto de los factores primos 2 y 5 elevado cada uno de ellos á la misma potencia, (por ejemplo $10^4=2^4\times5^4$) y siendo tanto 2 como 5 números primos con 3, se infiere que *ninguna potencia de* 10 *será divisible exactamente por* 3 por ser indivisibles por 3 los factores de que consta.

Igualmente, *toda potencia de* 10 *es indivisible por* 7, *por ser* 7 *primo de los factores de* 10.

Siendo $10=3\times3+1$

si dividimos 10 entre 3, obtendremos 3 por cociente *y* 1 *por resta.*

La resta del producto de $10\times10=100$ dividido entre 3, será igual (109,) á la que resulte de dividir el producto de las restas 1×1 de los factores por 3, esto es, *también será* 1.

Siendo $1000=100\times10$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

la resta que queda al dividir 1000 entre 3 será igual (109) á la que resulte de dividir el producto de las restas 1×1 de los factores por 3, esto es, *también será* 1.

Y como el producto de 1 por 1 es 1, inferimos que *cualquiera potencia de* 10 *dividida por* 3 *da por resta* 1.

Siendo $10=9+1$

si dividimos 10 entre 9, la resta será 1, y conforme á lo que acabamos de explicar refiriéndonos á 3, inferiremos igualmente que *cualquiera potencia de* 10 *dividida por* 9 *dará* 1 *por resta.*

Estas propiedades de 10 y de sus potencias, así como los cuatro teoremas establecidos en los números 106 á 109, servirán de fundamento á lo que vamos á exponer.

119.—*Siempre que sea cero el último guarismo de una cantidad, ésta será divisible exactamente por* 10.

Demostración.—Todo número que termina en cero, conforme á las convenciones del sistema de la numeración, es un múltiplo de 10, por ejemplo:

$$3850=385\times10$$

y como por una parte 10 se divide exactamente á sí mismo, y por otra siempre que un número divide á otro, divide igualmente á todos sus múltiplos (106), se deduce que cuando el último guarismo de una cantidad sea cero, ésta será divisible por 10.

120.—*Siempre que sea* 0, *ó* 5 *la última cifra de una cantidad, ésta será divisible exactamente por* 5.

Demostración.—Si la cantidad termina en cero, como $380=38\times10$, será múltiplo de 10; y como 5 divide exactamente á 10, se infiere que dividirá también á cualquier múltiplo de 10 (106), esto es, á cualquiera número que termine en 0.

Si la cantidad termina en 5, como 385, la podremos descomponer en dos partes.

$$385=380+5$$

de las que la primera 380 será divisible por 5 por ser múltiplo de 10 y la segunda también lo será, por ser 5; y siendo las dos partes de la cantidad divisibles por 5, inferiremos (107) que la cantidad total 385 también lo será.

121.—*Siempre que sea cero ó par la última cifra de una cantidad, ésta será divisible exactamente por* 2.

Demostración.—Si la cantidad termina en 0, como 370, será múltipla de 10; y como 2 divide exactamente á 10, se infiere (106) que dividirá también á cualquier número terminado en 0 por ser múltiplo de 10.

Si la cantidad termina en cifra par, como 738, la podremos descomponer en dos partes:

$$738=730+8$$

de las que la primera será divisible por 2 por ser múltipla de 10, y la segunda 8, por ser par; luego siendo las dos partes de la cantidad divisibles por 2 (107) inferiremos que la cantidad total 738 también lo será.

122.—*Una cantidad será exactamente divisible por* 4, *siempre que sus dos últimas cifras sean ceros ó formen un número divisible por* 4.

Demostración.—Hemos visto (118) que 100 es divisible exactamente por 4, por ser $100=2^2\times5^2$, luego cualquier número terminado en dos ceros, como $3500=35\times100$, será divisible por 4, por ser múltiplo de 100.

Cuando las dos últimas cifras forman un número divisible por 4, como 3548, podemos descomponerlo en dos partes:

$$3548=3500+48$$

de las que la primera 3500 será divisible por 4, porque expresando centenas será múltipla de 100, luego si la otra parte 48 es divisible por 4, resultará, que siendo las dos partes de la cantidad divisibles por 4 (107) lo será también ésta.

123.—*Cuando las tres últimas cifras de una cantidad sean ceros, ó formen una cantidad divisible exactamente por* 8, *la cantidad será divisible por* 8.

Demostración.—Hemos visto (118) que por ser $1000=2^3\times5^3$, este número es divisible exactamente por 8; luego cualquiera cantidad que termine en tres ceros, como $73000=73\times1000$, será divisible por 8 por ser múltipla de 1000 (106).

Siempre que las tres últimas cifras formen un número divisible por 8, como 73864, podemos descomponer la cantidad en dos partes:

$$73864=73000+864$$

de las que la primera siempre será divisible por 8; porque expresando millares será múltipla de 1000; luego si la otra parte, formada de las tres últimas cifras es un número, como 864, divisible exactamente por

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

8, resultará que la cantidad total 73864 también lo será, por serlo las dos partes de que se compone (107).

124.—*Una cantidad será divisible exactamente por 3, cuando lo sea la suma de las cifras significativas que la representen.*

Por ejemplo, la cantidad 582 será divisible por 3 si la suma de las cifras significativas 5+8+2 dá un número, como 15, divisible por 3.

Demostración.—Hemos visto (118) que *cualquiera potencia de* 10, *dividida por* 3 *da por resta* 1, por lo que se tiene:

$$10=3\times3+1$$
$$100=3\times33+1$$
$$1000=3\times333+1$$
$$10000=3\times3333+1$$
etc.

Toda cantidad conforme al sistema de la numeración, está compuesta de la suma de los productos de cada cifra significativa por la potencia respectiva de 10, más las unidades, por ejemplo:

$$582=5\times100+8\times10+2$$

Si en esta ecuación sustituimos en lugar de 100 su valor $3\times33+1$, y en lugar de 10 su igual $3\times3+1$, tendremos:

$$582=5\times(3\times33+1)+8\times(3\times3+1)+2$$

ejecutando las multiplicaciones resulta:

$$582=(5\times3\times33)+5+(8\times3\times3)+8+2$$

ordenando: $582=(5\times3\times33)+(3\times3\times3)+5+8+2$

siendo divisibles exactamente por 3, las dos partes $(5\times3\times33)$ y $(8\times3\times3)$ por ser múltiplas de 3, resulta que siempre que la otra parte 5+8+2, formada de la suma de las cifras significativas de la cantidad sea un número, como 15, divisible por 3, la cantidad 582 lo será, por serlo todas las partes de que consta.

125.—*Una cantidad será divisible exactamente por* 9 *cuando lo sea la suma de las cifras significativas que la representan.*

Por ejemplo, la cantidad 864 será divisible por 9 cuando la suma de sus cifras significativas 8+6+4 sea un número, como 18, divisible por 9.

Demostración.—Hemos visto (118) que *cualquiera potencia de* 10 *dividida por* 9 *da* 1 *de resta*, por lo que se tiene:

$$10=9\times1+1$$
$$100=9\times11+1$$
$$1000=9\times111+1$$
etc.

Toda cantidad conforme al sistema de numeración, se compone de la suma de los productos de cada cifra significativa por la potencia respectiva de 10, más las unidades, esto es,

$$864=8\times100+6\times10+4$$

Si en esta ecuación sustituimos en lugar de 100 su valor $9\times11+1$, y en lugar de 10 su igual $9\times1+1$, tendremos:

$$864=8\times(9\times11+1)+6\times(9\times1+1)+4$$

Ejecutando las multiplicaciones resulta:

$$864=(8\times9\times11)+8+(6\times9\times1)+6+4$$

ordenando: $864=(8\times9\times11)+(6\times9\times1)+8+6+4$

siendo divisibles exactamente por 9 las partes $(8\times9\times11)$ y $(6\times9\times1)$ por ser múltiplas de 9, resulta que siempre que la otra parte 8+6+4 formada de la suma de las cifras significativas de la cantidad sea un número como 18, divisible por 9, la cantidad 864 lo será, por serlo todas las partes de que consta.

* (126).—Para explicar el fundamento de la regla que sirve para averiguar si una cantidad es divisible por 7, demostraremos préviamente el siguiente

Teorema.—*La resta que queda al dividir una cantidad por un número, es la misma que la que resulta de dividir por este número la suma de los productos que se obtienen multiplicando respectivamente cada una de las cifras que en la cantidad representa unidades, decenas, centenas, etc., por cada una de las restas que queda en la división de 1, de 10, de 100, etc., por el divisor propuesto.*

Para facilitar nuestro razonamiento, aplicable á cualquiera cantidad y á cualquier divisor, nos serviremos de la cantidad 586 y del divisor 7.

Conforme á las convenciones del sistema de numeración

$$586=6\times1+8\times10+5\times100\ldots\ldots\ldots(1)$$

Si sucesivamente dividimos 1, 10 y 100 por 7, obtendremos:

1÷7 da por cociente 0 y por resta.....1
10÷7 da por cociente 1 y por resta.....3
100÷7 da por cociente 14 y por resta.....2

y vamos á demostrar que

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

resta de $586 \div 7$ = resta de $(6\times1+8\times3+5\times2)\div7$.

En efecto, siendo
$$1=7\times0+1$$
$$10=7\times1+3$$
$$100=7\times14+2$$

si substituimos estos valores en la ecuación (1), obtendremos:

$$586=6(7\times0+1)+8(7\times1+3)+5(7\times14+2)$$

ejecutando las multiplicaciones indicadas:

$$586=(6\times7\times0)+6\times1+(8\times7\times1)+8\times3+(5\times7\times14)+5\times2$$

ordenando los sumandos se tiene:

$$586=(6\times7\times0)+(8\times7\times1)+(5\times7\times14)+6\times1+8\times3+5\times2$$

Como si cantidades iguales se dividen por iguales, los resultados serán iguales, tendremos:

$$\frac{586}{7}=\frac{(6\times7\times0)}{7}+\frac{(8\times7\times1)}{7}+\frac{(5\times7\times14)}{7}+\frac{6\times1+8\times3+5\times2}{7}$$

y como los dividendos de las tres primeras partes del segundo miembro de esta ecuación, por ser múltiplos de 7, al dividirlos por este número dan cero por resta, tendremos finalmente que

resta de $586\div7$ = resta de $(6\times1+8\times3+5\times2)\div7$

que es lo que teníamos que demostrar.

Como habrá podido observarse, cuando sabemos que una potencia de 10, dividida por 7, por ejemplo 100, deja por resta 2, para el objeto de que ahora tratamos no es necesario conocer la parte que es múltipla de 7. En efecto, tenemos:

$$100=7\times14+2$$
5 centenas $$500=(5\times7\times14)+5\times2$$

dividiendo por 7, resulta:

$$\text{resta de } \frac{500}{7}=\text{ resta de } \frac{(5\times7\times14)}{7}+\frac{5\times2}{7}$$

pero como la parte que hemos escrito dentro de paréntesis es múltipla de 7, no necesitamos conocerla, supuesto que dará cero por resta, é inferimos que

resta de $500\div7=$ resta de $5\times2\div7$

siendo 5 la cifra que representa centenas y 2 la resta que queda en la división de 100 entre 7.

Para determinar las condiciones de divisibilidad de una cantidad por 7 vamos á fundarnos en el teorema que acabamos de demostrar y el cual pueden aplicar los alumnos á cualquiera otro divisor.

Las restas de 10 y de todas sus potencias es fácil determinarlas, recordando (109) que la resta de la división del producto es la misma que la que se obtiene dividiendo por el número dado el producto de las restas que hayan resultado al dividir los factores.

1	dividido por 7 da 0	por cociente	y por resta	.. 1
10	„	7 „ 1	„	„	.. 3
$100=10\times10$	„	7 dará por resta la misma que $\frac{3\times3}{7}$			... 2
$1000=10\times100$	„	7 „	„	„	$\frac{3\times2}{7}$ ... 6
$10000=10\times1000$	„	7 „	„	„	$\frac{3\times6}{7}$ ... 4
$100000=10\times10000$	„	7 „	„	„	$\frac{3\times4}{7}$ ... 5

Desde la sexta potencia de 10 en adelante volverán á encontrarse las mismas restas 1, 3, 2, 6, 4 y 5, y en igual orden, por lo cual se llaman estos números *período* de la división por 7.

Una vez conocidos los números que forman el *período* de la división por 7 en nuestro sistema de numeración, podemos establecer la siguiente:

Regla.—*Para conocer si una cantidad es divisible por* 7 *se escriben debajo de los guarismos que la representan, de derecha á izquierda, los números del período* 1, 3, 2, 6, 4 *y* 5 *las veces que sea necesario: se multiplica cada cifra de la cantidad por la que está debajo de ella y se suman los productos. Cuando por constar ésta suma de muchos números no es fácil determinar si es divisible por* 7, *se escriben debajo de los guarismos de la suma los correspondientes del período, se multiplican respectivamente y se suman los productos. Si la suma obtenida es divisible por* 7, *lo será la cantidad propuesta.*

Ejemplo.—Se quiere saber si el número 35.883,694 es divisible por 7. Para esto se escriben debajo de los guarismos de esta cantidad los

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

del período, se multiplican respectivamente y se suman los productos como se ve en seguida:

	PRODUCTOS.		PRODUCTOS.
Cantidad propuesta 35883694	1×4= 4	Cantidad 147	1×7= 7
Período de 7.....31546231	3×9=27	Período..231	3×4=12
	2×6=12		2×1= 2
	6×3=18		—
	4×8=32		21
	5×8=40		
	1×5= 5	Siendo 21 divisible por	
	3×3= 9	7 lo será la cantidad	
	—		35883694
	147	séptima parte	5126242

Demostración.—La cantidad propuesta

$$35.883,694=4+9.10+6.10^2+3.10^3+8.10^4+8.10^5+5.10^6+3.10^7$$

Si dividimos por 7 los dos miembros de esta ecuación, la resta que quede al dividir la cantidad 35.883,694, conforme al teorema demostrado al principio de este párrafo, será igual á la que resulte de dividir por dicho número la suma de los productos de cada una de sus cifras significativas por el guarismo correspondiente del período 1, 3, 2, 6... de la división de 7; luego si la división de la suma de estos productos no deja resta, la cantidad propuesta será exactamente divisible por 7.

* (127.)—Condiciones para que una cantidad sea divisible por 11.—Para determinar éstas seguiremos un procedimiento semejante al que hemos empleado para averiguar cuándo un número es divisible por 7, y por 9; pero como el divisor 11 es mayor que 10, consideraremos la cantidad formada de la suma de los productos de 1, 100, 100^2 y las potencias sucesivas de 100 multiplicadas por factores formados de dos en dos cifras. Por ejemplo, el número 5758192 lo consideraremos formado de las partes $92\times1+81\times100+75\times100^2+5\times100^3$ En seguida determinaremos las restas que resultan de la división de 1, 100, 100^2 y de las potencias sucesivas de 100 entre 11; multiplicaremos estas restas por los factores correspondientes á cada parte, y la suma de estos productos deberá ser divisible por 11 para que lo sea toda la cantidad.

1 dividido por 11 da por resta 1
100 dividido por 11 da por resta 1,

luego 100^2 dividido por 11, dará por resta 1, supuesto que la resta del

producto de dos cantidades 100×100, es igual á la que resulta de dividir el producto de las restas 1×1 de los factores (109).

Por la misma razón, todas las potencias de 100 divididas por 11 darán 1 por resta.

Tenemos que $5758192=92\times1+81\times100+75\times100^2+5\times100^3$

Si dividimos el número 5758192 por 11, la resta de la división será igual á la que resulta de dividir la suma de las restas de las partes que lo forman por 11; pero la de cada parte $92\times1,81\times100,75\times100^2$ y 5×100^3 es igual á la del factor de 1, de 100, y de las potencias de 100, supuesto que la resta de 1, de 100 y de las potencias de 100 son la unidad (109); luego la resta que resulte de dividir el número 5758192 por 11 será igual á la que dé la división de la suma de los factores $92+81+75+5$. La suma de estos factores es 253; considerando esta cantidad compuesta de las partes $53\times1+2\times100$ y raciocinando como antes, inferiremos que 253 dividido por 11, dará la misma resta que la suma de los factores $53+2$, pero como 55 es divisible exactamente por 11, deduciremos que lo será 253, y en consecuencia la cantidad 5758192.

En resumen, se ve que una cantidad será divisible por 11 cuando lo sea la suma de los períodos de dos en dos guarismos de que está formada, contando de derecha á izquierda. Tal es el fundamento de la siguiente

Regla.—*Para conocer si un número es divisible por* 11, *se le divide en períodos de dos en dos cifras, contando de derecha á izquierda; se suman estos períodos y si la suma es divisible exactamente por* 11, *lo será el número propuesto. Cuando la suma de los períodos consta de más de dos cifras, se dividirá en períodos de dos en dos guarismos, comenzando por las unidades, y se sumarán éstos; si su suma es divisible por* 11, *lo será el número propuesto.*

Ejemplo.—Queremos determinar si el número 25802458 es divisible por 11.

25802458	Como se ve al lado, descompondremos el número en
58	períodos de dos en dos cifras contando de derecha á iz-
24	quierda, y los sumaremos. No pudiéndose determinar á
80	primera vista si la suma 187 es divisible por 11, lo des-
25	compondremos en períodos de dos cifras, y como su su-
187	ma es 88, número divisible exactamente por 11, infiri-
87	remos que el número propuesto 25802458 también será
1	divisible por 11. Se conoce que un número menor que
88	100 es múltiplo de 11 en que el guarismo de las decenas es igual al de las unidades, como 22, 33, 44, etc.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Indicaremos otro método que se emplea frecuentemente para determinar si una cantidad puede ser exactamente divisible por 11.

Regla.—*Para conocer si un número es divisible por* 11, *se suman separadamente los guarismos de orden par y los de orden impar; se busca la diferencia entre las dos sumas, y si esta diferencia es* 0 *ó un número divisible exactamente por* 11 *lo será la cantidad propuesta.*

Ejemplo.—Sea por averiguar si el número 85650983 es divisible por 11.

85650983	Sumaremos los guarismos de orden impar, 3, 9, 5 y
3 8	5, y separadamente los de orden par 8, 0, 6, y 8. Sien-
9 0	do las dos sumas iguales, la diferencia es 0, por lo cual
5 6	conoceremos que el número propuesto es divisible exac-
5 8	tamente por 11. Otras veces la diferencia de las dos
22—22=0	sumas es 11 ó un múltiplo de ese número.

Demostración.—Determinando el período de las restas que resultan de dividir 1, 10, 10^2 y las potencias sucesivas de 10 se obtiene que

1 dividido por 11 da por resta 1
10 dividido por 11 da por resta 10
10^2 dividido por 11 da por resta 1
10^3 dividido por 11 da por resta 10

y así sucesivamente; por lo que el período de las restas es 1 y 10.

Un número cualquiera

$$5896=6\times1+9\times10+8\times10^2+5\times10^3$$

dividido por 11, dará la misma resta que la suma de los productos de sus cifras significativas por los números correspondientes del período 1 y 10. En consecuencia, el número propuesto 5896 será divisible por 11 cuando lo sea la suma de los productos

$$6\times1+9\times10+8\times1+5\times10$$

Para determinar fácilmente si será divisible por 11 la suma de esos productos observaremos que cualquiera cantidad multiplicada por 10 es igual al producto de la misma cantidad por 11, menos dicha cantidad. Por ejemplo, $3\times10=3\times11-3$; porque aumentándose al multiplicador una unidad, deberemos restar el multiplicando 3 para que no se altere el producto 3×10. Si en la suma de los términos anteriores ponemos en lugar de 9×10 su igual $(9\times11)-9$, y en lugar de 5×10 su igual $(5\times11)-5$, tendremos:

$$6\times1+9\times10+8\times1+5\times10=6+(9\times11)-9+8+(5\times11)-5$$

Si dividimos por 11 el segundo miembro de esta ecuación, siendo las partes (9×11) y (5×11) divisibles exactamente por 11, el resultado de la división dependerá del que den las otras partes:

$$6-9+8-5=6+8-9-5=[6+8]-[9+5]$$

supuesto que lo mismo es restar de la suma 6+8 primero 9 y en seguida 5 que restar de una vez la suma 9+5. En último análisis, se ve que el número 5896 será divisible por 11 cuando la diferencia que hay entre 6+8, suma de los guarismos de orden impar, y 9+5, suma de los de orden par, sea cero ó un número divisible por 11.

Esta 2ª regla sirve para averiguar facilmente si un número es divisible por 11; pero por medio de ella *no siempre* se determina *la resta* que dejaría la división de un número por 11. La razón de esto es que para facilitar el procedimiento, hemos agregado y quitado 10, lo cual no altera el valor del resultado, pero sí el del cociente y el de la resta. Por ejemplo, siendo $30=3\times10=3\times11-3$, tenemos que

$$30\div11=2+\tfrac{8}{11}$$
$$30\div11=3-\tfrac{3}{11}$$

resultados de igual valor, pero en los que los cocientes y las restas son distintos.

128.—Teorema.—*Si una cantidad es divisible separadamente por dos números primos entre sí, lo será igualmente por el producto de estos dos números.*

Si por ejemplo, 60 es divisible separadamente por 10 y por 3, números primos entre sí, decimos que 60 será divisible por 30, producto de 10 por 3.

Supuesto que 60 es divisible exactamente por 10, será múltiplo de este número, y tendremos:

$$60=10\times6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Por otra parte, en razón de que 60 es divisible igualmente por 3, tendrá que ser múltiplo de este número, esto es, 3 debe entrar forzosamente como factor en la formación de 60. Ahora bien, como

$$60=10\times6$$

el divisor 3 tiene que servir de factor para producir 10, ó 6; pero como 10 no puede ser múltiplo de 3, por ser 10 y 3 números primos entre sí, se infiere que el otro factor 6 de 60 tendrá que ser múltiplo de 3. En este ejemplo, tendremos:

$$6=3\times2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Substituyendo este valor en la ecuación (1) se obtiene finalmente:

$$60=10\times3\times2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ecuación que nos hace ver que 60 es múltiplo del producto de los números primos 10 y 3, por lo cual será divisible por 30, que es lo que debíamos demostrar.

Debe observarse que este teorema *solo se verifica cuando los divisores son primos entre sí* Así, 12 que es divisible por 2 y por 4 no será divisible por su producto 8, por que no siendo 2 y 4 números primos entre sí, el divisor 4 contiene como factor el otro divisor 2. Descomponiendo 12 en sus factores se ve en efecto que no contiene á 8, pues $12=2\times2\times3=4\times3$.

129.—*Cuando una cantidad sea divisible por* 2 *y por* 3, *será igualmente divisible por* 6.

Porque siendo 2 y 3 números primos entre sí, conforme al teorema demostrado en el párrafo anterior, una cantidad divisible por estos dos números lo será por su producto 6.

130.—*Cuando una cantidad sea divisible por* 3 *y por* 4, *lo será por su producto* 12.

Porque 3 y 4 son números primos entre sí, y 12 es su producto [128.]

131.—En resumen, según se ha visto, *una cantidad es divisible*:

1º *Por* 2 *y por* 5 *cuando sus unidades lo son:* porque siendo siempre las decenas divisibles por 2 y por 5, cuando lo sean las unidades lo serán sus dos partes.

2º *Por* 10 *cuando carece de unidades,* por ser múltiplo de 10.

3º *Por* 4 *cuando el conjunto de unidades y decenas forman una parte divisible por* 4; porque siendo $100=4\times25$, cuando las decenas y unidades forman un número divisible por 4 lo serán sus dos partes.

4º *Por* 8, *cuando la parte compuesta de centenas, decenas y unidades es divisible por* 8; porque siendo $1000=8\times125$, si el grupo de centenas, decenas y unidades es divisible por 8 lo serán sus dos partes.

5º *Por* 3, *cuando la suma de todos los guarismos que forman la cantidad dé un múltiplo de* 3, porque 10 y todas sus potencias divididas por 3 dan 1 de resta.

6º *Por* 9, *cuando la suma de los guarismos que forman la cantidad es un múltiplo de* 9, por la misma razón.

7º *Por* 6, *cuando sea divisible por* 3 *y por* 2; porque 6 es el producto de estos dos números primos entre sí.

8º *Por* 12, *cuando el número sea divisible por* 3 *y por* 4, por igual razón.

PRUEBAS DE LA MULTIPLICACION Y DIVISION DE ENTEROS.

132.—Teorema.—*Cuando se suman las cifras significativas de una cantidad hasta reducirla á unidades simples* (70), *se obtiene una cifra igual á la resta que daría la cantidad dividida por* 9.

Demostración.—Un número cualquiera como 326 puede descomponerse en las partes siguientes, conforme al sistema de numeración:

$$326=3\times100+2\times10+6$$

sustituyendo por 100 y por 10 sus valores:

$$100=9\times11+1$$
$$10=9+1$$

tendremos: $326=3(9\times11+1)+2(9+1)+6$

ejecutando la multiplicación:

$$326=(3\times9\times11)+3+(2\times9)+2+6$$

pero como las partes puestas dentro de los paréntesis son múltiplas de 9, resulta que dividiendo por 9 los dos miembros de esta ecuación:

$$\text{resta de } \frac{326}{9}=\text{resta de } \frac{3+2+6}{9}$$

Para determinar la resta que daría la división por 9 de la suma de las cifras significativas de la cantidad

$$3+2+6=11$$

descompondremos 11 en sus partes como sigue:

$$11=1\times10+1=1\times[9+1]+1=1\times9+1+1$$

dividiendo por 9 los dos miembros de esta ecuación, resulta:

$$\text{resta de } \frac{11}{9}=\text{resta de } \frac{1+1}{9}=2$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

luego resta de $\frac{326}{9}$ es 2, y por tanto cuando se reduce una cantidad á unidades simples, se determina la resta que daría dividiéndola por 9.

Demostración de la regla del número 70.—Si sabemos, por ejemplo, que

$$346 \times 876 = 303096$$

tendremos: resta de $\frac{346 \times 876}{9}$ = resta de $\frac{303096}{9}$

Como por una parte si el producto de dos factores y cada uno de ellos se dividen separadamente por un número como 9, la resta que queda en la división del producto, es igual á la que resulta de dividir el producto de las restas de los dos factores por el mismo número [109], y por otra, la resta que queda en la división de un número por 9 es igual á la cifra que resulta de reducir á unidades simples este número [132], se infiere que cuando no se ha cometido error en una multiplicación, el producto reducido á unidades simples debe dar una cifra igual á la que se obtiene de multiplicar las cifras que han resultado de los factores reducidos á unidades.

En nuestro ejemplo: resta de $\frac{4 \times 3}{9}$ debe ser igual á 3, resta de la división del producto.

133.—Demostración de la regla del número 87.—Si dividiendo, por ejemplo, 303104 entre 634 se obtiene 478 como cociente y 52 por resta, como el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más la resta, tendremos:

$$303104 = 634 \times 478 + 52$$

y como si con cantidades iguales se ejecutan operaciones iguales, los resultados serán iguales, tendremos:

$$\text{resta de } \frac{303104}{9} = \text{resta de } \frac{634 \times 478}{9} + \text{resta de } \frac{52}{9}$$

pero como por una parte la resta que queda de la división de un número por 9 es la cifra que resulta de reducirlo á unidades simples (132), y por otra la resta que queda en la división del producto, es igual á la que resulta de dividir el producto de las restas de los factores por el mismo número (109), se infiere que cuando no se ha cometido error en una división de enteros, el dividendo reducido á unidades simples debe dar una cifra igual á la que se obtiene de reducir á unidades simples

el producto del divisor por el cociente más la resta reducidos cada uno de estos números á unidades simples.

En nuestro ejemplo debe resultar 2, cifra del dividendo, igual á $4 \times 1 + 7$ reducido á unidades, igual á 2.

Estas reglas son aplicables aun cuando las cantidades sean múltiplas de 9, lo cual se conoce en que reducidas á unidades simples dan la cifra 9.

134.—Estas pruebas pueden dar resultados falsos, cuando se ha cometido algún error en la prueba, ó cuando se ha invertido la colocación de los guarismos. Cuando se quiere averiguar esto, pueden buscarse las restas de la división de los términos y de los resultados de la multiplicación ó división por otro número; comunmente se escoge por divisor el número 11, sumando los guarismos divididos en periodos de dos en dos comenzando por la derecha.

* (135).—Observaciones sobre el cálculo de los números enteros.—En lo que hemos expuesto se habrá observado que el sistema de numeración está fundado en formar unidades superiores constantemente iguales al conjunto de diez de la especie menor. Para denominar los números nos servimos de pocos términos que combinados dan una idea de su valor; y con el objeto de representarlos con pocos guarismos, se les ha dado á éstos, además de su valor propio, otro relativo ó de posición, que crece de derecha á izquierda en la misma relación que las potencias sucesivas de 10; sirviendo el cero para indicar la carencia de cualquier orden de unidades y conservar á los demas guarismos el valor que les coresponde. Un número cualquiera es igual á la suma de los productos de cada cifra significativa multiplicada por la potencia de 10 correspondiente al orden de sus unidades, más las unidades simples.

El fundamento de la ejecución de las operaciones de enteros consiste en dividir éstos en las partes del sistema de numeración de que están compuestos, esto es, en unidades, decenas, centenas, etc., y ejecutar las operaciones con estas partes. Con excepción de la división, las operaciones se comienzan por las unidades de especie menor. El objeto de cada operación es engendrar un número nuevo, de un modo peculiar á la naturaleza de cada operación.

Para la adición y substracción es condición indispensable que las cantidades sean homogéneas, y el resultado de estas operaciones es de la misma especie que los datos de la cuestión. En la multiplicación el producto es de la especie del multiplicando, y al multiplicador se le puede considerar como abstracto. En la división la pregunta determina la especie del cociente.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La suma consta de tantas unidades como todos los sumandos juntos y es siempre mayor que uno y que varios sumandos. La resta consta de las unidades que le faltan al substraendo para ser igual al minuendo, y es siempre menor que este término. El producto de una multiplicación de números enteros, generalmente es mayor que los factores que lo han formado, y tantas veces mayor que un factor, como unidades tiene el otro; pero la multiplicación no siempre da el resultado de aumento que el significado de esta palabra envuelve en el lenguage común: el objeto de esta operación es engendrar un número que tenga con el multiplicando la misma relación que el multiplicador tiene con la unidad; por esto, una cantidad multiplicada por la unidad no aumenta sino que da la misma cantidad, y multiplicada por cero produce cero. El cociente de una división que no ha dado resta, es tantas veces menor que el dividendo como unidades tiene el divisor. Cuando la división no resulta exacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más la resta.

La regla dada en la substracción para el caso de que uno ó varios guarismos del substraendo sean mayores que los correspondientes del minuendo, se funda en que la diferencia entre dos cantidades no se altera cuando se les agrega una misma cantidad. Las abreviaciones indicadas para los casos de la multiplicación y de la división, se fundan en las convenciones del sistema de numeración, haciéndose el valor de una cantidad 10 veces mayor por cada cero que se le agrega á la derecha, y disminuyéndose proporcionalmente cuando se suprimen ceros: en que toda cantidad multiplicada ó dividida por la unidad, da la misma cantidad: en que todo número multiplicado por 0 produce 0, y en que el cociente no se altera cuando se multiplican ó dividen por un mismo número el dividendo y el divisor. El resultado de la adición, substracción y multiplicación de los enteros siempre es número entero; pero el resultado de la división unas veces es entero y otras una fracción ó un número fraccionario.

Las propiedades de los factores y de los divisores de los números enteros, se han deducido de las de los números primos, y de las de las partes en que las cantidades pueden descomponerse. Unas veces se han descompuesto los números en las partes del sistema de numeración que los forman; otras en los factores de que constan, y otras en productos de determinado divisor, más una resta. De tales fundamentos, se han deducido las reglas correspondientes para encontrar los factores y divisores de un número, para determinar el máximo común divisor, y para obtener el menor múltiplo común á varios números. Por último, fundándose en las propiedades del número 10 y de sus potencias divi-

didas por los primeros números primos, hemos fijado las condiciones que debe satisfacer una cantidad para que sea divisible por los números inferiores á 12.

CALCULO DE LAS FRACCIONES COMUNES Y DE LOS NUMEROS FRACCIONARIOS.

SISTEMA DE NUMERACIÓN, PRINCIPIOS Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

136.—Definiciones.—Vamos á tratar en este capítulo del modo de calcular con las cantidades, cuyos valores estén comprendidos entre 0 y la unidad, ó entre dos números enteros consecutivos. Cuando decimos que tenemos tres cuartas partes de vara, el valor de la cantidad es mayor que cero y menor que una vara, y cuando decimos que tenemos 8 varas y 5 sextas partes de vara, este es un valor comprendido entre 8 y 9 varas.

Si tuviéramos que dividir, por ejemplo, 25 pliegos de papel entre cuatro personas, como $25 \div 4$ les toca á 6 y sobra 1; daríamos 6 pliegos enteros á cada persona, y debiendo repartir el pliego sobrante entre cuatro, lo partiríamos en cuatro pedazos iguales y daríamos uno de ellos á cada persona. Cada uno de estos pedazos es menor que la unidad y es la cuarta parte de ella. Se representa por $\frac{1}{4}$ de pliego, y se lee un cuarto de pliego.

Si tuviéramos que repartir 29 manzanas entre 8 niños; como $29 \div 8$ les toca á 3 y sobran 5: daríamos 3 manzanas á cada niño y para distribuir entre ellos las 5 sobrantes, por ser 8 los niños, cada manzana la partiríamos en 8 pedazos iguales y dando cinco de estos pedazos á cada niño resulta que recibiría en conjunto 3 manzanas enteras y 5 octavas partes de una manzana. Este resultado se representa por $3+\frac{5}{8}$ de manzana, y se lee: 3 más 5 octavos de manzana.

Estos números como $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{8}$ menores que la unidad se llaman *quebrados*. Los números como $3+\frac{5}{8}$ se llaman *mixtos*, y cuando el número mixto tiene la forma de quebrado se le llama *fraccionario*, como $\frac{8}{4}=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=1+1$. En un quebrado como $\frac{5}{8}$, el número 8 que indica en cuántas partes se considera dividida la unidad se llama *denominador*, y el número 5 que expresa de cuántas de estas partes consta el quebrado se llama *numerador*.

Considerando el peso dividido en 4 partes, las pesetas son fracciones

La suma consta de tantas unidades como todos los sumandos juntos y es siempre mayor que uno y que varios sumandos. La resta consta de las unidades que le faltan al substraendo para ser igual al minuendo, y es siempre menor que este término. El producto de una multiplicación de números enteros, generalmente es mayor que los factores que lo han formado, y tantas veces mayor que un factor, como unidades tiene el otro; pero la multiplicación no siempre da el resultado de aumento que el significado de esta palabra envuelve en el lenguage común: el objeto de esta operación es engendrar un número que tenga con el multiplicando la misma relación que el multiplicador tiene con la unidad; por esto, una cantidad multiplicada por la unidad no aumenta sino que da la misma cantidad, y multiplicada por cero produce cero. El cociente de una división que no ha dado resta, es tantas veces menor que el dividendo como unidades tiene el divisor. Cuando la división no resulta exacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más la resta.

La regla dada en la substracción para el caso de que uno ó varios guarismos del substraendo sean mayores que los correspondientes del minuendo, se funda en que la diferencia entre dos cantidades no se altera cuando se les agrega una misma cantidad. Las abreviaciones indicadas para los casos de la multiplicación y de la división, se fundan en las convenciones del sistema de numeración, haciéndose el valor de una cantidad 10 veces mayor por cada cero que se le agrega á la derecha, y disminuyéndose proporcionalmente cuando se suprimen ceros: en que toda cantidad multiplicada ó dividida por la unidad, da la misma cantidad: en que todo número multiplicado por 0 produce 0, y en que el cociente no se altera cuando se multiplican ó dividen por un mismo número el dividendo y el divisor. El resultado de la adición, substracción y multiplicación de los enteros siempre es número entero; pero el resultado de la división unas veces es entero y otras una fracción ó un número fraccionario.

Las propiedades de los factores y de los divisores de los números enteros, se han deducido de las de los números primos, y de las de las partes en que las cantidades pueden descomponerse. Unas veces se han descompuesto los números en las partes del sistema de numeración que los forman; otras en los factores de que constan, y otras en productos de determinado divisor, más una resta. De tales fundamentos, se han deducido las reglas correspondientes para encontrar los factores y divisores de un número, para determinar el máximo común divisor, y para obtener el menor múltiplo común á varios números. Por último, fundándose en las propiedades del número 10 y de sus potencias divi-

didas por los primeros números primos, hemos fijado las condiciones que debe satisfacer una cantidad para que sea divisible por los números inferiores á 12.

CALCULO DE LAS FRACCIONES COMUNES Y DE LOS NUMEROS FRACCIONARIOS.

SISTEMA DE NUMERACIÓN, PRINCIPIOS Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

136.—Definiciones.—Vamos á tratar en este capítulo del modo de calcular con las cantidades, cuyos valores estén comprendidos entre 0 y la unidad, ó entre dos números enteros consecutivos. Cuando decimos que tenemos tres cuartas partes de vara, el valor de la cantidad es mayor que cero y menor que una vara, y cuando decimos que tenemos 8 varas y 5 sextas partes de vara, este es un valor comprendido entre 8 y 9 varas.

Si tuviéramos que dividir, por ejemplo, 25 pliegos de papel entre cuatro personas, como $25 \div 4$ les toca á 6 y sobra 1; daríamos 6 pliegos enteros á cada persona, y debiendo repartir el pliego sobrante entre cuatro, lo partiríamos en cuatro pedazos iguales y daríamos uno de ellos á cada persona. Cada uno de estos pedazos es menor que la unidad y es la cuarta parte de ella. Se representa por $\frac{1}{4}$ de pliego, y se lee un cuarto de pliego.

Si tuviéramos que repartir 29 manzanas entre 8 niños; como $29 \div 8$ les toca á 3 y sobran 5: daríamos 3 manzanas á cada niño y para distribuir entre ellos las 5 sobrantes, por ser 8 los niños, cada manzana la partiríamos en 8 pedazos iguales y dando cinco de estos pedazos á cada niño resulta que recibiría en conjunto 3 manzanas enteras y 5 octavas partes de una manzana. Este resultado se representa por $3+\frac{5}{8}$ de manzana, y se lee: 3 más 5 octavos de manzana.

Estos números como $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{8}$ menores que la unidad se llaman *quebrados*. Los números como $3+\frac{5}{8}$ se llaman *mixtos*, y cuando el número mixto tiene la forma de quebrado se le llama *fraccionario*, como $\frac{8}{4}=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=1+1$. En un quebrado como $\frac{5}{8}$, el número 8 que indica en cuántas partes se considera dividida la unidad se llama *denominador*, y el número 5 que expresa de cuántas de estas partes consta el quebrado se llama *numerador*.

Considerando el peso dividido en 4 partes, las pesetas son fracciones

del peso y se indican por $\frac{1}{4}$\$ por $\frac{2}{4}$\$ y por $\frac{3}{4}$\$. Considerando el peso dividido en 8 partes, los reales son octavos de peso, y así cinco reales equivale á $\frac{5}{8}$\$, cinco octavos de peso.

Si el día se considera dividido en dos partes, cada una de ellas será medio día, y si lo consideramos dividido en 24 partes, cada una de ellas será un veinticuatroavo de día, y en lugar de estimar el tiempo en horas y de decir una hora, 5 horas, podremos hacerlo dando á estos valores la forma de fracciones é indicar $\frac{1}{24}$ día, un veinticuatroavo de día, $\frac{5}{24}$ día, cinco veinticuatroavos de día.

Se comprende que el valor de un quebrado depende de la relación que existe entre los dos números que lo representan, y que cambiando estos números podremos obtener un valor que se acerque á la unidad ó que se aleje de ella tanto como se quiera.

Se llaman fracciones ó quebrados, los números que representan las cantidades menores que la unidad: como un quinto, dos tercios, etc.

Se llaman números mixtos, los que constan de unidades enteras y de partes de la unidad, como 82 y 3 octavos.

Se llaman fraccionarios los números mayores que la unidad que tienen la forma de quebrados, como $\frac{6}{4}$.

137.—Sistema de numeración.—Para tener una idea exacta del valor de una fracción es necesario conocer dos cosas: 1.°, en cuántas partes está dividida la unidad: 2.°, de cuántas de estas partes consta la fracción; por lo cual tanto para representar como para denominar una fracción es preciso escribir y expresar los números que indican el valor de estas dos cosas.

Los quebrados se representan por medio de dos guarismos puestos uno sobre otro, separados por una raya, de este modo: $\frac{5}{8}$. El número que se pone encima se llama *numerador y expresa el número de partes de la unidad de que consta el quebrado.* El número que se pone abajo se llama *denominador y expresa el número de partes en que está dividida la unidad.* Al numerador y al denominador juntos se les llama *términos del quebrado.*

Para leer las fracciones ó quebrados se lee primero el numerador como número entero y en seguida el denominador, como número *partitivo*, esto es, se dice medios, cuando el denominador es 2; tercios, cuando es 3; cuartos, cuando es 4; quintos, cuando es 5; sextos, cuando es 6; séptimos, cuando es 7; octavos, cuando es 8; novenos, cuando es 9; décimos, cuando es 10; y de 10 en adelante se agrega la terminación *avos*, al nombre del número del denominador

Por ejemplo: $\frac{7}{9}$ se lee: siete novenos.

$\frac{345}{872}$ se lee: 345, 872 avos.

Para escribir los números fraccionarios ó mixtos se ponen los enteros y á continuación los quebrados, separados generalmente por el signo + más, y se leen primero los enteros y á continuación la fracción como acaba de explicarse

$72+\frac{3}{12}$ se lee: 72 unidades y 3 doceavos.

El valor de un quebrado depende de la relación que existe entre el valor del numerador y el del denominador, y no de la magnitud de sus términos; por esto es, que, por ejemplo:

$\frac{3}{4}$ hora$=\frac{6}{8}=\frac{45}{60}$.

no obstante que los números que representan los tres quebrados son muy distintos.

138.—Quebrados propios é impropios.—Según la representación que tiene cada uno de los términos del quebrado, resulta: 1° que mientras más se aproxima el numerador al denominador, más se acercará el valor del quebrado á la unidad; 2°, que cuando el numerador sea igual al denominador, el quebrado será igual á la unidad; y 3°, cuando el numerador es mayor que el denominador, el quebrado tiene un valor mayor que la unidad, esto es, representa un número fraccionario.

Definición.—*Se da el nombre de quebrado propio, ó fracción común á todo quebrado cuyo valor es menor que la unidad, lo cual se conoce en que el numerador es menor que su denominador.*

Definición.—*Se llama quebrado impropio ó fraccionario, á todo aquel cuyo valor es mayor que la unidad, lo cual se conoce en que su numerador es mayor que su denominador*

139.—Reducción de los enteros á fracción.—*Cuando se le quiera dar á un entero la forma de quebrado, se le pondrá por denominador la unidad:* $8=\frac{8}{1}$. En este caso se considera la unidad compuesta de una sola parte.

Cuando se quiere reducir un entero á fracción de determinado denominador, se multiplicará el entero por el denominador que se quiera que lleve la fracción, y al producto se le pondrá por denominador el propuesto. Por ejemplo, para reducir 7 enteros á quintos se multiplicará 7 por 5, y al producto 35 se le pondrá 5 por denominador: $7=\frac{35}{5}$

Esta regla se funda en que es un uso de la multiplicación reducir unidades de especie mayor á menor, y como la unidad se compone de 5 quintos, multiplicando 7 por 5, tendremos el número de quintos que tienen 7 unidades, y al producto 35 le pondremos 5 por denominador, para indicar el valor de las partes de la unidad.

Cuando se quieren reducir los enteros á la forma de quebrados que los

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

acompañan, se multiplicará el entero por el denominador del quebrado, al producto se le agrega el numerador, y á la suma se le da por denominador el del quebrado.

Por ejemplo, si se quiere dar al número mixto $7+\frac{5}{9}$ la forma de quebrado, se multiplicará 7 por 9, al producto 63 le agregamos el numerador 5, dándole á la suma 68 por denominador 9.

$$7+\tfrac{5}{9}=\tfrac{68}{9}$$

Demostración.—Al multiplicar el entero por el denominador del quebrado, reducimos unidades de especie mayor á menor, y al agregar el numerador, sumamos cantidades homogéneas; esto es, partes de la unidad de la misma especie, cuyo valor expresamos poniendo por denominador el del quebrado.

140.—Transformación de los fraccionarios en enteros ó en números mixtos.—*Cuando se quiere determinar los enteros que contiene un quebrado impropio, se divide el numerador por el denominador, y si hay resta se le pone por denominador el del quebrado.*

Sea por determinar los enteros que contiene el quebrado impropio $\frac{387}{12}$. Dividiremos 387 entre 12, y obtendremos 32 por cociente que serán los enteros contenidos, y á la resta 3 se le pondrá 12 por denominador, resultando que $\frac{387}{12}=32+\frac{3}{12}$

387	12
27	32
3	

Demostración.—Al ejecutar esta regla, no hacemos más que reducir unidades de especie menor á mayor, doceavos á unidades, que es uno de los usos de la división, y siendo la resta partes de la unidad, cuya magnitud indica el denominador del quebrado impropio, se le deberá poner este número por denominador.

141.—Valor relativo entre quebrados de iguales denominadores ó numeradores.—Entre quebrados de iguales denominadores:

$$\tfrac{5}{12},\ \tfrac{3}{12},\ \tfrac{2}{12}\ \text{y}\ \tfrac{9}{12}$$

1° el mayor es $\frac{9}{12}$, que es el que tiene mayor numerador;

2° el menor es $\frac{2}{12}$, que es el que tiene menor numerador.

En razón de que, estando la unidad dividida en todos los quebrados en igual número de partes, la magnitud de éstas será la misma, y de que expresando el numerador el número de partes de que consta el quebrado el que tenga mayor numerador tendrá mayor valor, y el que lo tenga menor consta de menos partes.

Entre los quebrados de iguales numeradores:

$$\tfrac{6}{13},\ \tfrac{6}{9},\ \tfrac{6}{7}\ \text{y}\ \tfrac{6}{10}$$

el mayor es $\frac{6}{7}$, que es el que tiene menor denominador, y el menor es $\frac{6}{13}$ que es el que tiene mayor denominador.

Como todos los quebrados tienen iguales numeradores constan del mismo número de partes, y su valor dependerá de la magnitud de estas partes; pero como mientras menos sean las partes en que se divida la unidad, más grande será cada una de ellas, y recíprocamente; resulta que tendrá mayor valor el quebrado que tenga menor denominador y viceversa. De esto se infiere:

1° Que entre quebrados de iguales denominadores, el que tenga mayor numerador será el de mayor valor.

2° Que entre quebrados de iguales denominadores, el que tenga menor numerador será el menor.

3° Que entre quebrados que tienen iguales numeradores, es mayor el que tiene menor denominador; y

4° Que entre quebrados de iguales numeradores, será menor el que tenga mayor denominador.

142.—Principios fundamentales del cálculo de los quebrados.—Las operaciones que se ejecutan con las fracciones y los números fraccionarios se fundan en los cuatro principios siguientes:

Primer principio.—*El valor de un quebrado se hace mayor tantas veces, como unidades tiene el número por el cual se multiplica su numerador.*

Si multiplicamos por 4 el numerador del quebrado $\frac{3}{15}$, se obtendrá el quebrado $\frac{12}{15}$ que es cuatro veces mayor que $\frac{3}{15}$.

Demostración.—Hay que demostrar dos cosas: 1ª que el valor del quebrado *se hace mayor*, y 2ª que se hace mayor *tantas veces* como unidades tiene el factor del numerador. 1° Expresando el numerador las partes de la unidad de que consta el quebrado, al multiplicar por un número entero el numerador aumentará este término, y por tanto *se hará mayor* el valor del quebrado; 2° como el producto de los enteros es tantas veces mayor que uno de los factores como unidades tiene el otro, el valor del nuevo quebrado será *tantas veces* mayor que el primitivo como unidades tiene el número por el cual se multiplique su numerador.

Segundo principio.—*El valor de un quebrado se hace menor tantas veces, como unidades tiene el número por el cual se multiplica su denominador.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Si se multiplica por 2 el denominador del quebrado $\frac{3}{15}$, se obtendrá el quebrado $\frac{3}{30}$ dos veces menor que $\frac{3}{15}$.

Demostración.—Hay que demostrar: 1º, que el valor del quebrado *se hace menor*, y 2º, que se hace *menor tantas veces* como unidades tiene el número por el cual se multiplica el denominador: 1.º Representando el denominador el número de partes en que está dividida la unidad, al multiplicar por un número este término, aumentará el número de partes de la unidad, y menor será cada una de ellas, por lo cual, el valor del quebrado *se hará menor*: 2º como el producto de los enteros es tantas veces mayor que uno de los factores como unidades tiene el otro factor, el valor del quebrado se hará *tantas veces* menor como unidades tenga el número por el cual se multiplique su denominador.

Tercer principio.—*El valor de un quebrado se hace menor tantas veces como unidades tiene el número por el cual se divide su numerador.*

Si dividimos por 3 el numerador del quebrado $\frac{6}{15}$, nos resultará $\frac{2}{15}$ tres veces menor que $\frac{6}{15}$.

Demostración.—El segundo quebrado $\frac{2}{15}$ es menor que $\frac{6}{15}$, porque entre quebrados de igual denominador, *es menor* el que tiene menor numerador. Además, siendo el numerador 2 el cociente de 6, dividido por 3, será el valor del numerador, y en consecuencia, el del segundo quebrado, *tantas veces menor* que el primero, como unidades tiene el número por el cual se dividió el numerador.

Cuarto principio.—*El valor de un quebrado se hace mayor tantas veces, como unidades tiene el número por el cual se divide su denominador.*

Si dividimos por 4 el denominador del quebrado $\frac{3}{24}$, resultará $\frac{3}{6}$ cuatro veces mayor que $\frac{3}{24}$.

Demostración.—Hay que demostrar: 1º, que el valor del quebrado *se hace mayor*, y 2º, que se hace *mayor tantas veces* como unidades tiene el número por el cual se divide su denominador. 1º Indicando este término las partes en que está dividida la unidad, cuando se divide por un número disminuirá, y resultando mayor el valor de cada una de las partes de la unidad, el valor del quebrado *se hará mayor*; 2º como el cociente es *tantas veces* menor que el dividendo como unidades tiene el divisor, el valor del quebrado se habrá hecho *tantas veces mayor* como unidades tiene el número por el cual se divide su denominador.

143.—Los cuatro principios que anteceden, pueden reasumirse en la tabla siguiente:

Si se multiplica Si se divide	el numerador..	se multiplicará se dividirá	el quebrado.
Si se multiplica Si se divide	el denominador.	se dividirá se multiplicará	el quebrado.

Por ejemplo:

$$\frac{6}{24} \times 3 = \frac{18}{24}$$
$$\frac{6}{24} \times 3 = \frac{6}{8}$$
$$\frac{6}{24} \div 3 = \frac{2}{24}$$
$$\frac{6}{24} \div 3 = \frac{6}{72}$$

Por esto se ve: 1º, que las operaciones fundamentales del cálculo de las fracciones son dos: multiplicar un quebrado por un entero, y dividir un quebrado por un entero; 2º, un quebrado se puede multiplicar por un entero multiplicando su numerador ó dividiendo su denominador; 3º, un quebrado se divide por un entero, dividiendo su numerador ó multiplicando su denominador; y 4º, la multiplicación del numerador, multiplica el quebrado y la división del numerador divide el quebrado; pero las mismas operaciones ejecutadas con el denominador, producen el resultado que daría la operación inversa hecha con el quebrado.

144.—En qué casos no se altera el valor de un quebrado.—Teorema.—*El valor de un quebrado no se altera cuando se multiplican ó se dividen sus dos términos por un mismo número.*

Demostración.—1º Cuando se multiplica el numerador de un quebrado por un número, el valor del quebrado se hace tantas veces mayor como unidades tiene el número por el cual se multiplicó el numerador: pero cuando se multiplica el denominador, el valor del quebrado se hace el mismo número de veces menor; luego aumentando por una operación tanto cuanto disminuye por la otra, el valor del quebrado no sufrirá alteración.

2º Cuando se divide el numerador de un quebrado por un número su valor se hace menor tantas veces como unidades tiene el número por el cual se dividió su numerador; pero cuando se divide el denominador por el mismo número, el valor del quebrado se hace igual número de veces mayor; luego disminuyendo por la primera operación tanto cuanto aumenta por la segunda, el valor del quebrado no sufrirá alteración.

La primera parte de este teorema es el fundamento de la reducción de los quebrados á un común denominador, y la segunda parte sirve para abreviarlos.

145.—Simplificación de los quebrados.—Definición.—*Simplificar ó abreviar un quebrado, es transformarlo en otro de igual valor cuyos términos sean más sencillos.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Regla.—*Para simplificar un quebrado, se dividen el numerador y el denominador por un mismo número.*

Demostración.—1º El valor del quebrado simplificado será igual al del primitivo, porque el valor de un quebrado no se altera cuando se dividen sus dos términos por un mismo número; 2º los términos del quebrado simplificado serán más sencillos, porque el cociente de la división de enteros es menor que el dividendo.

El objeto de la abreviación ó simplificación de los quebrados es ejecutar las operaciones con más facilidad y menos probabilidad de equivocaciones.

Cuando se trata de simplificar un quebrado, lo que importa es determinar los divisores que son comunes al numerador y al denominador, y la simplificación puede ejecutarse de dos maneras: dividiendo el numerador y el denominador sucesivamente por los divisores parciales que les son comunes, ó por su máximo común divisor, para lo cual debe tenerse presente todo lo expuesto en los números del 119 al 131, y del 110 al 114.

Ejemplo.—Sea por simplificar el quebrado

$$\frac{5160}{6840}$$

buscando los números que dividen exactamente los dos términos del quebrado, observaremos que, terminando ambos en 0, serán divisibles

43 por 10; sacándole décima parte se convertirá en $\frac{516}{684}$;
129 en este quebrado, siendo pares las últimas cifras 6 y 4
516 de sus dos términos, se podrán dividir por dos; pero te-
5160 niendo cuarta parte 16 y 84, los términos del quebrado
6840 serán divisibles por 4, lo cual lo transforma en $\frac{129}{171}$; los
$\frac{1}{10}$ 684 términos de este nuevo quebrado son divisibles por 3,
$\frac{1}{4}$ 171 porque la suma de las cifras del numerador 1+2+9
$\frac{1}{3}$ 57 da un número múltiplo de 3, las del denominador 1+7
+1 también dan un múltiplo de 3; por último, sacándole tercera parte, se obtiene el quebrado $\frac{43}{57}$ compuesto de números primos entre sí. En consecuencia el quebrado

$$\frac{5160}{6840}=\frac{43}{57}$$

146.—Simplificación de los quebrados por medio de los divisores parciales de sus dos términos.—Cuando se quiere abreviar un quebrado dividiendo sucesivamente sus dos términos por divisores enteros comunes á ambos, se examina:

1º *Si la última cifra del numerador y la del denominador es* 0 *ó* 5.

Si ambas son 0, *los términos del quebrado serán divisibles exactamente por* 10 (119). *Si una es* 0 *y la otra* 5, *ó si ambas son* 5, *los términos del quebrado tendrán quinta parte* (120).

2º *Se observa, si tanto la última cifra del numerador como la del denominador es cero ó par: en este caso los términos del quebrado serán divisibles por* 2 (121). Cuando se ve que esta condición está satisfecha, *se examina si tanto las dos últimas cifras del numerador como las del denominador, tienen cuarta parte; en este caso, los dos términos del quebrado la tendrán* (122). Cuando se ve que esta última condición está satisfecha, *se examina si las tres últimas cifras del numerador y las del denominador tienen octava parte; en este caso los dos términos del quebrado la tendrán* (123).

3º Se observa si la suma de los guarismos que representan al numerador, y si la suma de los guarismos que representan al denominador, dan un número divisible por 9 ó por 3. *Cuando la suma de los guarismos de cada término del quebrado da un número múltiplo de* 9, *se podrán dividir por* 9 *y cuando la suma de los guarismos es un múltiplo de* 3, *los términos del quebrado serán divisibles por* 3 (125 y 124).

4º *Se observa si los dos términos del quebrado tienen mitad y tercera: en este caso se podrá simplificar dividiendo sus dos términos por* 6 (129).

Sean por abreviar los siguientes quebrados:

$$\frac{72}{96}=\frac{3}{4}\cdot\quad\frac{945}{1080}=\frac{7}{8}\quad\frac{216}{396}=\frac{6}{11}\quad\frac{1800}{3240}=\frac{5}{9}$$

147.—Simplificación de los quebrados por el máximo común divisor.—*Para encontrar el máximo común divisor de los términos de un quebrado, se divide el denominador por el numerador; si la división sale exacta, el numerador será el máximo común divisor; en caso contrario, se divide el número que sirvió de divisor por la resta, y si la división no sale exacta, se continúa la operación dividiendo sucesivamente el último divisor por su resta hasta obtener una división exacta, siendo el máximo común divisor de los términos del quebrado el último divisor.*

La demostración de esta regla la hemos dado en el número 112.

Una vez encontrado el máximo común divisor, *el quebrado se simplifica dividiendo cada uno de sus términos por el máximo común divisor.*

Sea por determinar el máximo común divisor de los términos del quebrado $\frac{743}{1643}$.

La operación se facilita disponiéndola como sigue:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

1643	742	159	106	53	00
	2	4	1	2	
31	14	3	2	1	

El máximo común divisor es 53, y para determinar los términos del quebrado reducido á su más simple expresión, se pone la unidad debajo del último cociente; en seguida se multiplica la unidad por este cociente y el producto se pone en la casilla de la izquierda, y se continúa multiplicando el guarismo inferior por el cociente que está sobre él, se agrega al producto el guarismo de la derecha, y se pone el resultado en la casilla de la izquierda. El fundamento de esta regla lo hemos dado en el número 114.

El quebrado $\frac{742}{1643}$ reducido á su más simple expresión, es igual á $\frac{14}{31}$.

Como ejercicio, búsquese el máximo común divisor de los quebrados siguientes:

$$\frac{171}{969}=\frac{3}{17} \quad \frac{627}{1425}=\frac{11}{25} \quad \frac{477}{1219}=\frac{9}{23} \quad \frac{799}{2961}=\frac{17}{63}$$

148.—Reducción de los quebrados á un común denominador.—Definición.—*Reducir los quebrados á un común denominador, es transformarlos en otros de igual valor, y cuyos denominadores son iguales entre sí.*

Esta operación puede ejecutarse de dos maneras:

1ª Regla.—*Para reducir los quebrados á un común denominador, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los demás denominadores.*

Ejemplo.—Sea por reducir á un común denominador los quebrados

$$\frac{2}{3},\ \frac{1}{4}\ \text{y}\ \frac{7}{8}$$

Multiplicaremos los términos del primer quebrado $\frac{2}{3}$ por 32, producto de los otros denominadores 4 y 8, y se convertirá en $\frac{64}{96}$. Los términos del segundo quebrado $\frac{1}{4}$, los multiplicaremos por 24 producto de los demás denominadores, y se transformará en $\frac{24}{96}$.

Por último, multiplicaremos los términos del tercer quebrado $\frac{7}{8}$ por 12, producto de los denominadores de los demás quebrados, y se convertirá en $\frac{84}{96}$. Así, los quebrados

$$\frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{7}{8},\ \text{se transforman en}\ \frac{64}{96},\ \frac{24}{96},\ \frac{84}{96}.$$

Demostración.—Hay dos cosas que demostrar: 1ª, *los quebrados que resultan son respectivamente iguaes en valor á los primeros*, porque el valor de un quebrado no se altera cuando se multiplican sus dos términos por un mismo número (144); 2ª *los quebrados tendrán el mismo denominador*, porque estando formado cada uno de los nuevos denominadores del producto de los mismos números, (los denominadores de los quebrados primitivos) serán iguales entre sí.

2ª Regla.—*Para reducir los quebrados á un común denominador, se forma el menor múltiplo común á los denominadores, y en seguida se multiplican los dos términos de cada quebrado por el cociente que resulta de dividir el múltiplo común entre su denominador.*

Ejemplo.—Sea por reducir á un común denominador los quebrados

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6}$$

el menor múltiplo común á los denominadores 2, 3, 4 y 6, es 12. Los términos del primer quebrado $\frac{1}{2}$ los multiplicaremos por 6, cociente obtenido de dividir el común múltiplo 12 entre el denominador 2, y se transformará en $\frac{6}{12}$. Los términos del segundo quebrado $\frac{2}{3}$ los multiplicaremos por 4, cociente de $12\div3$, se transforma en $\frac{8}{12}$. Los términos del tercer quebrado $\frac{3}{4}$ los multiplicaremos por 3, cociente de $12\div4$, y se transforma en $\frac{9}{12}$. Por último, los términos del quebrado $\frac{5}{6}$ los multiplicaremos por 2, cociente de $12\div6$, y se transforma en $\frac{10}{12}$. Así, los quebrados

$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6}$ se han transformado en $\frac{6}{12},\ \frac{8}{12},\ \frac{9}{12},\ \frac{10}{12}$

Demostración.—Los quebrados no han mudado de valor, porque el numerador y el denominador de cada quebrado, se han multiplicado por el mismo número (144), y resultan con el mismo denominador, porque cada denominador se ha multiplicado por el número escogido convenientemente para que se obtenga como producto el menor múltiplo común.

Para encontrar el menor múltiplo común á todos los denominadores, se aplica la regla dada (104). Esto es: *se comienza por excluír los denominadores que son factores de otros: los que quedan, que son los de mayor valor numérico, se descomponen en los factores primos que los forman. y el menor múltiplo común, es igual al producto de todos los diferentes factores primos de que están compuestos los denominadores, afectado cada uno del mayor de los exponentes.*

Así, en el ejemplo anterior, siendo 4 múltiplo de 2, y 6 de 3, se excluyen los denominadores 2 y 3, porque el múltiplo de 4 y de 6 también lo será de 2 y de 3. En seguida, descomponemos 4 y 6 en sus factores primos: $4=2^2$ y $6=2\times3$; y el menor múltiplo común será $2^2\times3=12$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Los usos de la reducción de los quebrados á un común denominador, son dos: 1º determinar entre varios quebrados, cuál tiene mayor ó menor valor (141); 2º, prepararlos para la adición y substracción. Es ventajoso reducir los quebrados á un común denominador por medio del menor múltiplo común; porque desde luego resultan simplificados, lo cual facilita la ejecución de las operaciones.

149.—Segundo modo de considerar los quebrados.—Teorema.—*El valor de un quebrado es igual al cociente que resulta de dividir su numerador por su denominador.*

Demostración.—Comenzaremos demostrando, que *el producto de un quebrado por un número igual á su denominador, es el numerador del quebrado.*

Hemos visto que para multiplicar un quebrado por un entero se multiplica su numerador (143). Por tanto

$$\frac{3}{8}\times 8=\frac{3\times 8}{8}$$

como dividiendo por 8 los dos términos del quebrado $\frac{3\times 8}{8}$ su valor no se altera (144), tendremos:

$$\frac{3\times 8}{8}=\frac{3}{1}=3$$

luego $$\frac{3}{8}\times 8=3$$

que es lo que se debía demostrar.

Ahora bien, como si el producto 3 de dos factores se divide por uno de ellos, 8, el cociente será el otro factor $\frac{3}{8}$: se infiere que $3\div 8=\frac{3}{8}$, esto es, que todo quebrado es igual al cociente que resulta de dividir su numerador por su denominador.

Este principio sirve de fundamento, 1º para extraer los enteros que contiene un quebrado impropio dividiendo el numerador por el denominador (140); 2º, para expresar el valor del cociente de una división de enteros cuando hay resta; y 3º, para valuar los quebrados.

150.—Determinación del cociente de una división de enteros cuando hay resta.—Se ha visto que cuando queda resta en la división de enteros, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más la resta. Por ejemplo, si dividimos 29 entre 6, obtendremos 4 por cociente y 5 por resta, esto es:

$$29=(6\times 4)+5$$

podemos, pues, considerar al dividendo 29 compuesto de dos partes, (6×4) y 5, y el cociente de 29 dividido por 6, será igual á la suma de los cocientes de las partes que lo forman divididas por 6, pero como el cociente de $6\times 4\div 6$ es 4, y el de $5\div 6=\frac{5}{6}$ (149), resulta que

$$29\div 6=4+\tfrac{5}{6}$$

Luego en toda división de enteros en que hay resta, el cociente es un número mixto compuesto del cociente hallado como parte entera, más un quebrado que tiene la resta por numerador y el divisor por denominador. Se ve que la división de enteros conduce á la formación de los números quebrados, y que un quebrado es el cociente que resulta de dividir un número entero por otro mayor que él.

151.—Valuación de los quebrados.—Definición.—*Valuar un quebrado es determinar su valor en la especie de subdivisiones de la unidad á que pertenece ó convertirlo en número denominado.*

Asi, sabiendo que el peso se divide en 8 reales y el real en 8 tlacos, valuar el quebrado $\frac{5}{32}$ de peso, es averiguar á cuántos reales y tlacos equivale el quebrado $\frac{5}{32}$ de peso.

Regla.—*Para valuar un quebrado, se multiplica su numerador por el número de subdivisiones de la unidad á que se refiere el quebrado, y el producto se divide por el denominador.*

Cuando en la división queda resta se aplica esta regla al quebrado formado por la resta y el divisor, valuándolo en la siguiente subdivisión.

Ejemplo.—Supongamos que se quiere valuar $\frac{5}{32}$ de peso. Se multiplicará el numerador 15 por 8, número de reales que tenia un peso, y el producto 120 se divide por 32, obteniéndose el cociente 3 reales y la resta 24; en seguida el quebrado $\frac{24}{32}$ de real, lo valuamos en tlacos multiplicando su numerador por 8, número de tlacos que tenia un real, y el producto 192 lo dividimos por 32, obteniendo el cociente 6 tlacos.

15	32
8	3 rs. 6 tlacos
120	
24	
8	
192	
00	

$$\overset{s}{\tfrac{5}{32}}=3 \text{ rs. } 6 \text{ tls.}$$

Demostración.—La regla consta de dos partes: 1ª, se multiplica el numerador por el número de subdivisiones de la unidad á que se refiere el quebrado, con el objeto de reducirlo á unidades de especie menor, lo cual es un uso de la multiplicación, bastando multiplicar el numerador para multiplicar el quebrado (143). Asi, pues,

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\frac{15^{\$}}{32} = \frac{15\times 8^{rs.}}{32} = \frac{120^{rs.}}{32}$$

2ª, se divide el producto por el denominador, porque para extraerle los enteros á un quebrado impropio, se debe dividir el numerador por el denominador [104]. Esto es:

$$\frac{120}{32} = 3\text{ rs.} + \frac{24}{32}$$

Se ve, pues, que la valuación de los quebrados es una operación compuesta de su reducción á especie menor, y de la extracción de enteros de los quebrados impropios.

ADICION DE LAS FRACCIONES.

152. - Casos de la adición de las fracciones.—Se presentan en esta operación tres casos: 1°, *sumar un quebrado con un entero*: 2°, *sumar quebrados con quebrados*: y 3°, *sumar números mixtos.*

En los dos últimos casos puede suceder que los quebrados tengan iguales ó diferentes denominadores.

153.—Regla para sumar las fracciones.—1.er caso.—*Para sumar un quebrado con un entero, se multiplica el entero por el denominador del quebrado; se le agrega al producto el numerador y se pone al resultado por denominador el del quebrado.*

Ejemplo.—Sea por sumar $\frac{3}{4}+7$ multiplicaremos 7 por 4=28, agregamos 3, y al resultado 31 le ponemos 4 por denominador, obteniéndose

$$\frac{3}{4}+7=\frac{31}{4}$$

Como el orden de los sumandos no altera el valor de la suma la misma regla se practicará para sumar $7+\frac{3}{4}$.

Demostración.—El fundamento de esta operación [139], es que cuando se multiplica el entero por el denominador, se reducen unidades de especie mayor á menor; cuando se agrega el numerador, se suman partes de la unidad de igual valor, y cuando al resultado se le pone por

denominador el del quebrado: se indica el valor de las partes del quebrado.

2º caso.—*Para sumar quebrados con quebrados, cuando los denominadores son iguales, se suman los numeradores, y á la suma se le pone por denominador, el denominador común. Cuando los quebrados tienen denominadores desiguales, se reducen préviamente á un común denominador; en seguida se suman los numeradores, y á la suma se le da por denominador el denominador común. Cuando el resultado es un quebrado impropio se le extraen los enteros.*

Ejemplo.—Sean por sumar $\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{5}{6}$. Se reducen los quebrados á un común denominador por la regla dada [148]:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{5}{6}=\frac{144}{192}+\frac{168}{192}+\frac{160}{192}=\frac{472}{192}=2+\frac{88}{192}=2+\frac{11}{24}$$

se suman los numeradores 144, 168 y 160, y poniendo á la suma el denominador común, se obtiene el quebrado impropio $\frac{472}{192}$ al cual se le extraen los enteros dividiendo el numerador por el denominador, siendo el cociente $2+\frac{88}{192}$: abreviando el quebrado, cuyos términos son divisibles por 8, se tiene por resultado $2+\frac{11}{24}$.

La misma operación determinando el menor múltiplo de los denominadores, es como sigue:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{5}{6}=\frac{18}{24}+\frac{21}{24}+\frac{20}{24}=\frac{59}{24}=2+\frac{11}{24}$$

El menor múltiplo de 4, 6 y 8, es 24, este número dividido por el primer denominador 4, da como cociente 6, y por este número se multiplican los dos términos del primer quebrado: en seguida, dividiendo 24 entre 8, se obtiene 3, y por este número se multiplican los dos términos del quebrado $\frac{7}{8}$: por último, como 24÷6=4, multiplicaremos los dos términos del tercer quebrado $\frac{5}{6}$ por 4. Reducidos los quebrados á un común denominador, se suman los numeradores y se obtiene el quebrado $\frac{59}{24}$ que es impropio=$2+\frac{11}{24}$.

Demostración.—Se reducen los quebrados á un común denominador cuando no lo tienen, porque para que las partes de la unidad puedan sumarse, es necesario que sean de la misma magnitud, lo cual se consigue, sin alterar su valor, haciendo que los quebrados tengan el mismo denominador. Se suman los numeradores, porque son los términos que expresan las partes de la unidad de que se compone cada quebrado: y á la suma de éstos, se le pone el denominador común para expresar el valor de las partes de la unidad que se han sumado. La extracción de los enteros cuando la suma es un quebrado impropio, está fundada en que es un uso de la división reducir unidades de especie menor á mayor.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

3.er caso.—*Cuando hay que sumar números mixtos, la operación puede hacerse de dos maneras: incorporando los enteros á los quebrados y sumando en seguida los quebrados impropios: ó sumando primero los quebrados y en seguida los enteros, teniendo cuidado de agregar á éstos las unidades que resulten de la adición de los quebrados.*

La suma es igual á la de los enteros, más el quebrado que haya resultado.

Ejemplo.—Sea por sumar $3+\frac{7}{8}+4+\frac{4}{6}+8+\frac{2}{3}$. Empleando el primer método, la operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$3+\tfrac{7}{8}+4+\tfrac{4}{6}+8+\tfrac{2}{3}=\tfrac{31}{8}+\tfrac{28}{6}+\tfrac{26}{3}=\tfrac{93}{24}+\tfrac{112}{24}+\tfrac{208}{24}=\tfrac{413}{24}=17+\tfrac{5}{24}$$

Empleando el segundo método, la operación se dispone y ejecuta como sigue:

$3+\frac{7}{8}=3+\frac{21}{24}$
$4+\frac{4}{6}=4+\frac{16}{24}$
$8+\frac{2}{3}=8+\frac{16}{24}$
$17+\frac{5}{24}$ $\quad\frac{53}{24}$

Después de puestos los números mixtos unos debajo de los otros, se reducen á un común denominador los quebrados, se suman éstos, y se obtiene el quebrado impropio $\frac{53}{24}=2+\frac{5}{24}$, por lo que se suma 2 con los enteros 3, 4 y 8, obteniéndose el resultado $17+\frac{5}{24}$.

Demostración.—En el primer método, los quebrados impropios tienen el mismo valor que los números mixtos que se quieren sumar, y como si con cantidades iguales se ejecuta la misma operación, los resultados serán iguales, se infiere que la suma de los quebrados impropios es igual á la de los números mixtos.

Practicando la regla del segundo método hemos reunido en la suma los quebrados y los enteros que son las partes de los números mixtos, luego habremos reunido en la suma los números mixtos.

154.—La suma de los quebrados es mayor que uno y que varios sumandos, supuesto que expresa el valor de todos los sumandos juntos.

SUBSTRACCION DE LAS FRACCIONES.

155.—Casos de la substracción de las fracciones.—Se presentan en esta operación tres casos: 1°, *restar un quebrado de un entero*: 2° *restar un quebrado de otro*, y 3°, *restar números mixtos.*

En los dos últimos casos puede suceder que los quebrados tengan ó no iguales denominadores.

156.—Regla para restar las fracciones.—Primer caso.—*Para restar un quebrado de un entero, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, se resta el numerador, y á la diferencia se le pone por denominador el del quebrado.*

Ejemplo.—Sea por restar $\frac{7}{8}$ de 5.

$$5-\tfrac{7}{8}=\tfrac{33}{8}=4+\tfrac{1}{8}.$$

multiplicaremos 5 por 8, 40; menos 7, 33, á cuyo resultado le ponemos 8 por denominador. Al quebrado $\frac{33}{8}$ se le sacan los enteros dividiendo el numerador por el denominador, y se obtiene por resultado $4+\frac{1}{8}$.

Demostración.—Cuando se multiplica el entero por el denominador del quebrado se reducen unidades de especie mayor á menor: cuando se resta el numerador, se encuentra la diferencia entre las partes de la unidad de que consta el quebrado y las que contiene el entero, y al resultado se le da por denominador el del quebrado para expresar el valor de las partes de la unidad de la diferencia hallada.

Segundo caso.—*Para restar un quebrado de otro, cuando los denominadores son iguales, se restan los numeradores y á la resta se le pone por denominador el de los quebrados: cuando éstos tienen denominadores desiguales, se reducen préviamente á un común denominador* (148), *en seguida se restan los numeradores y á la resta se le pone por denominador el común.*

Sea por restar de $\frac{3}{5}$ el quebrado $\frac{3}{4}$. La operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$\tfrac{3}{5}-\tfrac{3}{4}=\tfrac{12}{20}-\tfrac{15}{20}=\tfrac{7}{20}$$

Demostración.—Se reducen los quebrados á un común denominador, cuando no lo tienen, porque esta operación no altera su valor, y porque es necesario, que las partes de la unidad que representan los quebrados, sean homogéneas para que se puedan restar. Se restan los numeradores porque ellos expresan las partes de la unidad de que consta cada quebrado, y á la resta se le pone el denominador común para indicar el valor de las partes de la unidad de la diferencia encontrada.

Tercer caso.—*Cuando hay que restar números mixtos, la operación puede ejecutarse de dos maneras: reduciendo los enteros á la forma de quebrados que los acompañan, y restando los quebrados impropios que resultan conforme á la regla del segundo caso; ó restando primero los quebrados por su regla y en seguida los enteros.*

Cuando la operación se ejecuta por el último método y sucede que el quebrado del substraendo es mayor que el del minuendo, se le agrega al

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

quebrado del minuendo, después de haberlo reducido á un común denominador, una unidad transformada en quebrado, esto es, se agrega al numerador el denominador; de esta suma se resta el numerador del quebrado del substraendo, y se pone á la diferencia el denominador común, teniendo cuidado al continuar la operación de agregar á la memoria una unidad á la parte entera del substraendo, á fin de no alterar el valor de la resta.

Ejemplo.—Sea por restar $7+\frac{8}{9}$ de $12+\frac{2}{3}$

Empleando el primer método, la operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$(12+\tfrac{2}{3})-(7+\tfrac{8}{9})=\tfrac{38}{3}-\tfrac{71}{9}=\tfrac{114}{9}-\tfrac{71}{9}=\tfrac{43}{9}=4+\tfrac{7}{9}$$

Se reducen los enteros á la forma de quebrados, y la operación se transforma en restar de $\frac{38}{3}$, $\frac{71}{9}$. Para reducir estos quebrados á un común denominador, siendo 9 múltiplo de 3, multiplicaremos los dos términos del primero por 3, y reducidos ambos á novenos, se restan los numeradores y se obtiene por diferencia $\frac{43}{9}=4+\frac{7}{9}$ como resultado final.

Empleando el segundo método, la operación se dispone y ejecuta como sigue:

$12+\frac{2}{3}\ldots\frac{6}{9}\ldots\frac{15}{9}$
$7+\frac{8}{9}\ldots\frac{8}{9}\ldots\frac{8}{9}$
$4+\frac{7}{9}\qquad\frac{7}{9}$

Después de puestos los números fraccionarios uno debajo de otro, se reducen los quebrados á un común denominador multiplicando los dos términos de $\frac{2}{3}$ por 3. Como resulta que $\frac{8}{9}$ quebrado del minuendo, es menor que $\frac{8}{9}$, se agrega al primero una unidad reducida á novenos, $\frac{9}{9}$: lo cual se consigue agregando el denominador al numerador, lo que da $\frac{15}{9}$. Restando de este número $\frac{8}{9}$, se obtiene $\frac{7}{9}$ que se pone debajo del substraendo; y supuesto que al quebrado del minuendo le agregamos una unidad; para no alterar el valor de la diferencia (50), agregaremos una unidad á la parte entera del substraendo, y diremos: 7 y 1, 8, de 8 á 12, la diferencia es 4; obteniéndose $4+\frac{7}{9}$ como resultado final.

Demostración.—Adoptando el primer método; los quebrados impropios tienen el mismo valor que los números mixtos que se quieren restar, y como si con cantidades iguales, se ejecuta la misma operación, los resultados serán iguales, se infiere que la resta de los quebrados impropios es igual á la de los números mixtos.

Empleando el segundo método, la diferencia encontrada es la suma de las diferencias de las partes del minuendo y del substraendo; luego esta será la diferencia buscada. Cuando se agrega una unidad reducida á quebrado, al quebrado del minuendo, para poder restar el del substraendo, no se altera el valor del resultado, porque agregándose una

unidad á la parte entera del substraendo [50], hay perfecta compensación.

157.—Observaremos que en las fracciones, lo mismo que en los enteros, el resultado de la substracción es menor que el minuendo; pero podrá ser mayor, igual ó menor que el substraendo, supuesto que expresa lo que le falta á este término para ser igual al minuendo.

MULTIPLICACION DE LAS FRACCIONES.

158.—Casos de la multiplicación de las fracciones.—En esta operación se presentan tres casos: 1° *Multiplicar un quebrado por un entero.* 2° *Multiplicar un quebrado por otro quebrado.* 3° *Multiplicar números mixtos.*

159.—Reglas para multiplicar las fracciones.—Primer caso.—*Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador por el entero, y al producto se le da por denominador el del quebrado. Cuando hay que multiplicar un entero por un quebrado, se seguirá la misma regla,* supuesto que el orden de los factores no altera el valor del producto.

Ejemplo:

$$\tfrac{3}{4}\times 7=\tfrac{21}{4}=5+\tfrac{1}{4}\qquad 9\times\tfrac{4}{5}=\tfrac{36}{5}=7+\tfrac{1}{5}$$

El fundamento de esta regla lo hemos dado en el número 142, primer principio, y se comprende que expresando el numerador las partes de la unidad de que consta el quebrado, mientras mayor se haga el numerador, mayor será el valor del quebrado.

Segundo caso.—*Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador.*

Ejemplo:

$$\tfrac{4}{5}\times\tfrac{3}{7}=\tfrac{12}{35}$$

Demostración.—Nos valdremos de este ejemplo para explicar el fundamento de la regla, pero los raciocinios que hagamos podrán aplicarse á cualquier caso. Si quisiéramos multiplicar $\frac{4}{5}$ por 3, sería necesario multiplicar el numerador por 3 y poner al producto por denominador 5, esto es:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\frac{4}{5}\times 3=\frac{4\times 3}{5}$$

pero no se quiere multiplicar $\frac{4}{5}$ por 3,

sino $\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}$

siendo el multiplicador verdadero siete veces menor que 3, supuesto que un séptimo es 7 veces menor que la unidad, para obtener el producto verdadero será necesario hacer 7 veces menor el resultado $\frac{4\times 3}{5}$; y como un quebrado se hace menor tantas veces como unidades tiene el número por el cual se multiplica su denominador (142, 2º principio), el producto verdadero será $\frac{4\times 3}{5\times 7}$, esto es:

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{4\times 3}{5\times 7}$$

El modo de formación de este producto hace ver que para multiplicar los quebrados, se deben multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador.

Debe observarse que la multiplicación de un quebrado por otro, es una operación compuesta de dos: 1ª, multiplicar un quebrado por un entero, el quebrado del multiplicando por el numerador del multiplicador; 2ª, dividir un quebrado por un entero, el quebrado del producto anterior dividido por el denominador del multiplicador.

Tercer caso.—*Para multiplicar números mixtos por mixtos, la operación puede hacerse de dos modos:* 1º, *reduciendo los enteros á la forma de los quebrados que les acompañan, y multiplicando los quebrados impropios que resulten:* 2º, *haciendo la multiplicación por partes, multiplicando sucesivamente el entero y el quebrado del multiplicando, por el entero y por el quebrado del multiplicador.*

Ejemplo.—Sea por multiplicar $3+\frac{7}{8}$ por $6+\frac{2}{3}$.

Empleando el primer método, la operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$(3+\tfrac{7}{8})\times(6+\tfrac{2}{3})=\tfrac{31}{8}\times\tfrac{20}{3}=\tfrac{620}{24}=25+\tfrac{20}{24}=25+\tfrac{5}{6}$$

Demostración.—Los quebrados impropios que han resultado de la incorporación de los quebrados con los enteros que los acompañan, tienen el mismo valor que los números mixtos que se quieren multiplicar, y como si con cantidades iguales se ejecuta la misma operación, los resultados serán iguales, se infiere que el producto obtenido de los quebrados impropios es igual al producto de los números mixtos.

Empleando el segundo método, la operación se dispone y ejecuta como sigue:

$$\begin{array}{rl} & 3+\frac{7}{8} \\ & 6+\frac{2}{3} \\ \hline 6\times 3 = & 18 \\ 6\times\frac{7}{8}=\frac{42}{8}= & 5+\frac{2}{8}\quad\frac{6}{24} \\ \frac{2}{3}\times 3=\frac{6}{3}= & 2 \\ \frac{2}{3}\times\frac{7}{8}=\frac{14}{24}= & 0+\frac{14}{24}\quad\frac{14}{24} \\ \hline & 25+\frac{5}{6}\quad\frac{20}{24} \end{array}$$

Se multiplican por la parte entera 6 del multiplicador, primero el entero y en seguida el quebrado $\frac{7}{8}$ del multiplicando; después se multiplican por el quebrado $\frac{2}{3}$ del multiplicador el entero y el quebrado del multiplicando. Por último, se suman los productos parciales y se obtiene el producto total $25+\frac{5}{6}$. Para sumar los quebrados $\frac{2}{8}$ y $\frac{14}{24}$ se han reducido á la derecha á un común denominador, y se ha abreviado su suma $\frac{20}{24}$.

Demostración.—Cuando con todas las partes que constituyen una cantidad se ejecuta una operación, el resultado es el mismo que si se ejecutara la operación con toda la cantidad; practicando la regla se han multiplicado los enteros y los quebrados del multiplicando por los enteros y por los quebrados del multiplicador, luego se habrá obtenido el producto de los números mixtos.

160.—Teorema.—*El producto de la multiplicación de dos quebrados propios, es menor que cualquiera de los dos factores.* Sabemos que cuando el multiplicador es la unidad, el producto es igual al multiplicando (64); y que cuando disminuye uno de los factores, el producto disminuye igualmente (62): luego cuando el multiplicador es quebrado, esto es, cuando tiene un valor menor que la unidad, el producto será menor que el multiplicando, y como puede invertirse el orden de los factores sin cambiar el valor del producto, éste será también menor que el multiplicador.

Esto comprueba que el producto de dos cantidades no siempre es mayor que alguno de los factores, pues la palabra multiplicar, que en el lenguaje común envuelve la idea de aumento, en matemáticas se aplica á la operación que tiene por objeto *producir una cantidad que tenga con un factor la misma relación que tiene el otro factor con la unidad.*

Cuando se *multiplica un entero por un quebrado cuyo numerador es la unidad*, en la práctica la operación se simplifica dividiendo el entero

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

por el denominador del quebrado. Si queremos, por ejemplo, obtener el producto de

$$648 \times \tfrac{1}{4} = 162$$

bastará sacarle cuarta parte al entero 648. La razón de esto es, que el producto del entero por el numerador del quebrado en este caso es la misma cantidad, y que para sacar los enteros al quebrado que resulta hay que dividir esta cantidad por el denominador del quebrado.

DIVISION DE LAS FRACCIONES.

161.—Casos de la división de las fracciones.—Pueden presentarse en la práctica de esta operación, cuatro casos: 1.° *Dividir un quebrado por un entero.* 2.° *Dividir un entero por un quebrado.* 3.° *Dividir un quebrado por otro.* 4.° *Dividir números mixtos.*

162.—Reglas para dividir las fracciones.—Primer caso.—*Para dividir un quebrado por un entero, se multiplicará el denominador por el entero y se dejará al resultado por numerador el del quebrado.*

Ejemplo:

$$\tfrac{5}{6} \div 9 = \tfrac{5}{54}$$

El fundamento de esta regla es el dado en el número 142, 2° principio, y se comprende que, expresando el denominador el número de partes en que está dividida la unidad, cuando este número aumenta, menor es cada una de las partes, por lo cual, ejecutando la regla, se habrá dividido el valor del quebrado.

Segundo caso.—*Para dividir un entero por un quebrado, se considerarán invertidos los términos del quebrado divisor, y en seguida se multiplicará el entero por el quebrado invertido.*

Ejemplo:

$$7 \div \tfrac{4}{8} = \tfrac{56}{4} = 14.$$

Demostración.—Si se quisiera dividir el entero 7 por el numerador 4 del quebrado, supuesto que todo quebrado es igual al cociente del numerador dividido por el denominador (149), tendríamos que

$$7 \div 4 = \tfrac{7}{4}$$

pero como el divisor no es 4 sino $\frac{4}{8}$, número 8 veces menor, bastará hacer el resultado 8 veces mayor para obtener el cociente que se busca (77); y como un quebrado se hace tantas veces mayor como unidades tiene el número por el cual se multiplica su numerador (142—1er. principio); multiplicando el numerador de $\frac{7}{4}$ por 8, obtendremos el resultado verdadero $\frac{7 \times 8}{4}$; que como se ve se ha formado conforme á la regla dada.

$$7 \div \frac{4}{8} = \frac{7 \times 8}{4}$$

Tercer caso.—*Para dividir un quebrado por otro, se consideran invertidos los términos del quebrado divisor, y en seguida se multiplica el dividendo por el quebrado invertido.*

Ejemplo: $$\frac{5}{6} \div \frac{4}{8} = \frac{5}{6} \times \frac{8}{4} = \frac{5 \times 8}{6 \times 4} = \frac{40}{24} = 1 + \frac{2}{3}$$

Demostración.—Si quisiéramos dividir el quebrado $\frac{5}{6}$ por 4, numerador del divisor, encontraríamos el resultado multiplicando el denominador 6 por 4 (142, 2° principio), esto es:

$$\frac{5}{6} \div 4 = \frac{5}{6 \times 4}$$

pero como no se quiere dividir $\frac{5}{6}$ entre 4, sino

$$\frac{5}{6} \div \frac{4}{8}$$

siendo el divisor verdadero $\frac{4}{8}$, 8 veces menor que el divisor empleado, 4 unidades, y recordando (77) que cuando se divide el divisor por un número el cociente resulta multiplicado por el mismo número, se infiere que el cociente de $\frac{5}{6} \div \frac{4}{8}$ será 8 veces mayor que el cociente encontrado $\frac{5}{6 \times 4}$; por lo que multiplicando por 8 el numerador (142– 1er. principio) del quebrado $\frac{5}{6 \times 4}$, tendremos el cociente verdadero, esto es,

$$\frac{5}{6} \div \frac{4}{8} = \frac{5 \times 8}{6 \times 4}$$

luego para obtener el cociente de un quebrado por otro, debe multiplicarse el dividendo por el quebrado del divisor, invertidos sus términos.

Debe observarse que la division de un quebrado por otro, es una operación compuesta de dos: 1ª, dividir un quebrado por un entero, el dividendo por el numerador del divisor; y 2ª, multiplicar un quebrado

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

por un entero, el quebrado que resulta de la primera operación, multiplicado por el denominador del divisor.

Cuarto caso.—*Para dividir un número mixto por otro mixto, se reducirán los enteros á la forma de los quebrados que les acompañan, y en seguida se dividirán los quebrados impropios que resulten.* Ejemplo:

$$\left(8+\frac{3}{4}\right)\div\left(5+\frac{2}{7}\right)=\frac{35}{4}\div\frac{37}{7}=\frac{35\times 7}{4\times 37}=\frac{245}{148}=1+\frac{97}{148}$$

Demostración.—Como al reducir los enteros á la forma de quebrados no han cambiado de valor, el resultado de la división será el cociente verdadero, supuesto que si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, los resultados serán iguales.

163.—Teorema.—*Siempre que el divisor sea un quebrado propio, el cociente será mayor que el dividendo.* Sabemos que cuando el divisor es la unidad el cociente es el dividendo (81), y que cuando el divisor disminuye, el cociente aumenta: luego siempre que el divisor sea menor que la unidad el cociente será mayor que el dividendo.

* (164.)—Observaciones sobre el cálculo de las fracciones.—El valor de los quebrados depende del valor de sus dos términos, debiendo observarse que hay la misma relación entre el valor del numerador y el del denominador, que entre el del quebrado y el de la unidad.

Los quebrados pueden considerarse de dos modos: 1º, como un número de partes de determinada magnitud; y en este caso el numerador indica el número de las partes y el denominador la magnitud de ellas: 2º, como el cociente del numerador dividido por el denominador.

Son operaciones fundamentales del cálculo de los quebrados la multiplicación y la división de un quebrado por un entero. Efectuadas estas operaciones con el numerador, producen la multiplicación y la división del quebrado, y efectuadas con el denominador, producen el resultado de la operación recíproca.

Las operaciones auxiliares para el cálculo de las fracciones son: la reducción de enteros á quebrados, la de fraccionarios á números mixtos, la valuación de un quebrado, su simplificación y la reducción á un común denominador.

Respecto de las operaciones de los quebrados, debe observarse: que para efectuar la adición y substracción, es preciso que los quebrados estén reducidos á un común denominador, no siéndolo para la multiplicación y división; la adición y substracción se ejecutan sumando y restando sólo los numeradores; la multiplicación, multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador: y la división, invirtiendo los términos del quebrado divisor y multiplicándolos en seguida. En los números fraccionarios, la adición, substracción y multiplicación pueden hacerse incorporando los enteros con los quebrados, ó por partes. La división, por comodidad, solo se hace incorporando préviamente los enteros con los quebrados.

El resultado de la suma es mayor que uno y que varios sumandos: el de la resta, es menor que el minuendo: el de la multiplicación, es menor que el multiplicando cuando el multiplicador es quebrado propio, y menor que cualquiera factor cuando ambos lo son: el cociente de la división es mayor que el dividendo cuando el divisor es quebrado propio.

CALCULO DE LAS FRACCIONES DECIMALES.

SISTEMA DE NUMERACIÓN, PRINCIPIOS Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

165.—Base de las fracciones decimales.—Hemos visto que los valores menores que la unidad se expresan y representan por medio de los quebrados, y ahora haremos notar que en las fracciones comunes la unidad puede dividirse en cualquier número de partes: la hora, la arroba, el peso, lo mismo que toda unidad puede dividirse en 2, en 3, en 4, en 80, en 475 ó en cualquier número de partes, constando la fracción de un número dado de esas partes, siendo de rigor que el denominador esté expreso y que se escriba debajo del numerador.

En el capítulo siguiente veremos que en los números *denominados* la unidad se divide y se subdivide convencionalmente en un número fijo de partes, pero distinto en cada unidad y aún en las subdivisiones de la misma unidad. Por ejemplo, 6 varas, 2 pies, 4 pulgadas, es número *denominado* en el que los pies son fracciones de la vara, y las pulgadas, fracciones del pie; pero convencionalmente se ha fijado que la vara se divida en 3 pies y el pie en 12 pulgadas, y en lugar de escribir $\frac{2}{3}$ de vara y $\frac{4}{12}$ de pie, se escriben los denominados como números enteros, estando tácito el denominador de cada subdivisión.

Entre los quebrados y los denominados se notan las siguientes diferencias. Los quebrados pueden ser abstractos y los denominados siempre son concretos. En los quebrados el denominador puede ser cualquier número, está expreso y se aplica á toda clase de unidades; mientras que en los denominados para cada especie de unidades el denominador es constante y siempre está sobrentendido.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

por un entero, el quebrado que resulta de la primera operación, multiplicado por el denominador del divisor.

Cuarto caso.—*Para dividir un número mixto por otro mixto, se reducirán los enteros á la forma de los quebrados que les acompañan, y en seguida se dividirán los quebrados impropios que resulten.* Ejemplo:

$$\left(8+\frac{3}{4}\right)\div\left(5+\frac{2}{7}\right)=\frac{35}{4}\div\frac{37}{7}=\frac{35\times 7}{4\times 37}=\frac{245}{148}=1+\frac{97}{148}$$

Demostración.—Como al reducir los enteros á la forma de quebrados no han cambiado de valor, el resultado de la división será el cociente verdadero, supuesto que si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, los resultados serán iguales.

163.—Teorema.—*Siempre que el divisor sea un quebrado propio, el cociente será mayor que el dividendo.* Sabemos que cuando el divisor es la unidad el cociente es el dividendo (81), y que cuando el divisor disminuye, el cociente aumenta: luego siempre que el divisor sea menor que la unidad el cociente será mayor que el dividendo.

* (164.)—Observaciones sobre el cálculo de las fracciones.—El valor de los quebrados depende del valor de sus dos términos, debiendo observarse que hay la misma relación entre el valor del numerador y el del denominador, que entre el del quebrado y el de la unidad.

Los quebrados pueden considerarse de dos modos: 1º, como un número de partes de determinada magnitud; y en este caso el numerador indica el número de las partes y el denominador la magnitud de ellas: 2º, como el cociente del numerador dividido por el denominador.

Son operaciones fundamentales del cálculo de los quebrados la multiplicación y la división de un quebrado por un entero. Efectuadas estas operaciones con el numerador, producen la multiplicación y la división del quebrado, y efectuadas con el denominador, producen el resultado de la operación recíproca.

Las operaciones auxiliares para el cálculo de las fracciones son: la reducción de enteros á quebrados, la de fraccionarios á números mixtos, la valuación de un quebrado, su simplificación y la reducción á un común denominador.

Respecto de las operaciones de los quebrados, debe observarse: que para efectuar la adición y substracción, es preciso que los quebrados estén reducidos á un común denominador, no siéndolo para la multiplicación y división; la adición y substracción se ejecutan sumando y restando sólo los numeradores; la multiplicación, multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador: y la división, invirtiendo los términos del quebrado divisor y multiplicándolos en seguida. En los números fraccionarios, la adición, substracción y multiplicación pueden hacerse incorporando los enteros con los quebrados, ó por partes. La división, por comodidad, solo se hace incorporando préviamente los enteros con los quebrados.

El resultado de la suma es mayor que uno y que varios sumandos: el de la resta, es menor que el minuendo: el de la multiplicación, es menor que el multiplicando cuando el multiplicador es quebrado propio, y menor que cualquiera factor cuando ambos lo son: el cociente de la división es mayor que el dividendo cuando el divisor es quebrado propio.

CALCULO DE LAS FRACCIONES DECIMALES.

SISTEMA DE NUMERACIÓN, PRINCIPIOS Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

165.—Base de las fracciones decimales.—Hemos visto que los valores menores que la unidad se expresan y representan por medio de los quebrados, y ahora haremos notar que en las fracciones comunes la unidad puede dividirse en cualquier número de partes: la hora, la arroba, el peso, lo mismo que toda unidad puede dividirse en 2, en 3, en 4, en 80, en 475 ó en cualquier número de partes, constando la fracción de un número dado de esas partes, siendo de rigor que el denominador esté expreso y que se escriba debajo del numerador.

En el capítulo siguiente veremos que en los números *denominados* la unidad se divide y se subdivide convencionalmente en un número fijo de partes, pero distinto en cada unidad y aún en las subdivisiones de la misma unidad. Por ejemplo, 6 varas, 2 pies, 4 pulgadas, es número *denominado* en el que los pies son fracciones de la vara, y las pulgadas, fracciones del pie; pero convencionalmente se ha fijado que la vara se divida en 3 pies y el pie en 12 pulgadas, y en lugar de escribir $\frac{2}{3}$ de vara y $\frac{4}{12}$ de pie, se escriben los denominados como números enteros, estando tácito el denominador de cada subdivisión.

Entre los quebrados y los denominados se notan las siguientes diferencias. Los quebrados pueden ser abstractos y los denominados siempre son concretos. En los quebrados el denominador puede ser cualquier número, está expreso y se aplica á toda clase de unidades; mientras que en los denominados para cada especie de unidades el denominador es constante y siempre está sobrentendido.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ahora bien, para expresar y representar las cantidades menores que la unidad y los números mixtos, y con el objeto de facilitar la ejecución de las operaciones, se han hecho diversas convenciones en armonía con las del sistema de numeración de los enteros, que constituyen el sistema de las *fracciones decimales*, en las que la unidad se divide forzosa y sucesivamente en 10, en 100, en 1000, etc., partes, esto es, el denominador es una potencia de 10, está sobrentendido y se aplica este sistema á toda clase de unidades. Por ejemplo, en lugar de ½ hora se toma su igual $\frac{5}{10}$ que se escribe 0'5 de hora y se lee 5 décimos de hora; en lugar de ¼$ se toma $\frac{25}{100}$ que se escribe 0'25$ y se lee 25 centésimos de peso.

Del mismo modo que una centena se divide en 10 decenas, y una decena se divide en 10 unidades, en el sistema decimal, para expresar las partes de la unidad, ésta se considera dividida en 10 partes que se llaman *décimas;* cada *décima* se considera subdividida en 10 partes que se llaman *centésimas*, porque la unidad resulta compuesta de 100 centésimas: cada *centésima*, se subdivide en 10 partes llamadas *milésimas*, porque la unidad resulta compuesta de 1000 milésimas, y continuando la subdivisión sucesivamente de 10 en 10, se obtienen las diezmilésimas; las cienmilésimas, las millonésimas, las diezmillonésimas, etc. Por esto se vé que la nomenclatura de las fracciones decimales se deriva de la de los enteros, y como la de éstos, tiene la doble ventaja de exigir el empleo de pocas palabras y de dar idea estas palabras del valor de las subdivisiones.

Así como en la numeración escrita de los enteros, las decenas puestas á la derecha de las centenas representan un orden de unidades 10 veces menor que las centenas; y así como las unidades escritas á la derecha de las decenas son 10 veces menores que éstas, del mismo modo se ha convenido en escribir las *décimas*, después de una coma, á la derecha de las unidades, las *centésimas* á la derecha de las *décimas*, las *milésimas* á la derecha de las *centésimas*, y así sucesivamente, dando á las cifras en las decimales lo mismo que en los enteros, un valor relativo establecido bajo la base de que un guarismo cualquiera representa partes de la unidad 10 veces menores que las que indica la cifra que está á su izquierda.

166.—Definición.—*Se llama decimal á todo quebrado cuyo denominador es tácito é igual á la unidad seguida de tantos ceros como subdivisiones tenga la cantidad.*

167.—Sistema de numeración.—Este, como se ha indicado, tiene en las decimales exactamente la misma base que en los enteros, siendo indispensable distinguir la parte entera en una cantidad de la parte fraccionaria. Para esto se coloca entre los enteros y las decimales una

coma, y cuando no hay enteros se representan por un cero, poniendo en seguida la coma, y por último, las decimales. Para evitar las confusiones á que da lugar el empleo de la coma puesta en la parte de abajo con el signo ortográfico y con la que se usa para dividir los periodos de los millares, es preferible colocar la coma invertida en la parte superior para distinguir los enteros de las decimales, ó poner un punto; pero siempre en la parte alta de los números. Por ejemplo, 5 décimas se escribe: 0'5 y se lee 0 unidades 5 décimas.

4 unidades 25 centésimas, se escribe: 4'25

Además, es preciso en la parte decimal reemplazar con ceros los órdenes de fracciones de unidad de que carece á veces entre las partes decimales, y otras entre los enteros y las decimales. En el primer caso, las decimales se escriben como los enteros, por ejemplo, trecientos cinco milésimas se escribe 0'305 milésimas; 48 enteros 320006 millonésimas, se escribe 48'320006. En el segundo caso se ponen después de la coma y antes de los guarismos que representan la cantidad decimal, tantos ceros como son necesarios para darle á la decimal el valor que le corresponde, lo cual depende del denominador sobrentendido; por ejemplo, si se quiere escribir 0 enteros, 145 diezmilésimas, por el orden de la subdivisión de la decimal, se infiere que el denominador ha de ser 10000, y como 145 se escribe con tres guarismos y 10000 tiene cuatro ceros, se ve que será necesario poner un cero después de la coma y antes de 145, así: 0'0145, lo que es igual á $\frac{145}{10000}$, verdadero valor de la decimal que se quería representar.

Para escribir con facilidad la parte decimal, los alumnos deben fijarse en que

para representar	*décimas*	debe haber después de la coma	1	cifra.
„	„	*centésimas*	„	„	„	„	2	cifras.
„	„	*milésimas*	„	„	„	„	3	„
„	„	*diezmilésimas*	„	„	„	„	4	„
„	„	*cienmilésimas*	„	„	„	„	5	„
„	„	*millonésimas*	„	„	„	„	6	„
„	„	*diezmillonésimas*	„	„	„	„	7	„

etc. De lo expuesto se deduce la siguiente

Regla para escribir las cantidades decimales.—*Se escribirá primero la parte entera, representándola por un cero cuando no la haya; en seguida se pone la coma; y antes de escribir la parte decimal, se examina con cuántos guarismos debe escribirse como entero y de cuántos ceros debe estar seguida la unidad en el denominador tácito; después de la coma se ponen los ceros que sea necesario para que la parte decimal conste de tantos guaris-*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

mos como ceros deban seguir á la unidad en el denominador, y por último, se escribe la parte decimal como si fuera entero.

Por ejemplo:

0 unidades 44 diezmilésimas, se escribe.....	0'0044
28 unidades 2 millonésimas, se escribe.....	28'000002
3 unidades 3304 diezmillonésimas, se escribe.....	3'0003304

Regla para leer las cantidades decimales.—*Se lee primero la parte entera diciendo unidades, ó la especie de éstas al llegar á la coma, y en seguida se lee la parte decimal como si fuera entero, teniendo cuidado de nombrar al fin el orden de la última subdivisión.*

Por ejemplo:

0'305	se lee....	0 unidades 305 milésimas.
$ 28'0030098	„	28 ps. 30098 diezmillonésimas.
Quints. 4'032044	„	4 quintales 32044 millonésimas.

La última cantidad, por ejemplo, se compone de 4 quintales más 3 centésimas, más 2 milésimas, más 4 cienmilésimas, más 4 millonésimas, y es igual á 4 quintales 32044 millonésimas de quintal.

168.—Principios fundamentales del cálculo de las decimales.—Siendo las decimales fracciones cuyo denominador sobrentendido es la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal, el valor de ésta dependerá, como en los quebrados, de la relación que exista entre el numerador y el denominador, y las variaciones que tenga alguno de estos términos en las decimales, dará el mismo resultado que en los quebrados.

1º—*Cuando en una decimal se corre la coma hacia la derecha, su valor se hace diez veces mayor por cada lugar que se cambia la coma, esto es, se multiplica la decimal por* 10, 100, 1000, *etc.* Sea la decimal 3'125, corriendo la coma dos lugares á la derecha, se transformará en 312'5 cantidad que será $10 \times 10 = 100$ veces mayor que la primera.

Demostración.—Cuando la coma se ha corrido dos lugares á la derecha, constando la parte decimal de dos cifras menos, el denominador tendrá también dos ceros menos, lo cual equivale á dividirlo por 100, y como el valor de un quebrado se hace tantas veces mayor como unidades tiene el número por el cual se divide su denominador, se infiere que la decimal se habrá hecho 100 veces mayor.

2º—*Cuando en una decimal se corre la coma hacia la izquierda, su valor se hace diez veces menor por cada lugar que se corre la coma, esto es, se divide la decimal por* 10, 100, 1000, etc.

Sea 3845'72, corriendo la coma hacia la izquierda, dos lugares, la cantidad se transforma en 38'4572, que será 100 veces menor que la primera.

Demostración.—La cantidad 38'4572 es 100 veces menor que 3845'72 porque $3845'72 = \frac{384572}{100}$ y $38'4572 = \frac{384572}{10000}$, y como un quebrado se hace tantas veces menor como unidades tiene el número por el que se multiplica su denominador, (142—2º) la segunda expresión 38'4572 será 100 veces menor que la primera 3845'72.

3º—*El valor de una decimal no se altera cuando se le agregan ó quitan ceros á la derecha.*

Por ejemplo: $0'375 = 0'375000$ y $0'04400 = 0'044$.

Demostración.—Cuando se agregan ceros á la derecha de una decimal, no se hace más que reducir unidades de especie mayor á menor, lo cual no cambia su valor. En el ejemplo propuesto hemos reducido milésimas á millonésimas, siendo lo mismo 375 milésimas que 375000 millonésimas, supuesto que 1 milésima es igual á 1000 millonésimas.

Cuando se quitan los ceros de la derecha, la operación equivale á reducir unidades de especie menor á mayor, y lo mismo es 4400 cienmilésimas que 44 milésimas.

Puede demostrarse este principio de otra manera. Cuando se agregan ceros, equivale á multiplicar los dos términos de un quebrado por un mismo número, y cuando se suprimen, equivale á dividirlos por un mismo número, operaciones que, como se sabe, no alteran el valor de un quebrado.

4º—*Cuando en una cantidad decimal que no contiene enteros, se ponen ceros entre la coma y la parte decimal, el valor de ésta disminuye; y cuando se suprimen ceros entre la coma y la parte decimal, su valor aumenta diez veces por cada cero suprimido.*

Por ejemplo: $0'32 \div 100 = 0'0032$ y $0'0005 \times 1000 = 0'5$.

Demostración.—Cuando se ponen, por ejemplo, dos ceros entre la coma y la parte decimal, el denominador tácito de ésta se multiplica por 100, luego el valor de la decimal se hará 100 veces menor.

Cuando se suprimen, por ejemplo, tres ceros entre la coma y la parte decimal, el denominador tácito de ésta se hace 1000 veces menor; y como cuando se divide el denominador, aumenta el valor del quebrado, el de la decimal, se habrá hecho mil veces mayor.

El primer principio sirve para multiplicar una decimal, y el segundo para dividirla por la unidad seguida de ceros: el tercero sirve para redu-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

cirlas á un común denominador ó para abreviarlas: el cuarto sirve para dividir ó multiplicar una decimal que *no contiene enteros* por la unidad seguida de ceros.

169.—Simplificación y reducción de las decimales á un común denominador.—*Cuando una decimal termina en ceros se puede simplificar suprimiendo éstos*, pues equivale á dividir los dos términos de un quebrado por un mismo número.

Para reducir las decimales á un común denominador, se hace que todas tengan igual número de cifras decimales, agregando tantos ceros á la derecha como sean necesarios á la que tenga menos.

La simplificación de las decimales facilita la ejecución de las operaciones y evita errores en los cálculos. La reducción á un común denominador es una operación preparatoria para la adición, la substracción y la división, y es útil para conocer entre varias cantidades decimales cuál es la mayor ó la menor.

Dependiendo el valor de una decimal de la relación que existe entre el valor de su numerador y el de su denominador, es claro que no pueden compararse las decimales fácilmente sino cuando tienen el mismo denominador, esto es, cuando expresan partes de la misma magnitud.

Por ejemplo, 0·5 y 0·375 no pueden compararse fácilmente sino cuando ambas cantidades expresan milésimas.

0·500 y 0·375,

resultando que 0·5 es mayor que 0·375.

170.—Reducción de los quebrados á decimales.—*Para reducir un quebrado á decimal, se divide el numerador por el denominador, agregando al numerador tantos ceros como cifras se quiera que tenga la decimal.*

Sea por reducir $\frac{7}{8}$ á decimal: la operación se ejecuta como sigue:

Dividiendo 7 entre 8 se obtiene 0 unidades. En seguida se agrega al numerador un cero y se obtiene en el cociente 8 décimas, y una resta 6, á la cual se le agrega un cero y se obtiene el cociente 7 centésimas y la resta 4, á la que se le agrega un cero para obtener el cociente exacto 5 milésimas.	70 60 40 0	8 0·875

$\frac{7}{8}$=0·875

Demostración.—La de esta regla es la misma que hemos dado para la valuación de un quebrado (151), pues lo que se ha hecho es valuarlo en décimas, centésimas, milésimas, etc.

La transformación de un quebrado en decimal, rara vez conduce á un resultado exacto, y por esto vamos á examinar: 1º, cómo podrá obtenerse el grado de aproximación que se necesite en los cálculos; 2º, en qué casos un quebrado podrá transformarse exactamente en decimal; y 3º, cuándo esta transformación no podrá efectuarse exactamente, y conduce á la formación de decimales llamadas *periódicas*.

171.—Aproximación de las decimales.—En todas las necesidades de la vida se observa que al estimar la medida ó el valor de las cosas, se establece un límite que viene á fijar el grado de la aproximación. Cuando se determina el valor de una cuenta de comercio, se lleva la aproximación hasta los centavos de peso, pero no á los milésimos; por ejemplo: la edad de una persona se valúa por lo regular sólo en años y casi nunca se lleva la aproximación hasta las horas, etc. Así, pues, cuando se haya obtenido un resultado expresado por la decimal 0·4736, se ve que este es mayor que 0·4 y menor que 0·5, y si por la naturaleza de la cuestión de que procedió este resultado, bastase llevar en cuenta sólo las décimas de la unidad, la decimal 0,4736 podría reemplazarse por los valores más sencillos, 0·4 ó 0·5, supuesto que cualquiera de ellos no difiere del verdadero 0·1. En casos semejantes al propuesto, debe examinarse el valor de la cifra siguiente á las décimas; y como aquí ésta es 7 centésimas, el resultado 0·4 es 0·07 menor que el verdadero, y 0·5 es 0·03 mayor; por lo que tomando este último, la aproximación será mayor. Cuando se quiere llevar la aproximación hasta las centésimas, los valores más sencillos que 0·4736 serán 0·47 ó 0·48, pero como las milésimas son 3 y no llegan á 5, deberá preferirse el valor 0·47, que se acerca más al verdadero.

En general, *cuando en una cantidad decimal se suprimen las últimas cifras, si la primera de las cifras suprimidas es 5 ó un guarismo mayor que 5, se debe agregar una unidad á la última cifra conservada; permaneciendo ésta sin variación cuando la suprimida que le sigue no llega á 5.*

Cuando se quiere convertir un quebrado en decimal con determinado grado de aproximación, se divide el numerador por el denominador, y se va agregando un cero á cada resta hasta obtener en el cociente una decimal del orden á que se quiere llevar la aproximación.

Por ejemplo: se quiere convertir en decimal el quebrado $\frac{35}{64}$ aproximando el resultado hasta las milésimas.

Dividiremos 35 por 64, agregando sucesivamente un cero, hasta llegar á obtener el valor 0·546 que no diferirá un milésimo del verdadero. Siempre es conveniente llevar la aproximación á la cifra siguiente para saber si se deja el guarismo de las milésimas tal como salió, ó si se le aumenta una unidad. Siendo en el caso	350 300 440 56	64 0·546

actual las diezmilésimas 8, resulta que llevando la aproximación hasta las milésimas, el quebrado:

$$\frac{35}{64}=0'547$$

Como el valor verdadero del quebrado $\frac{35}{64}$ es 0,546875 se ve que está comprendido entre 0'546 y 0'547, luego tomando 0'547 se satisfará la condición de no separarse un milésimo del valor verdadero.

El límite á que se lleva la aproximación depende de la naturaleza de la cuestión, y de la magnitud de la unidad: pero es raro que en los usos comunes la aproximación por decimales se lleve á más de 7 cifras.

Cuando se trata, por ejemplo, de apreciar el precio de una substancia de poco valor, como la paja, la aproximación puede ser mucho menor que cuando se pesa oro. Tratándose de la misma substancia, la aproximación debe extenderse á medida que la unidad escogida para valuarla es mayor. Por ejemplo, si pesando una substancia en quintales se consideran las milésimas como aproximación suficiente, cuando se le pese en onzas, será inútil llevar la aproximación más allá de las décimas, supuesto que un quintal tiene 1,600 onzas.

172.—Casos en que un quebrado puede convertirse exactamente en decimal.—*Un quebrado podrá transformarse exactamente en decimal, siempre que después de haber descompuesto en sus factores primos sus dos términos, y de haber suprimido los factores comunes, el denominador no quede formado más que de los factores primos de diez, 2 y 5, elevados á cualquiera potencia, ó de uno de ellos solamente.*

Por ejemplo, $\frac{7}{8}=\frac{7}{2^3}$ podrá convertirse exactamente en decimal en virtud de que su denominador no está formado más que del número 2, (factor de 10) elevado á la tercera potencia. La razón de esto es que para convertirlo en decimal, se multiplicará su numerador por $10=2\times5$, por $100=2^2\times5^2$, por $1{,}000=2^3\times5^3$, etc., y se dividirá por el denominador, quedando en nuestro ejemplo expresada la división por

$$\frac{7\times2^3\times5^3}{2^3}$$

suprimiendo el factor común al dividendo y al divisor, 2^3, el cociente será un número entero que tendrá por valor los factores del numerador diferentes de los del denominador: $7\times5^3=875$. En efecto, $\frac{7}{8}=0'875$.

El quebrado $\frac{21}{60}=\frac{3\times7}{2^2\times3\times5}$, cuyo denominador contiene además de las potencias de 2 y de 5 el factor primo 3, podrá convertirse exactamente en decimal, porque este factor 3 es común al numerador y al denominador. En este caso la división estará expresada por

$$\frac{3\times7\times2^2\times5^2}{2^2\times3\times5}$$

y el cociente entero será $7\times5=35$. En efecto, $\frac{21}{60}=0{,}35$.

Demostración.—Como para convertir un quebrado en decimal se multiplica el numerador por una potencia de 10 y el producto se divide por el denominador, el dividendo será el producto de los factores primos del numerador multiplicados por $2^n\times5^n$, (representando n la potencia correspondiente de 10,) y como sabemos que la división de dos números será exacta siempre que el dividendo sea el producto del divisor por un número entero, se infiere que cuando el denominador esté formado de factores primos comunes al numerador y de los factores de 10, que son 2 y 5, elevados á cualquiera potencia, el resultado de la división tendrá que ser exacto.

Cuando la conversión de un quebrado en decimal conduce á un resultado exacto, el número de cifras decimales es igual al mayor exponente de que 2 ó 5 queda afectado en el denominador, después de haber suprimido los factores comunes á los dos términos.

Si, por ejemplo, tenemos que convertir el quebrado $\frac{37}{40}$ en decimal, siendo el denominador $40=2^3\times5$, es necesario, para obtener un cociente exacto, multiplicar el numerador tantas veces por $10=2\times5$ cuantas sean indispensables para formar el mayor factor 2^3, esto es, 3 veces, y como por otra parte, cada multiplicación por 10 produce una cifra en el cociente, éste constará del número de guarismos indicados por el mayor exponente de uno de los factores. En efecto $\frac{37}{40}=0'925$, consta de tres cifras decimales.

173. Casos en que un quebrado no puede transformarse exactamente en decimal, siendo los resultados fracciones periódicas.—*Cuando después de haber descompuesto en sus factores primos los dos términos de un quebrado, y de haber suprimido los factores comunes, resulta que el denominador queda formado de factores que no son 2 ni 5, ó que además de estos números elevados á cualquier potencia contiene otro factor, el quebrado no podrá convertirse exactamente en decimal.*

Por ejemplo, $\frac{4}{21}=\frac{2^2}{3\times7}$ quebrado cuyo denominador, no está formado de los factores 2 ni 5, no podrá convertirse exactamente en decimal.

El quebrado $\frac{12}{35}=\frac{2^2\times3}{5\times7}$, cuyo denominador, además del factor 5, contiene el número primo 7 que no forma parte del numerador, tampoco podrá convertirse exactamente en decimal.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Demostración.—Hemos visto que para transformar un quebrado en decimal se multiplica el numerador por $2^n \times 5^n$ y se divide entre el denominador. El dividendo estará formado de sus factores primos multiplicados por $2^n \times 5^n$, siendo necesario que este dividendo sea múltiplo del divisor para que la división pueda ser exacta; luego cuando el divisor esté formado por factores primos que no constituyen al dividendo el cociente no será exacto y el quebrado no podrá transformarse sino aproximadamente en decimal.

En estos dos casos, la transformación de un quebrado en decimal, no puede conducir á un resultado exacto; pero como las restas tienen que ser menores que el divisor, forzosamente se vuelve á encontrar en el transcurso de la división una de las restas anteriores, y en seguida se reproduce en el cociente la serie de números obtenidos anteriormente.

Por ejemplo, para convertir $\frac{3}{11}$ en decimal, se divide 3 entre 11, agregando sucesivamente un cero á cada resta, y se ve que en el cociente se obtiene el período 27 repetido constantemente, sin que sea posible llegar á obtener un resultado exacto.

30	11
80	0·2727
30	
80	
3	

Sea como segundo ejemplo, convertir el quebrado $\frac{7}{24}$ en decimal. Dividiendo 7 entre 24, y agregando sucesivamente ceros á la resta, se obtiene primero la parte 0·291, y en seguida se sigue repitiendo indefinidamente el período 6.

70	24
220	0·29166
40	
160	
160	
16	

A esta clase de resultados se les *llama fracciones periódicas*, esto es, *á las cantidades decimales compuestas de una serie de guarismos periódicamente iguales.*

Se distinguen dos clases de fracciones periódicas: las simples y las mixtas. *Fracciones periódicas simples son aquellas en las que el período comienza inmediatamente después de la coma; y mixtas, aquellas en las que el período que se repite no comienza sino algunos guarismos después de la coma.*

Las fracciones periódicas se indican escribiendo el período dentro de un paréntesis

Por ejemplo $\frac{3}{11}=0'(27)$ $\frac{7}{24}=0'291(6)$ $\frac{4}{11}=0'(36)$ $\frac{11}{14}=0'7(857142)$

En las fracciones periódicas debe observarse:

1º *Que el número de guarismos de que el período está compuesto, es menor que el número de unidades del denominador*, supuesto que debiendo ser la resta menor que el divisor, no podrá exceder el número de restas diferentes del de unidades del denominador, y que una vez encontrada una resta igual á otra, se repite el período. 2º Si después de haber suprimido los factores comunes, el denominador no tiene 2 ni 5 por factores, el período comienza inmediatamente después de la coma. 3º Cuando después de simplificado el quebrado, el denominador, además de otros factores que no forman parte del numerador, queda formado de las potencias de 2 ó de 5, el período estará precedido de tantas cifras como unidades tenga el mayor exponente de que esté afectado 2 ó 5. Cuando se tiene, por ejemplo, $\frac{7}{12}=\frac{7}{2^2\times 3}$, estando formado el denominador de dos factores, para hacer desaparecer 2^2, será preciso multiplicar el numerador dos veces por $10=2\times 5$ para tener 2^2 en el dividendo; y como cada vez que se multiplica la resta por 10, se obtiene un guarismo decimal en el cociente, obtendremos primero dos cifras decimales, y en seguida quedará una resta para dividirse por 3, que será la que produzca el período. Esto explica por qué éste estará precedido de dos guarismos en el ejemplo propuesto.

$$\frac{7}{12}=0'58\,(3).$$

Ejemplos.—$\frac{42}{50}=\frac{2\times 3\times 7}{2\times 5^2}=\frac{3\times 7}{5^2}$ podrá convertirse exactamente en decimal con dos cifras.

$\frac{63}{120}=\frac{3^2\times 7}{2^3\times 3\times 5}=\frac{3\times 7}{2^3\times 5}$ podrá convertirse exactamente en decimal con 3 cifras.

$\frac{40}{42}=\frac{2^3\times 5}{2\times 3\times 7}=\frac{2^2\times 5}{3\times 7}$ dará una fracción periódica simple.

$\frac{55}{120}=\frac{5\times 11}{2^3\times 3\times 5}=\frac{11}{2^3\times 3}$ dará una fracción periódica mixta con 3 decimales antes del período.

174.—Reducción de las decimales á quebrados.—En la práctica de esta operación, distinguiremos cuatro casos: 1º, *transformar en quebrado una decimal cuyo valor es exacto*; 2º, *cuando sólo es aproximado su valor*; 3º, *transformar en quebrado una fracción periódica simple*; y 4º, *una fracción periódica mixta.*

Primer caso.—*Para transformar en quebrado una decimal cuyo valor es exacto, se pone á la decimal, tomada como entero, por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras haya después de la coma, y en seguida se abrevia el quebrado.*

Por ejemplo: $0'375=\frac{375}{1000}=\frac{3}{8}$.

Demostración.—Al ejecutar esta regla, no se hace más que expresar

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

el denominador tácito de la decimal, y al simplificar el quebrado no se altera su valor.

Segundo caso.—*Para transformar en quebrado una decimal cuyo valor sólo es aproximado, se ejecuta la regla anterior llevando la aproximación hasta el grado que lo exija la cuestión.* (171.)

Por ejemplo: se tiene la decimal 0'4615737, y se quiere convertir en quebrado, llevando la aproximación hasta las milésimas. La decimal será:

$$0'462 = \frac{462}{1000} = \frac{231}{500}$$

Se comprende que en este caso, el valor del quebrado diferirá del verdadero, una cantidad que depende del grado de aproximación.

Tercer caso.—*Para convertir una fracción decimal periódica simple en quebrado, se considerará el período como entero y se le pondrá por denominador tantos nueves como cifras tenga el período, simplificando el quebrado cuando sea posible.*

Por ejemplo: $0'(27) = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$ $0'(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Para comprender el fundamento de esta regla, observaremos la marcha y resultados de la operación cuando hay que convertir en decimal un quebrado que tiene la unidad por numerador y uno ó varios nueves por denominador. Si convertimos $\frac{1}{9}$ en decimal, será necesario agregar un cero al numerador y dividir 10 por 9, y como $10 = 9+1$, ejecutando la división se obtendrá 1 por resta, y continuando la aproximación se repetirá la división de 10 por 9, lo cual reproducirá el cociente y la resta obtenida antes, por lo que se ve que $\frac{1}{9}$ es igual á la fracción periódica $(0'1)$. Si convertimos $\frac{1}{99}$ en decimal, será necesario agregar dos ceros al numerador para obtener 0'01 de cociente y 1 por resta, supuesto que $100 = 99+1$; continuando la aproximación, tendremos que agregar dos ceros, y repitiéndose la división de 100 por 99, volverá á reproducirse el cociente y la resta obtenida antes, por lo que se ve que $\frac{1}{99}$ es igual á una fracción periódica representada por $0'(01)$. Si convertimos $\frac{1}{999}$ y $\frac{1}{9999}$ en decimal, obtendremos las fracciones periódicas $0'(001)$ y $0'(0001)$, luego:

$$\frac{1}{9} = 0'(1) \quad \frac{1}{99} = 0'(01) \quad \frac{1}{999} = 0'(001) \quad \frac{1}{9999} = 0'(0001) \text{ etc.}$$

Generalizando este raciocino, fundado en que la unidad seguida de ceros es igual al mismo número de nueves más 1, comprenderemos que toda fracción periódica igual á una décima, á una centésima, etc., procede de un quebrado cuyo numerador es la unidad y el denominador consta de tantos nueves como cifras decimales tenga el período.

Esto supuesto, cualquiera fracción periódica simple compuesta de una cifra es igual al período tomado como número entero multiplicado por la fracción periódica $0'(1) = \frac{1}{9}$. Por ejemplo, $0'(3) = 3 \times 0'(1) = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$.

En consecuencia, el valor exacto de una fracción periódica que consta de un solo guarismo, es el de un quebrado que tiene este guarismo por numerador y 9 por denominador.

Si tenemos un período compuesto de dos guarismos como $0'(27)$, tendremos:

$$0'(27) = 0'(01) \times 27 = \frac{1}{99} \times 27 = \frac{27}{99}.$$

Cuando consta de tres como $0'(273)$, tendremos:

$$0'(273) = 0'(001) \times 273 = \frac{1}{999} \times 273 = \frac{273}{999}$$

Luego en general, el valor exacto de una fracción periódica simple, es el de un quebrado cuyo numerador es el período tomado como número entero, y su denominador consta de tantos nueves como guarismos tiene el período.

En el caso de que se deba convertir en quebrado una decimal que *conste de unidades seguidas de una fracción periódica simple*, se incorporarán las unidades al quebrado á que es igual la fracción periódica simple. Por ejemplo, $3'(27) = 3 + \frac{27}{99} = \frac{324}{99}$

Cuarto caso.—*Para convertir una fracción decimal periódica mixta en quebrado, se le pone á la parte que precede al período por denominador, la unidad seguida de tantos ceros como guarismos tiene esta parte; á los guarismos que forman el período se les pone por denominador tantos nueves como cifras tiene la parte periódica, seguidos los nueves de tantos ceros como guarismos tiene la parte no periódica; se suman los quebrados, y el resultado abreviado será el valor de la fracción periódica mixta.*

Por ejemplo: se trata de convertir en quebrado la decimal $0'725(27)$

$$0'725(27) = \frac{725}{1000} + \frac{27}{99000} = \frac{725 \times 99 + 27}{99000} = \frac{71802}{99000} = \frac{3989}{5500}$$

2° ejemplo: $0'29(54) = \frac{29}{100} + \frac{54}{9900} = \frac{29 \times 99 + 54}{9900} = \frac{2925}{9900} = \frac{13}{44}$

Demostración.—Se sabe que cuando en una decimal se corre la coma hacia la derecha, su valor se hace 10 veces mayor por cada lugar que se cambia la coma. En consecuencia, si en la fracción periódica mixta $0'726(27)$ corremos la coma hasta la izquierda del período haremos su valor 1000 veces mayor, y para restituirle el que le corresponde, tendremos que dividirlo por 1000, esto es:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$0{\cdot}725(27)=\frac{725{\cdot}(27)}{1000}=\frac{725}{1000}+\frac{0{\cdot}(27)}{1000}$$

Así pues, el valor de la fracción periódica mixta consta de dos partes: 1ª, $\frac{725}{1000}$; y 2ª, el periodo $0{\cdot}(27)$ dividido por 1000, y como el periodo es igual á $\frac{27}{99}$ dividido por 1000 será $\frac{27}{99000}$. Luego en definitiva tendremos:

$$0{\cdot}725(27)=\frac{725}{1000}+\frac{27}{99000}=\frac{71802}{99000}$$

que es lo que prescribe la reg'a.

En el caso de que se tenga que convertir en quebrado una decimal *compuesta de unidades seguidas de una fracción periódica mixta*, se incorporarán las unidades con el quebrado á que es igual la fracción periódica mixta.

Por ejemplo, $3{\cdot}725(27)=3+\frac{725}{1000}+\frac{27}{99000}$

$$3{\cdot}725(27)=3+\frac{71802}{99000}=\frac{368802}{99000}$$

ADICION DE LAS DECIMALES.

175.—Regla.—*Para sumar las decimales, se escriben las cantidades unas debajo de otras, lo mismo que en los enteros, teniendo cuidado de que la coma forme una columna vertical y de que se correspondan los órdenes de unidades y los de las subdivisiones de igual valor. Para evitar equivocaciones, se reducen las decimales, algunas veces, á un común denominador, lo que se consigue agregando ceros á la derecha de las decimales que tienen menos cifras. En seguida se comienza á sumar por las decimales de la derecha, ejecutando la operación como la de los enteros, teniendo cuidado de colocar la coma en el resultado en la columna de los sumandos.*

Sean por sumar las siguientes cantidades:

Kilogramos.	Varas.
37'0945	325'305
8'2350	45'620
46'2200	377'730
7'3556	78'446
28'9600	262'220
72'3609	16'800
kil. 200'2260	varas 1106'121

Siendo el sistema de numeración de las decimales el mismo que el de los enteros, la demostración de esta regla y todas las observaciones correspondientes á su ejecución, prueba, casos y usos, son las mismas que se hicieron al tratar de los enteros. En cuanto á la reducción á un común denominador, como se sabe, es una operación que no altera el valor de las decimales, teniendo por objeto sumar fácilmente unas con otras las subdivisiones de la misma especie.

SUBSTRACCION DE LAS DECIMALES.

176.—Regla.—*Para restar las cantidades decimales se escribe el substraendo debajo del minuendo, teniendo cuidado de que la coma se corresponda en una columna lo mismo que los órdenes de unidades y los de las subdivisiones de igual valor; se reducen las decimales á un común denominador agregando ceros á la derecha á la que tenga menos cifras, y se ejecuta la operación como la de enteros, poniendo la coma en el resultado en la columna correspondiente.*

Sean por restar las siguientes cantidades:

$ 345'037200	fs. 796'60420
—89'380465	—534'22008
pesos 255'656735	fanegas 262'38412

Como el valor de una decimal no se altera cuando se reduce á un común denominador, la resta encontrada será la verdadera; por lo demás, la demostración de la regla, la prueba de la operación, sus casos y usos, todo es idéntico á lo explicado en la substracción de los números enteros.

MULTIPLICACION DE LAS DECIMALES.

177.—Regla.—*Para multiplicar las decimales se hace abstracción de la coma, se ejecuta la operación lo mismo que si las cantidades fueran números enteros, y en el producto se separan, contando de derecha á izquierda, tantas cifras decimales como hay en ambos factores juntos.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

EJEMPLOS:

Cargas.	Varas.	Metros.
3·075	0·000456	0·044
á $ 48·75	á $ 0·023	á $ 0·008
15375	1368	$ 0·000352
215 5	912	
24600		
12300	$ 0·000010488	
$ 149·90625		

Se ve en el segundo y tercer ejemplo, que cuando en el producto hay menos cifras significativas que decimales en ambos factores, es necesario antes de poner la coma en el producto, agregar á la izquierda de la cantidad tantos ceros cuantos sean necesarios para igualar el número de decimales que hay en ambos factores juntos.

DEMOSTRACIÓN.—Cuando se considera el multiplicando como número entero, prescindiendo de la coma que separa las decimales, se hace este factor cierto número de veces mayor (en el primer ejemplo ha sido 1000 veces), y en consecuencia, el producto resultará 1000 veces mayor. Cuando prescindimos de la coma en el multiplicador, lo hacemos 100 veces mayor, luego para obtener el producto verdadero, deberemos hacerlo tantas veces menor como se habia hecho mayor, lo cual se consigue corriendo la coma tantos lugares á la izquierda como cifras decimales haya en ambos factores juntos.

La prueba de esta operación, las abreviaciones correspondientes á los casos y sus usos, son los mismos que se han explicado en la multiplicación de enteros.

En cuanto al valor relativo del producto, éste tiene, respecto de un factor, la misma relación que existe entre el otro factor y la unidad, Por esto, cuando un factor consta de enteros y de decimales, el producto es, mayor que el otro; pero cuando solo consta de decimales, esto es. cuando un factor es menor que la unidad, el prôducto es menor que el otro factor.

DIVISION DE LAS DECIMALES.

178.—REGLA.—*Para dividir las cantidades decimales, se hará que tanto el dividendo como el divisor, tengan igual número de cifras decimales, agregando los ceros necesarios á la derecha del término que tenga menos. En seguida, haciendo abstracción de la coma, se dividirán como si fueran enteros, pudiendo suceder que el cociente tenga ó no parte entera. Cuando se puede dividir el dividendo por el divisor, el cociente constará de enteros, y para determinar la parte decimal, después de poner la coma en el cociente, á la resta se le agrega un cero, y dividiendo por el divisor, se determinan las décimas del cociente; agregando sucesivamente un cero á cada resta y dividiendo por el divisor, se determinan las centésimas, las milésimas, etc., del cociente, llevando la aproximación hasta donde sea necesario. Cuando después de igualadas las cifras decimales y de prescindir de la coma, el dividendo sea menor que el divisor, se pondrá un cero en el cociente, y la coma, para indicar que no hay enteros; comenzándose desde luego la aproximación por decimales, agregando sucesivamente un cero al dividendo y luego á cada resta para determinar en el cociente las decimales correspondientes hasta llegar al límite que se desee.*

Cuando el término que tenga menos cifras decimales sea fracción periódica, en lugar de ceros, se le agregarán las cifras significativas correspondientes del período que sean necesarias para igualar las del otro término.

EJEMPLOS.		0·0345 | 0·87		0·5(27) | 0·3247	
345·220	| 44·035	0·034500	| 0,8700	0·5272	| 0·3247
36 9750	7·839	84000	0·039	20257	1·623
1 74700		5700		7752	
425950				12587	
29635				2846	

En el primer ejemplo, constando el dividendo de dos cifras decimales y el divisor de tres, agregamos al dividendo un cero y se obtuvo el cociente entero 7, y la parte decimal 839 milésimas.

En el segundo ejemplo, el divisor tiene menos cifras decimales, por lo que le agregamos dos ceros. Dividiendo 345 entre 8700 se obtiene 0 unidades. Dividiendo en seguida 3450 entre 8700, se obtiene 0 décimas. Dividiendo en seguida 34500 entre 8700 se obtiene 3 centésimas, habiendo podido abreviarse la división suprimiendo dos ceros á la derecha del dividendo y otros tantos en el divisor. Por último, se han obtenido 9 milésimas, habiéndonos conformado en ambos ejemplos con la aproximación hasta este grado. En el tercer ejemplo en lugar de ceros hemos agregado al dividendo las cifras del periodo 27.

DEMOSTRACIÓN.—Cuando se agregan ceros á la derecha de la decimal de uno de los términos de la división, no se altera su valor. En seguida, al prescindir de la coma en el dividendo, considerándolo como entero, este término, lo mismo que el cociente, se hace cierto número de ve-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ces mayor; pero como al prescindir de la coma en el divisor el cociente se hace el mismo número de veces menor, habrá perfecta compensación y el cociente será el verdadero.

La prueba de esta operación, las abreviaciones correspondientes á sus casos y los usos, son los mismos que los de la división de enteros.

El valor del cociente es menor que el dividendo cuando el divisor consta de enteros; pero si el divisor consta solo de decimales, el cociente es mayor que el dividendo.

* (179).—Observaciones sobre el cálculo de las decimales.—La sencillez de las operaciones ejecutadas con las decimales, depende de tener el denominador tácito, y de haber adoptado las mismas convenciones del sistema de numeración de los enteros.

El valor de una decimal depende de la relación que hay entre el valor expresado por sus cifras y el de su denominador sobrentendido, el cual depende á su vez del número de cifras decimales que hay después de la coma.

Por esto el valor de una decimal se altera cuando se cambia de lugar la coma; si se corre á la derecha, se multiplica, y si se corre á la izquierda, se divide por 10 y por las potencias de 10.

El valor de un número decimal no se altera cuando se suprimen ó agregan ceros á la derecha. Como operaciones fundamentales, tenemos, además de la multiplicación y división de las decimales por 10 y sus potencias, su abreviación, su reducción á un común denominador y las transformaciones de un quebrado en decimal, y de un número decimal en quebrado.

Cuando se reduce un quebrado á decimal, si después de haber descompuesto sus términos en sus factores primos, y después de haber suprimido los que sean comunes, *el denominador* solo consta de las potencias de 2 y de 5, el quebrado podrá transformarse exactamente en decimal; si no consta de 2 ni de 5, no podrá transformarse exactamente, y el resultado será una fracción periódica simple; y cuando el denominador consta de 2 ó de 5 y de otros factores primos, el resultado será una fracción periódica mixta. El número de cifras de la decimal depende especialmente de los exponentes de los factores en el denominador.

En la conversión de las decimales á quebrados, se les da por denominador la unidad seguida de ceros cuando su valor es exacto ó aproximado. Cuando es periódica simple, se convierte en quebrado poniéndole por denominador tantos nueves como cifras tiene el periodo. Las fracciones mixtas se consideran compuestas de dos quebrados cuyos valores se suman.

La ejecución de las operaciones es como la de los enteros, debiendo

conservarse la coma en la adición y substracción en la columna que ocupa en los datos.

En la multiplicación se separarán del producto tantas decimales como hay en ambos factores; y en la división se hará préviamente que el dividendo y el divisor tengan igual número de cifras decimales.

El valor del resultado de la suma y de la resta con relación á los datos, es el mismo que en enteros. En la multiplicación depende de que un factor sea mayor ó menor que la unidad, y en la división el cociente tendrá la misma relación con el dividendo que la que tenga la unidad con el divisor.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL Y MEDIDAS ANTIGUAS.

180.—Diversas especies de unidades.—Hemos dicho que número es el conjunto de unidades ó de partes de la unidad; y que por unidad se entiende una cantidad elegida arbitrariamente las más veces, para que sirva de término de comparación con todas las de su especie.

En las aplicaciones que se hacen de la aritmética á las necesidades de la vida, es preciso casi siempre considerar, no solo el valor, sino también la especie de las cantidades que entran en los cálculos, y de esto nace la clasificación de las unidades. Por ejemplo, se sabe que el número 8 es igual á la reunión de 8 unidades; pero según sea el caso podrá representar 8 pesos, 8 varas ú 8 horas, y para determinar las diferentes especies de las cantidades se han escogido unidades para cada clase con sus correspondientes denominaciones y subdivisiones.

Las unidades de que se hace uso en matemáticas son de *longitud*, de *superficie*, de *volumen*, de *peso*, de *valor* y de *tiempo*.

Se usa la *unidad de longitud*, cuando se quiere medir ó valuar la distancia entre dos puntos, ó cuando se quiere apreciar una sola dimensión de un cuerpo. Así, por ejemplo, decimos que la distancia de México á Tacubaya, es de dos leguas, y que la altura de un hombre es de 7 piés. En el primer caso se supone conocida la longitud de la legua, y se concibe que la distancia de México á Tacubaya es igual á dos veces la longitud de la unidad escogida. En el segundo ejemplo se compara la estatura de un hombre con el tamaño del pie.

Cuando se estima la extensión en dos dimensiones, su largo y su ancho, prescindiendo del grueso, se valúa su superficie y se compara á la *unidad de superficie*. Por ejemplo, al calcular el valor de un terreno se estima su *superficie*, la cual depende del largo y del ancho del terreno,

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ces mayor; pero como al prescindir de la coma en el divisor el cociente se hace el mismo número de veces menor, habrá perfecta compensación y el cociente será el verdadero.

La prueba de esta operación, las abreviaciones correspondientes á sus casos y los usos, son los mismos que los de la división de enteros.

El valor del cociente es menor que el dividendo cuando el divisor consta de enteros; pero si el divisor consta solo de decimales, el cociente es mayor que el dividendo.

* (179).—Observaciones sobre el cálculo de las decimales.—La sencillez de las operaciones ejecutadas con las decimales, depende de tener el denominador tácito, y de haber adoptado las mismas convenciones del sistema de numeración de los enteros.

El valor de una decimal depende de la relación que hay entre el valor expresado por sus cifras y el de su denominador sobrentendido, el cual depende á su vez del número de cifras decimales que hay después de la coma.

Por esto el valor de una decimal se altera cuando se cambia de lugar la coma; si se corre á la derecha, se multiplica, y si se corre á la izquierda, se divide por 10 y por las potencias de 10.

El valor de un número decimal no se altera cuando se suprimen ó agregan ceros á la derecha. Como operaciones fundamentales, tenemos, además de la multiplicación y división de las decimales por 10 y sus potencias, su abreviación, su reducción á un común denominador y las transformaciones de un quebrado en decimal, y de un número decimal en quebrado.

Cuando se reduce un quebrado á decimal, si después de haber descompuesto sus términos en sus factores primos, y después de haber suprimido los que sean comunes, *el denominador* solo consta de las potencias de 2 y de 5, el quebrado podrá transformarse exactamente en decimal; si no consta de 2 ni de 5, no podrá transformarse exactamente, y el resultado será una fracción periódica simple; y cuando el denominador consta de 2 ó de 5 y de otros factores primos, el resultado será una fracción periódica mixta. El número de cifras de la decimal depende especialmente de los exponentes de los factores en el denominador.

En la conversión de las decimales á quebrados, se les da por denominador la unidad seguida de ceros cuando su valor es exacto ó aproximado. Cuando es periódica simple, se convierte en quebrado poniéndole por denominador tantos nueves como cifras tiene el periodo. Las fracciones mixtas se consideran compuestas de dos quebrados cuyos valores se suman.

La ejecución de las operaciones es como la de los enteros, debiendo

conservarse la coma en la adición y substracción en la columna que ocupa en los datos.

En la multiplicación se separarán del producto tantas decimales como hay en ambos factores; y en la división se hará préviamente que el dividendo y el divisor tengan igual número de cifras decimales.

El valor del resultado de la suma y de la resta con relación á los datos, es el mismo que en enteros. En la multiplicación depende de que un factor sea mayor ó menor que la unidad, y en la división el cociente tendrá la misma relación con el dividendo que la que tenga la unidad con el divisor.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL Y MEDIDAS ANTIGUAS.

180.—Diversas especies de unidades.—Hemos dicho que número es el conjunto de unidades ó de partes de la unidad; y que por unidad se entiende una cantidad elegida arbitrariamente las más veces, para que sirva de término de comparación con todas las de su especie.

En las aplicaciones que se hacen de la aritmética á las necesidades de la vida, es preciso casi siempre considerar, no solo el valor, sino también la especie de las cantidades que entran en los cálculos, y de esto nace la clasificación de las unidades. Por ejemplo, se sabe que el número 8 es igual á la reunión de 8 unidades; pero según sea el caso podrá representar 8 pesos, 8 varas ú 8 horas, y para determinar las diferentes especies de las cantidades se han escogido unidades para cada clase con sus correspondientes denominaciones y subdivisiones.

Las unidades de que se hace uso en matemáticas son de *longitud*, de *superficie*, de *volumen*, de *peso*, de *valor* y de *tiempo*.

Se usa la *unidad de longitud*, cuando se quiere medir ó valuar la distancia entre dos puntos, ó cuando se quiere apreciar una sola dimensión de un cuerpo. Así, por ejemplo, decimos que la distancia de México á Tacubaya, es de dos leguas, y que la altura de un hombre es de 7 piés. En el primer caso se supone conocida la longitud de la legua, y se concibe que la distancia de México á Tacubaya es igual á dos veces la longitud de la unidad escogida. En el segundo ejemplo se compara la estatura de un hombre con el tamaño del pie.

Cuando se estima la extensión en dos dimensiones, su largo y su ancho, prescindiendo del grueso, se valúa su superficie y se compara á la *unidad de superficie*. Por ejemplo, al calcular el valor de un terreno se estima su *superficie*, la cual depende del largo y del ancho del terreno,

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

y se multiplica por el precio de la unidad de superficie, como la vara cuadrada. La unidad que se escoge generalmente para medir la superficie, es un cuadrado, esto es, una figura de cuatro lados en la que tanto los lados como los ángulos son iguales entre sí.

Cuando se consideran las tres dimensiones de un cuerpo, el objeto es valuar su volumen ó capacidad, comparándola con una unidad de la misma clase. Por ejemplo, tratar de saber cuántos tercios de algodón podrán caber en una bodega, ó de medir las fanegas de maíz que hay en un depósito, ó la cantidad de líquido que contiene un barril, son otros tantos casos en que se considera el volumen de los cuerpos, el cual, para poderlo valorizar, es preciso compararlo con una unidad de volumen. La que comunmente se escoje es el cubo, que es un cuerpo de figura semejante á la de un dado limitado por seis caras, que son cuadrados iguales y que tienen por lado la unidad de longitud.

Además de las unidades correspondientes á la extensión lineal, superficial y de volumen, hay necesidad de otra clase de unidad cuando se trata de valuar el peso de un cuerpo. La medida del peso de los cuerpos se refiere á una unidad de esta clase, como la libra ó el gramo, fijándose las condiciones necesarias para que esta unidad tenga un peso constante y bien determinado.

El valor de las cosas se estima en unidades de moneda, el cual valor á su vez depende de la cantidad de cierto metal que contiene la unidad escogida. En las monedas mexicanas la unidad es el peso.

La unidad para medir el tiempo es el día.

Además de estas unidades hay otras especiales usadas en geometría, en mecánica y en otras ciencias.

Definición.—*Sistema métrico-decimal es el conjunto de convenciones hechas para establecer y uniformar las unidades de pesos y medidas de acuerdo con nuestro sistema de numeración, tomando por base la magnitud del Meridiano terrestre.*

181.—Base del sistema métrico-decimal.—La facilidad con que se ejecutan las operaciones de aritmética cuando las fracciones de la unidad se estiman en partes decimales, hizo concebir la idea de servirse en la práctica de unidades y subdivisiones arregladas á este sistema. Además, la diversidad de unidades usadas para un mismo objeto en cada país y aun en los pueblos de un mismo país; la variedad en el sistema de subdivisiones, y la inestabilidad de los patrones ó tipos de las unidades, determinó, á fines del siglo pasado, al gobierno francés á ordenar que se emprendiesen trabajos de gran importancia que debían servir, y sirvieron de base al sistema métrico-decimal de pesos y medidas que vamos á explicar.

Para fijar la unidad lineal, se midió una porción del meridiano terrestre que pasa por París, y de esta medida ejecutada por procedimientos muy precisos, se dedujo la longitud del meridiano terrestre. Esta longitud, dividida en 40 000 000 de partes, determina la magnitud de la unidad de las medidas lineales llamada *metro*, con la cual están relacionadas las demás unidades. Comunmente no se considera la longitud de todo el meridiano terrestre, sino la de la cuarta parte de este círculo á la que se llama cuadrante, por lo cual se dice que el *metro es igual á la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.* La longitud del metro próximamente es igual á una vara y un quinto.

Una vez determinada la magnitud del metro para medir la extensión lineal, éste ha servido de base para las unidades de las otras especies de extensión.

Las superficies se valúan en *metros cuadrados, siendo el metro cuadrado la superficie de un cuadrado que tiene un metro por lado.*

Los volúmenes se estiman en *metros cúbicos, y el metro cúbico es el volumen de un cubo limitado por seis cuadrados iguales de un metro por lado.*

El peso de los cuerpos se estima en *gramos, siendo el gramo el peso de un cubo de agua que tiene la centésima parte de un metro por lado.*

La unidad de moneda escogida en el sistema métrico fué el *franco, que es una pieza del peso de 5 gramos, que contiene $4\frac{1}{2}$ gramos de plata y $\frac{1}{2}$ gramo de cobre.* Las dimensiones del franco están relacionadas al metro.

No siendo cómodo servirse siempre de una misma unidad para medir toda clase de magnitudes, pues se comprende que la unidad que sirve para medir la distancia entre los pueblos, no sería adecuada para valuar el grueso de las monedas; ni la unidad que sirve para pesar la leña, sería á propósito para pesar las pequeñas dosis de substancias empleadas en medicina, se han formado unidades mayores ó menores en el sistema métrico, de acuerdo con las convenciones de la numeración de los enteros y de las decimales, de constituir sucesivamente unidades superiores con la reunión de 10 unidades menores, y subdividir la unidad principal sucesivamente en 10 partes para formar unidades inferiores. Adoptando este sistema, se comprende desde luego que las unidades superiores y las subdivisiones de la unidad, se escriben exactamente como los números enteros y como las fracciones decimales, que el valor de cada especie de unidades queda determinado por el lugar que ocupa el guarismo que la representa, y que las operaciones se ejecutarán como las de los enteros y las decimales.

Para formar los nombres de las unidades superiores, se ha convenido

en anteponer las raices griegas: *deca*, *hecto*, *kilo* y *miria*, al nombre de la unidad que se considera. *Deca*, significa diez; *hecto*, cien; *kilo*, mil y *miria*, diez mil. Así, con la longitud de diez metros, se forma una nueva unidad llamada *decámetro*. Reuniendo mil gramos se forma una nueva unidad llamada *kilógramo*, etc.

Para denominar las unidades inferiores, se antepone al nombre de la unidad uno de los radicales latinos *deci*, *centi* y *mili*, para expresar partes ó unidades *diez*, *cien*, *mil veces menores* que la unidad principal. Así, se dice *centímetro*, para expresar una medida cuya longitud es cien veces menor que el metro. El *miligramo*, representa una unidad de peso mil veces menor que el gramo.

Así, pues, la nomenclatura del sistema métrico-decimal, tiene la ventaja de formarse con muy pocas palabras; de conservar el nombre de la unidad principal á que se refiere la que se considera, y de dar cada nombre una idea exacta del valor que con él se denomina.

182.—Diversas unidades del sistema métrico-decimal.—Consideraremos: 1º Unidades lineales; 2º Unidades superficiales; 3º Unidades de volumen; 4º Unidades de peso; y 5º Unidades de moneda.

Unidades lineales.—Se ha tomado como base el *metro*, *cuya longitud es igual á la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.*

Las unidades mayores que el metro, son:

el decámetro = 10 metros.
el hectómetro = 100 metros.
el kilómetro = 1000 metros.
y el miriámetro = 10000 metros.

Las unidades lineales menores que el metro, son:

el decímetro = la décima parte del metro,
el centímetro = la centésima „ „
y el milímetro = la milésima „ „

Se ve, pues, que las unidades lineales van siendo sucesivamente 10 veces mayores que su inmediata menor; y siendo este sistema el adoptado para los números enteros y las decimales, naturalmente la escritura de las unidades lineales del sistema métrico, así como las operaciones que con ellas tengamos que ejecutar, estarán sujetas á las reglas dadas para la escritura y para el cálculo de los enteros y de las decimales; bastando correr la coma hacia la derecha para reducir unidades de especie mayor á menor y viceversa.

	m	kilómet.	milímet.
Así, pues,	3745'876	= 3'745876	= 3745876

Unidades superficiales.—La base de las unidades superficiales es el *ara que es la superficie de un cuadrado que tiene diez metros por cada lado.* (1)

Las unidades superficiales mayores que el ara son:
la *hectara*, que es la superficie de un cuadrado que tiene 100 metros por lado.
y la *miriara*, que es la superficie de un cuadrado que tiene 1000 metros por lado.

Las unidades superficiales menores que el ara son:
la *centiara* ó *metro cuadrado*, que es la superficie de un cuadrado de un metro por lado.
el *decímetro cuadrado*, que es la superficie de un cuadrado de un decímetro por lado.
el *centímetro cuadrado*, que es la superficie de un cuadrado de un centímetro por lado.
y el *milímetro cuadrado*, que es la superficie de un cuadrado de un milímetro por lado.

Las relaciones entre estas diversas unidades son las siguientes:

La miriara = 100 hectaras,
la hectara = 100 aras,
el ara = 100 centiaras,
la centiara ó metro cuadrado = 100 decímetros cuadrados.
el decímetro cuadrado = 100 centímetros cuadrados.
el centímetro cuadrado = 100 milímetros cuadrados.

En consecuencia, las unidades superficiales van siendo sucesivamente 100 veces menores que la unidad inmediata mayor, por lo cual, para reducir unidades superficiales de especie mayor á menor es preciso correr la coma de dos en dos lugares á la derecha y recíprocamente. Por ejemplo:

	aras.	hectaras.	miriaras.	m. cd.
	32584'7961	= 325'847961	= 3'25847961	= 3258479'61.

Unidades de volumen.—Estas son: el *esterio* y el *litro*. El *esterio ó metro cúbico, es el volumen de un cubo de un metro por lado.*

(1) La Academia española emplea la palabra *área;* pero en México el uso ha sancionado la de *ara*, que es el nombre con el que la Secretaría de Fomento designó la unidad principal de superficie en el Reglamento expedido en 20 de Febrero de 1896. Por otra parte, es conveniente usar voces distintas para denominar la clase de extensión y la unidad adoptada para valuarla.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El *litro es el volumen de un cubo que tiene un decímetro por lado.*

Los múltiplos del esterio no son usados.

Las unidades de volumen menores que el esterio son:

el decímetro cúbico ó litro, que como acabamos de decir, es el volumen de un cubo que tiene un decímetro por lado;

el centímetro cúbico, que es el volumen de un cubo que tiene un centímetro por lado;

el milímetro cúbico, que es el volumen de un cubo que tiene un milímetro por lado.

La relación entre estas unidades es la siguiente:

El esterio ó *metro cúbico* = 1000 litros;
el *litro ó decímetro cúbico* = 1000 centímetros cúbicos;
el *centímetro cúbico* = 1000 milímetros cúbicos.

Por tanto, las unidades de volumen van siendo sucesivamente 1000 veces menores que la que se deduce de la unidad lineal inmediata mayor; y para reducir las de especie mayor á menor, habrá que correr la coma tres lugares á la derecha, y reciprocamente.

m. cúb. lit.
32'465179=32465'179=32465179 cent. cúb.

Las unidades de volumen mayores que el litro, más usadas son:

el decalitro = 10 litros;
el hectolítro = 100 litros;
el kilolitro = 1000 litros.

Las unidades de volúmenes menores que el litro son:

el decilítro = la décima parte del litro;
el centilitro = la centésima parte del litro;
el mililitro = la milésima parte del litro.

Unidades de peso.—En el sistema métrico-decimal, la unidad de peso es el *gramo, que es el peso de un centímetro cúbico de agua, químicamente pura, tomada á la temperatura de 4 grados, porque es á la que tiene mayor densidad.*

Ahora bien, como el volumen de un litro = 1000 centímetros cubicos; y el de un metro cúbico = 1000 litros, supuesto que
un centímetro cúbico de agua pesa un gramo,
un litro ó decímetro cúbico de agua pesará un kilogramo, y
un metro cúbico de agua pesará 1000 kilogramos ó una tonelada métrica.

Las unidades de peso mayores que el gramo son:

el decagramo = 10 gramos,
el hectogramo = 100 „
el kilogramo = 1000 „
el quintal métrico = 100 kilogramos,
y la tonelada métrica = 1000 kilogramos.

Las unidades menores que el gramo son:

el decigramo = la décima parte del gramo,
el centigramo = la centésima „ „
el miligramo = la milésima „ „

Unidades de moneda.—En el sistema métrico se ha tomado por unidad el *franco*, moneda que pesa cinco gramos, estando compuesta de $4\frac{1}{2}$ gramos de plata y $\frac{1}{2}$ gramo de cobre; y tiene 23 milímetros de diámetro. La moneda de oro de 100 francos pesa 32'258 gramos, contiene 9 décimos de oro y 1 de cobre, y mide 35 milímetros de diámetro.

183.—Relación entre las unidades de superficie y de volumen.—*El número de subdivisiones de que consta una unidad de superficie es igual á la segunda potencia del número de subdivisiones de la unidad lineal á que se refiere.*

Hemos visto que el *metro cuadrado* es la superficie de un cuadrado que tiene un metro por cada lado. Si dividimos cada uno de los lados, tanto los dos verticales como los horizontales en 10 partes iguales, y por los puntos de división tiramos líneas paralelas, resultará la superficie de *un metro cuadrado* dividido en 10 hiladas de 10 cuadrados cada una, esto es, en 100 cuadrados iguales, y teniendo cada uno de ellos un decímetro por lado, será un *decímetro cuadrado;* luego *un metro cuadrado es igual á cien decímetros cuadrados;* esto es, al producto de 10 (número de decímetros que tiene el metro lineal) por 10. Si se concibe la superficie de un *decímetro cuadrado,* y si cada uno de sus lados se divide en 10 partes, tirando líneas paralelas por los puntos de división, resultarán 10 hiladas de á 10 *centímetros cuadrados;* luego el *número de centímetros cuadrados que tiene un decímetro cuadrado es igual á* 100, *segunda potencia del número de centímetros qne tiene un decímetro lineal.* Del mismo modo, si en la superficie de *un centímetro cuadrado* se divide cada uno de sus lados en 10 partes, y por los puntos de división se tiran líneas paralelas, resultarán 10 hileras de á 10 cuadrados iguales, cada uno de un *milímetro cuadrado;* luego el número de *milímetros cuadrados que tiene un centímetro cuadrado es igual á 100, segunda*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

potencia del número de milímetros que tiene un centímetro lineal. Y en general, si se observa la figura adjunta, que representa los órdenes inmediatos de dos unidades superficiales en el sistema decimal, y se reflexiona que cuando la *unidad lineal* se divide en cierto número de partes, *la unidad superficial* contendrá tantas subdivisiones superficiales, como resulten de multiplicar el número de partes de la unidad lineal por si mismo, se comprenderá que *el número de subdivisiones de la unidad de superficie, es igual á la segunda potencia del número de subdivisiones de la unidad lineal.*

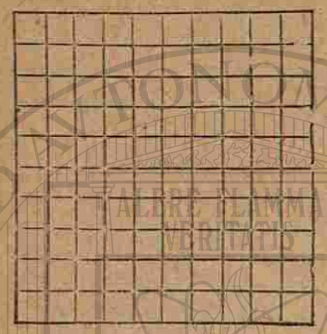


Figura 1.

Esto explica por qué

Un kilómetro cuadrado = 1 miriara = 100 hectaras.
Un hectómetro cuadrado = 1 hectara = 100 aras.
Un decámetro cuadrado = 1 ara = 100 metros cuadrados.
Un metro cuadrado = 1 centiara = 100 decimetros cuadrados.
Un decimetro cuadrado = 100 centímetros cuadrados.
Un centímetro cuadrado = 100 milímetros cuadrados.

Así, pues, en el sistema métrico-decimal, cualquiera unidad de superficie es 100 veces mayor que su inmediata menor; siendo esta la razón de que no se usen la decara ni la kilcara como unidades de superficie.

Es de la mayor importancia en la valuación de las superficies, no confundir las fracciones y los múltiplos del metro cuadrado con la superficie de los cuadrados formados sobre las fracciones ó los múltiplos del metro lineal. Asi, por ejemplo, acabamos de ver que *un metro cuadrado* es igual á 100 *decímetros cuadrados*, mientras que el mismo metro cuadrado solo tiene 10 *décimos de metro cuadrado*. Igualmente, un *decámetro cuadrado*, es igual á 100 y no á 10 metros cuadrados.

El número de subdivisiones de que consta una unidad de volumen es igual á la tercera potencia del número de subdivisiones de la unidad lineal á que se refiere.

Dijimos que el *metro cúbico*, llamado *esterio*, es el volumen de un cubo terminado por seis cuadrados que tienen un metro por cada lado. Si como se ve en la figura adjunta, se divide cada uno de los lados de la base en 10 partes iguales y por los puntos de división hacemos pasar rectas paralelas, resultarán en la cara que sirve de base 100 cuadrados iguales de un decimetro por lado, y como sobre estos 100 cuadrados pueden aplicarse otras tantas columnas verticales de 10 decímetros cúbicos cada una, resulta compuesto el metro cúbico de 1000 decímetros cúbicos, esto es. de $10 \times 10 \times 10$ ó la tercera potencia del número de decímetros que tiene el metro lineal, y como esta construcción puede aplicarse á cualquiera otra unidad de volumen como el *litro*, el *centímetro cúbico*, etc., se comprende que en general *el número de subdivisiones de la unidad de volumen, es igual á la tercera potencia del número de subdivisiones de la unidad lineal.*

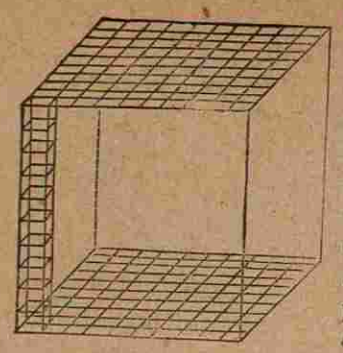


Figura 2.

Esta es la razón de que

Un decámetro cúbico=1000 metros cúbicos.
Que un *esterio* ó metro cúbico=1000 decímetros cúbicos ó *litros.*
Que un *litro* ó decimetro cúbico=1000 centímetros cúbicos.
Que un centímetro cúbico=1000 milímetros cúbicos.

Así, pues, en el sistema métrico-decimal cualquiera unidad de volumen es mil veces mayor que su inmediata menor.

Al estimar el volumen es preciso tener cuidado de no confundir las fracciones y los múltiplos del metro cúbico con los volúmenes formados sobre las fracciones ó los múltiplos del metro lineal. En efecto, un metro cúbico es *mil veces* mayor que un decímetro cúbico. Un *decámetro cúbico* es igual á 1000 y no á 10 metros cúbicos.

Siendo el volumen de *un litro*, ó decimetro cúbico, igual á 1000 centímetros cúbicos, y el de un metro cúbico igual á 1000 litros; y *pesando un centímetro cúbico de agua un gramo*, se infiere, como ya dijimos, que *un litro de agua pesa 1000 gramos*, ó *1 kilogramo*, y que *un metro cúbico de agua pesa 1000 kilogramos ó una tonelada.*

184.—Tabla metódica de la nomenclatura y valor de las unidades del sistema métrico.—En el siguiente cuadro consta lo más esencial del sistema métrico-decimal.

Número de unidades y fracciones de ella.	Nombres de los múltiplos y subdivisiones de la unidad.	Nombre de las unidades.	
10000	(M)—Miria.		
1000	(K)—Kilo.	Metro (m)	Lineal.
100	(H)—Hecto.	Ara (a)	Sup.
10	(D)—Deca.		
1	Unidad	Litro (lit)	Vol..
0'1	(d)—Deci.		
0'01	(c)—Centi.	Esterio (es)	Vol.
0'001	(m)—Mili.		
		Gramo (gram.)	Peso.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

VALOR DE CADA UNIDAD.

El *metro* es la longitud de la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.

Ara es la superficie de un cuadrado de 10 metros por lado.

Esterio es el volumen de un metro cúbico.

El *litro* es el volumen de un decimetro cúbico.

El *gramo* es el peso de un centímetro cúbico de agua.

Al lado de las voces empleadas para denominar las diferentes unidades, hemos puesto las abreviaturas que usaremos para cada parte de la palabra que representa, debiendo notarse que hemos adoptado las letras mayúsculas para indicar los múltiplos y las minúsculas para las subdivisiones, representando las unidades con una ó varias letras minúsculas.

En resumen; el sistema métrico-decimal tiene por base el metro, cuya magnitud puede determinarse en cualquier país midiendo una parte del meridiano: la alteración de los tipos ó patrones está evitada, porque se refiere á las dimensiones del globo que habitamos: lejos de haber incoherencia entre las diferentes clases de unidades, todas están relacionadas al metro: para formar las unidades de especie mayor y menor, se ha adoptado el sistema decimal de numeración con la facilidad que proporciona para la escritura y para la ejecución de las operaciones: y la nomenclatura tiene la ventaja de formarse por la combinación de pocas voces, en la que se conserva el nombre de la clase de unidad á que se refiere, y da una idea justa del valor de la que expresa la palabra compuesta. Las ventajas de este sistema se harán más perceptibles explicando el sistema de pesos y medidas usado antiguamente.

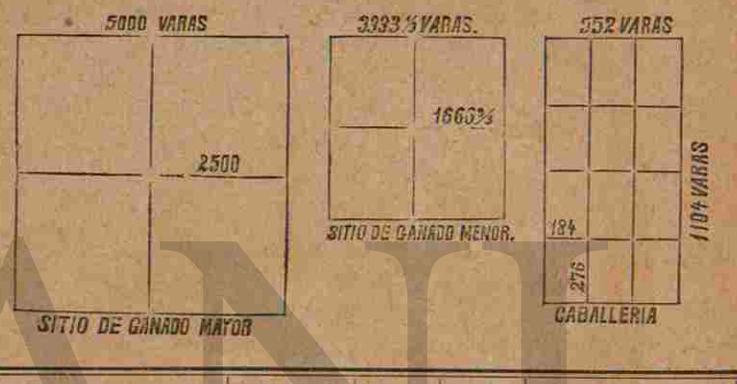
185.—Medidas antiguas de México.—1º *Para las medidas de longitud*, se ha escogido como unidad *la vara*, igual á 838 milésimos de metro, y cuyas subdivisiones son las siguientes:

Vara.		Pies		Pulgadas.		Líneas.		Puntos.
1	=	3	=	36	=	432	=	5184.
		1	=	12	=	144	=	1728.
				1	=	12	=	144.
						1	=	12.

La vara suele dividirse en cuatro cuartas, y cada cuarta en doce dedos, y también en 2 medias, ó en 6 sesmas.

Como unidad de longitud mayor que la vara, se tiene la legua, igual á 5000 varas.

2º *Para las medidas superficiales:* se usa la *vara cuadrada* (próximamente igual á 702 milésimas de metro cuadrado,) ó las subdivisiones de esta para las pequeñas superficies: teniendo la vara cuadrada 9 piés cuadrados, y el pié cuadrado 144 pulgadas cuadradas (183). Para las superficies de gran extensión, según sea el caso, se usan las medidas agrarias que ponemos á continuación indicando su valor, y cuya superficie referiremos á la *caballería de tierra* como unidad principal, la cual equivale á hectaras 42'7953.



UNIDADES AGRARIAS DE SUPERFICIE.	FIGURA.	LARGO.	ANCHO.	VALOR DE LA UNIDAD EN	
				Varas cuadradas.	Caballerías
Sitio de ganado mayor....	Cuadrado.	5000	5000	25000000	41'023
Criadero de ganado mayor.	,,	2500	2500	6250000	10'256
Sitio de ganado menor ...	,,	3333⅓	3333⅓	11111111 1/9	18'233
Criadero de ganado menor.	,,	1666⅔	1666⅔	2777777 7/9	4'558
Caballería de tierra.....	Paralelógº	1104	552	609408	1 ,,
Fanega de sembradura de maíz.....	,,	276	184	50784	1/12

3º *El volumen* de los cuerpos puede estimarse en *varas cúbicas* y sus subdivisiones, en el concepto de que la vara cúbica, (igual á 588 milésimos de metro cúbico), tiene 27 piés cúbicos, y que el pié cúbico tiene 1728 pulgadas cúbicas (183); pero las medidas usuales *de capacidad ó* de volumen, son el *cuartillo* para los líquidos y *la fanega* para los granos ó semillas. Aunque en los patrones de la ciudad de México se ha encontrado que el cuartillo destinado para la medida de todos los líquidos, contiene de agua 0'991347; y que el cuartillo destinado para la medida de aceite, contiene de agua 1'099734, la mente de los creadores de nuestro antiguo sistema de pesos y medidas debe haber sido que el cuar-

libras.

tillo contenga una libra, de lo cual difieren poco los modelos usados en el Fiel-contraste de México. *

La fanega para la medida de los áridos, es igual á 7200 pulgadas cúbicas y equivale á 90 815 litros.

Las subdivisiones de las medidas de volumen son las siguientes:

Para los líquidos:

1 barril = 9 jarras = 162 cuartillos.
1 „ 18 „

Para los granos.

Carga.	Fanega.	Medias.	Cuartillas.	Almudes.	Cuartillos.	Volúmenes.
1	2	4	8	24	96	14400 pulgs. cúbs.
	1	2	4	12	48	7200 „
		1	2	6	24	3600 „
			1	3	12	1800 „
				1	4	600 „
					1	150 „

4º *Para la medida de las aguas* de los manantiales, y para las mercedes de abasto en las poblaciones, se ha escogido como unidad *la paja*, que es el caudal que produce un cuartillo ó una libra de agua en un minuto. Los múltiplos de la paja son los siguientes:

Buey.		Surcos		Naranjas.		Reales		Pajas.
1	=	48	=	144	=	1152	=	20736
		1	=	3	=	24	=	432
				1	=	8	=	144
						1	=	18

Cuando la velocidad del agua es 270 milésimos de vara por segundo el buey es la cantidad que puede pasar en un minuto por la superficie de una vara cuadrada; y una paja es la cantidad de agua que pasa en un minuto por una abertura que tiene por superficie $\frac{1}{18}$ de pulgada cuadrada.

5º *Para valuar el peso de los cuerpos* se usa la *libra*, cuyo peso se ha visto que es próximamente el de la cantidad de agua que contiene un cuartillo, y equivale al de 460 gramos. Las subdivisiones de la libra son diferentes según sea que se emplee esta unidad para los usos comunes, para pesar la plata, el oro ó las substancias medicinales. Vamos á indicar las subdivisiones usadas ó relativas á la libra como unidad de peso en cada uno de estos casos.

* El volumen 1'099764 multiplicado por 0'915 densidad del aceite de olivo, da 1'006 de aceite libra.

Para los usos comunes.

Quintal.	Arrobas.	Libras.	Onzas.	Adarmes.	Tomines.	Granos.
1	4	100	1600	25600	76800	921600
	1	25	400	6400	19200	230400
		1	16	256	768	9216
			1	16	48	576
				1	3	36
					1	12

Para el peso de la plata.

Libra.	Marcos.	Onzas.	Ochavas.	Tomines.	Granos.
1	2	16	128	768	9216
	1	8	64	384	4608
		1	8	48	576
			1	6	72
				1	12

Para el peso del oro.

Libra.	Marcos.	Castellanos.	Tomines.	Granos.
1	2	100	800	9600
	1	50	400	4800
		1	8	96
			1	12

Para los usos medicinales.

Libra.	Onzas.	Dracmas.	Escrúpulos.	Granos.
1	16	128	384	9216
	1	8	24	576
		1	3	72
			1	24

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Tanto en los usos comunes, como para pesar la plata y las substancias medicinales, la libra tiene 9216 granos, pero cuando se usa para pesar el oro, la misma unidad tiene 9600 granos.

6º *Para las monedas* la unidad es el *peso*, que es una pieza compuesta de $\frac{6}{7}\frac{5}{2}$ partes de plata y $\frac{7}{72}$ de cobre, esto es, de 902'(7) milésimas de plata, y 97'(3) de cobre y que pesa $\frac{1}{17}$ de libra. En las *monedas de oro* la unidad es también el *peso*, la moneda de este valor pesa $\frac{1}{17}$ de onza y se compone de $\frac{7}{8}$ de oro y $\frac{1}{8}$ de cobre, esto es, 875 milésimas de oro y 125 de cobre.

Hay monedas de plata con el valor de 1 peso, de 50, de 25, de 10 y de 5 centavos y antiguas de 1 peso, de 4 reales, de 2, de 1, y de $\frac{1}{2}$ real. Monedas de oro se acuñan actualmente con los valores de 1 peso, de $2\frac{1}{2}$, de 5, de 10 y de 20 pesos; y antiguamente se acuñaban con los valores de un peso, de 2, de 4, de 8 y de 16 pesos, llamándose *escudos* las monedas de á 2 pesos y *onzas* á las de á 16 pesos. Monedas de cobre las hay con el valor de un centavo de peso, y antiguas con el de 1 tlaco.

Onzas.		Escudos.		Pesos.		Reales.		Tlacos.
1	=	8	=	16	=	128	=	1024
		1	=	2	=	16	=	128
				1	=	8	=	64
						1	=	8

El peso se subdivide en 100 centavos, y el real se consideraba dividido nominalmente en 12 granos.

7º Para la medida del *tiempo* la unidad es el *día*, que es la duración de una revolución de la tierra al rededor de su eje. Un mes se considera en los cálculos compuesto de 30 días y el año de 12 meses ó de 365 días. Un lustro es igual á 5 años, y un siglo igual á 100.

Días.		Horas.		Minutos.		Segundos.
1	=	24	=	1440	=	86400
		1	=	60	=	3600
				1	=	60

Para ejecutar los cálculos con el sistema de pesos y medidas comunes, es necesario proceder por partes ó convertir las subdivisiones en quebrados ó en decimales, según lo explicaremos al tratar de los números denominados; pero además de los inconvenientes que resultan de la mayor complicación en las operaciones, en el sistema común de pesos y medidas, falta, como se habrá observado, la sencillez de la nomenclatura del sistema métrico; hay incoherencia entre las medidas lineales, las de volumen y las de peso; el orden de las subdivisiones carece de sistema; es variable de una unidad á otra, y aun sucede que la misma unidad,

como la vara y la libra, se subdivide de diferentes maneras, por lo cual es más difícil conservar este sistema en la memoria, y por último, la misma voz expresa unidades diferentes.

Al tratar de las medidas comunes, debemos repetir que la unidad superficial se compone del cuadrado ó 2ª potencia del número de subdivisiones de la unidad lineal; y que la unidad de volumen se compone del cubo ó 3ª potencia del número de subdivisiones de la unidad lineal. Por esta razón una vara cuadrada tiene 9 piés cuadrados, y un pié cuadrado tiene 144 pulgadas cuadradas; así como una vara cúbica tiene 27 piés cúbicos, y un pié cúbico tiene 1728 pulgadas cúbicas.

186.—Correspondencia entre las medidas antiguas y las del sistema métrico.—Vamos á poner á continuación la equivalencia entre las principales unidades comunmente usadas y las del sistema métrico, y viceversa.

Medidas de longitud.

1	vara (3 piés)	=	m 0'838.
1	pié (12 pulgadas)	=	0'279 (3).
1	pulgada (12 líneas)	=	0'023278.
1	legua (5000 varas)	=	4190 metros.
1	metro	=	vara. 1'193317.
1	kilómetro	=	1193'317422.

Medidas de superficie.

1	vara cuadrada (9 piés cuadrados)	=	metros cuadrados. 0'702244.
1	pié cuadrado (144 pulgds. cuadradas)	=	0'078027.
1	sitio de ganado mayor (5000^2 varas)	=	1755'61 hect.
1	criadero idem idem, (2500^2 varas)	=	438'9025 hect.
1	sitio de ganado menor ($3333\frac{1}{3}^2$ varas)	=	780'2711 hect
1	criadero idem idem, ($1666\frac{2}{3}^2$ varas)	=	195'067777 hect.
1	caballería (1104×552=v. cuad. 609408)	=	42'795311 hect.
1	fanega (276×184=v. cuads. 50784)	=	3'566276 hect.
1	metro cuadrado	=	v. cuads. 1'424.
1	ara	=	142'400647 varas cuadradas.
1	hectara	=	14240'064707 varas cuadradas.
1	hectara	=	0'023367 caballerías.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Medidas de volumen.

1	vara cúbica (27 piés cúbicos)	=	0'588480. (m. cúbico.)
1	pié cúbico (1728 pulgadas cúbicas)	=	0'021796.
1	cuartillo para líquidos	=	0'456264. (litros)
1	cuartillo para aceite	=	0'506162.

1 metro cúbico = 1'699292. (v. cub)
1 litro = 2'191716. (cuartillo de liq.)
1 litro = 1'975651. (cuartillo de aceite.)

Medidas de capacidad para granos.

1	carga (2 fanegas)	=	181'629775 (litros.)
1	fanega (48 cuartillos)	=	90'814888.
1	cuartillo (150 pulgadas cúbicas)	=	1'891977.

1 hectolitro = 0'550571 cargas.

Medidas para manantiales y mercedes de agua.

1	buey (48 surcos)	=	9543'661056. (litro por minuto.)
1	surco (432 pajas)	=	198'826262.
1	paja (1 libra por minuto)	=	0'460246. (*)

1 litro de agua por minuto = 2'172749 (pajas) de á una libra.

Medidas de peso.

1	quintal (4 arrobas)	=	46'024634. (kil.)
1	arroba (25 libras)	=	11'506159.
1	libra (16 onzas)	=	0'460246.
1	onza (576 granos)	=	0'028765.
1	grano	=	0'050. (gramos.)

1 kilogramo = 2'172749 libras.
1 gramo = 20 granos.

(*) Por la ley de 2 de Agosto de 1861, la paja es igual á 0'45 de litro por minuto; pero hemos creido preferible que las unidades de volumen de aguas queden relacionadas exactamente á las de peso, conforme á la base de que una paja produce en un minuto un cuartillo de agua de una libra, según lo ordenó el Virrey Revillagigedo, fundándose en las experiencias practicadas por Don Miguel Constansó en Mayo de 1792, base que debe aplicarse en los casos de títulos y documentos anteriores á Agosto de 1861.

Monedas.

1	peso de plata	=	5'431. (francos)
1	peso de oro	=	5'100.
1	franco de plata	=	0'184. ($)
1	franco de oro	=	0'196.

Las anteriores relaciones entre las unidades lineales, de superficie, de volumen, de peso y de moneda del sistema métrico y las mexicanas, sirven para convertir unas en otras, y á fin de que los alumnos puedan hacer sin vacilación estas reducciones tan frecuentes en la práctica daremos la siguiente

Regla.—Cuando el número que expresa la equivalencia con la unidad *es heterogéneo con la cantidad que trata de convertirse, se multiplicará* esta por la equivalencia; pero cuando el número que expresa la equivalencia con la unidad *sea de la misma especie que la cantidad que va á reducirse, se dividirá* ésta por la equivalencia.

Por ejemplo, siendo una vara = 0'838 (m) se quiere reducir 22 varas á metros.

En este caso, siendo *heterogéneos* 0'838 (m) y 22 varas, *multiplicaremos* estos números para obtener que 22 varas equivalen á 18'436 (m).

Si se quieren convertir 30 varas en metros, sabiendo que un metro = 1'193 (v).

Como en este ejemplo 1'193 y 30 varas son cantidades *homogéneas, dividiremos* el último número por el primero para saber que 30 varas equivalen á 25'146 (m).

CALCULO DE LOS NUMEROS DENOMINADOS.

DEFINICIONES, PRINCIPIOS Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

187.—Definición.—*Se llaman números complexos ó denominados los que se componen de varias partes expresadas como números enteros y concretos de diferentes especies, pero relativas todas á una misma clase de unidades.* Por ejemplo: 3 varas, 2 pies y cinco pulgadas. La vara, los

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Medidas de volumen.

1	vara cúbica (27 piés cúbicos)	=	0'588480. (m. cúbico.)
1	pié cúbico (1728 pulgadas cúbicas)	=	0'021796.
1	cuartillo para líquidos	=	0'456264. (litros)
1	cuartillo para aceite	=	0'506162.

1 metro cúbico = 1'699292. (v. cub)
1 litro = 2'191716. (cuartillo de liq.)
1 litro = 1'975651. (cuartillo de aceite.)

Medidas de capacidad para granos.

1	carga (2 fanegas)	=	181'629775 (litros.)
1	fanega (48 cuartillos)	=	90'814888.
1	cuartillo (150 pulgadas cúbicas)	=	1'891977.

1 hectolitro = 0'550571 cargas.

Medidas para manantiales y mercedes de agua.

1	buey (48 surcos)	=	9543'661056. (litro por minuto.)
1	surco (432 pajas)	=	198'826262.
1	paja (1 libra por minuto)	=	0'460246. (*)

1 litro de agua por minuto = 2'172749 (pajas) de á una libra.

Medidas de peso.

1	quintal (4 arrobas)	=	46'024634. (kil.)
1	arroba (25 libras)	=	11'506159.
1	libra (16 onzas)	=	0'460246.
1	onza (576 granos)	=	0'028765.
1	grano	=	0'050. (gramos.)

1 kilogramo = 2'172749 libras.
1 gramo = 20 granos.

(*) Por la ley de 2 de Agosto de 1861, la paja es igual á 0'45 de litro por minuto; pero hemos creido preferible que las unidades de volumen de aguas queden relacionadas exactamente á las de peso, conforme á la base de que una paja produce en un minuto un cuartillo de agua de una libra, según lo ordenó el Virrey Revillagigedo, fundándose en las experiencias practicadas por Don Miguel Constansó en Mayo de 1792, base que debe aplicarse en los casos de títulos y documentos anteriores á Agosto de 1861.

Monedas.

1	peso de plata	=	5'431. (francos)
1	peso de oro	=	5'100.
1	franco de plata	=	0'184. ($)
1	franco de oro	=	0'196.

Las anteriores relaciones entre las unidades lineales, de superficie, de volumen, de peso y de moneda del sistema métrico y las mexicanas, sirven para convertir unas en otras, y á fin de que los alumnos puedan hacer sin vacilación estas reducciones tan frecuentes en la práctica daremos la siguiente

Regla.—Cuando el número que expresa la equivalencia con la unidad *es heterogéneo con la cantidad que trata de convertirse, se multiplicará* esta por la equivalencia; pero cuando el número que expresa la equivalencia con la unidad *sea de la misma especie que la cantidad que va á reducirse, se dividirá* ésta por la equivalencia.

Por ejemplo, siendo una vara = 0'838 (m) se quiere reducir 22 varas á metros.

En este caso, siendo *heterogéneos* 0'838 (m) y 22 varas, *multiplicaremos* estos números para obtener que 22 varas equivalen á 18'436 (m).

Si se quieren convertir 30 varas en metros, sabiendo que un metro = 1'193 (v).

Como en este ejemplo 1'193 y 30 varas son cantidades *homogéneas, dividiremos* el último número por el primero para saber que 30 varas equivalen á 25'146 (m).

CALCULO DE LOS NUMEROS DENOMINADOS.

DEFINICIONES, PRINCIPIOS Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

187.—Definición.—*Se llaman números complexos ó denominados los que se componen de varias partes expresadas como números enteros y concretos de diferentes especies, pero relativas todas á una misma clase de unidades.* Por ejemplo: 3 varas, 2 pies y cinco pulgadas. La vara, los

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

pies y las pulgadas son partes que están expresadas en la forma de números enteros y concretos de diferentes especies entre sí, pero relativas todas á la clase de unidades lineales.

188.—Subdivisiones, nomenclatura y escritura.—El sistema de subdivisiones usado en el cálculo de los números complexos ó denominados, así como la nomenclatura, es convencional y variable en razón de las necesidades, de las costumbres y aún del capricho de los pueblos. En el párrafo 185 hemos explicado las unidades usadas en México, su nomenclatura y las subdivisiones de cada una.

En cuanto á la escritura, se indica separadamente cada una de las partes relativas á la clase de unidades que se considera como número entero, marcando su especie encima, por medio de un signo convencional ó por alguna abreviatura. Por ejemplo: 728 pesos, 6 reales, 4 tlacos se escriben así:

$$\overset{\$}{728}—\overset{rls.}{6}—\overset{tls.}{4}.$$

En cuanto al número de partes de que consta cada especie de unidades es necesario grabarlo en la memoria para ejecutar los cálculos correspondientes.

189.—Operaciones fundamentales.—Las de los números denominados son dos: reducir unidades de especie mayor á menor, y reducir unidades de especie menor á mayor.

Para reducir unidades de especie mayor á menor, siendo un uso de la multiplicación, *se multiplican las unidades de especie mayor por el número de unidades menores de que consta una mayor, y se agregan á este producto las unidades de su especie.*

Por ejemplo: sea por reducir á onzas.....

	qq	@	lb	onz.
	32	2	20	4

Se multiplicarán los quintales por 4 para reducirlos á arrobas y se le agregará 2 arrobas al producto. Siendo 32 quintales, 2 arrobas, igual á 130 arrobas. Este número se multiplicará por 25 para reducirlo á libras y se le agregará 20 libras; siendo 32 quintales, 2 arrobas, 20 libras=3270 libras; este número se multiplicará por 16 para reducirlo á onzas y se agregarán 4 onzas al producto.

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline @\ 130 \\ 25 \\ \hline 650 \\ 260 \\ \hline lb\ 3270 \times 16 \\ 19624 \\ \hline 52324\ \text{onzas.} \end{array}$$

Resulta que:

32 qq. 2 @—20 lb—4 onzas=52324 onzas.

Para reducir unidades de especie menor á mayor; siendo éste un uso de la división, *se dividen las unidades menores por el número de estas de que se compone una mayor, el cociente indica el número de unidades mayores, y la resta el de las menores.*

Por ejemplo, se quiere reducir á varas 589 pulgadas.

pulgs. 589	12		
109	pies 49	3	
1	19	16	vs.
	1		

Dividiendo 589 pulgadas entre 12 se obtienen 49 pies una pulgada. Los 49 pies los reduciremos á varas, dividiéndolos por 3, y se obtienen 16 varas y 1 pie.

En definitiva, resulta que:

589 pulgadas = 16 varas—1 pie—1 pulgada.

190.—Conversión de los denominados en quebrados y en decimales y recíprocamente.—Los problemas que frecuentemente se ofrecen entre los números quebrados, decimales y denominados, ya para ejecutar las operaciones, ya para expresar el resultado de ellas en la forma conveniente, son cuatro: 1º convertir un denominado en quebrado; 2º, un quebrado en denominado; 3º, un denominado en decimal; y 4º, un decimal en denominado.

1º *Para convertir un número denominado en quebrado, se reduce á la especie menor y se le pone por denominador el número de unidades menores de que se compone la mayor.*

Si se quiere convertir en quebrado 36 h.—48 m.—40 s., se reducirán las horas á minutos y éstos á segundos, resultando 132520 segundos y á éste número se le dará por denominador el número de segundos que tiene una hora, esto es, 3600, y se tendrá:

h.	m.	s.
36—	48—	40
	60	
	2208	
	60	
	132520	

36 h.—48 m.—40 s.=$\frac{132520}{3600}$ horas.

El fundamento de esta regla es que el valor del denominado no se ha alterado al reducirlo á unidades de especie menor, y que como el denominador de un quebrado indica el número de partes en que está dividida la unidad, el número de unidades menores de que consta una mayor, deberá ser el denominador del quebrado.

2º *Para convertir un quebrado en denominado, se divide el numerador por el denominador, y si hay resta se valúa* (151) *en la subdivisión de la unidad á que se refiere, continuando así la operación.*

Por ejemplo, si se quiere transformar en denominado el quebrado $\frac{7}{12}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

de barril, se ejecutarán las operaciones que constan al lado:

875 | 325
225 | 2 bars.—6 jarras,—4 cuarts.
9
2025
75×18
600
1350
50

y resulta que:

barril. bars. js. cs.
$\frac{875}{325} = 2 - 6 - 4\frac{2}{11}$

Como convertir un quebrado en denominado es valuarlo, el fundamento de esta operación es el que hemos dado (151) al tratar de la valuación de los quebrados, y que consiste en servirse de la multiplicación para reducir unidades de especie mayor á menor y en extraer los enteros de un quebrado impropio dividiendo el numerador por el denominador.

3º *Para convertir un denominado en decimal, se transforma primero el denominado en quebrado, y en seguida éste en decimal.*

Por ejemplo, se quiere convertir en decimal: $8^{\$}—4^{rs.}—4^{tis.}$

Se convertirá primero en quebrado resultando $\frac{548^{\$}}{64}$ En seguida se transforma este quebrado en decimal resultando igual á $ 8'5625. Siendo el valor del denominado igual al del quebrado, y el de éste á la decimal, en el caso de que nos ocupamos.

$8^{\$}—4^{rs.}—4^{tis.} = 8'5625$

$ rs. tis.
8—4—4
8
68
8
$548^{tis} = \frac{548^{\$}}{64}$

548 | 64
360 | $ 8'5625
400
160
320
00

* (Simplificación). —Cuando el denominado que quiere transformarse en decimal, sólo consta de dos clases de unidades, la operación puede simplificarse, multiplicando las subdivisiones del denominado por el número de centésimos á que sea igual cada subdivisión.

Por ejemplo, si se quiere transformar en decimal 7@—16 lb, bastará observar que una libra $=\frac{1}{25}$ arroba, y que $\frac{1}{25}=0'04$, por lo cual multiplicando 16 lb. por 4=64, se tiene que:

@
7@—16 lb=7'64

2º Ejemplo.—Se quiere transformar 15 lb—10 onzas en decimal. Como 1 onza$=\frac{1}{16}$ lb y $\frac{1}{16}=0'06\frac{1}{4}$, multiplicaremos $10^{onzas}\times 6\frac{1}{4}=62\frac{5}{16}$ y se tendrá:

lb
$15^{lb.}—10^{onz} = 15'625$.

Para ejecutar esta simplificación en los casos más frecuentes, los alumnos pueden recordar las siguientes relaciones:

$\frac{1}{2} = 50$ centésimos
$\frac{1}{4} = 25$ „
$\frac{1}{8} = 12\frac{1}{2}$ „
$\frac{1}{12} = 8\frac{1}{3}$ „
$\frac{1}{16} = 6\frac{1}{4}$ „
$\frac{1}{25} = 4$ „

4º *Para convertir una cantidad decimal en denominado, se tomará la parte entera con su especie, y la parte decimal se multiplicará por el número de subdivisiones de que conste la unidad á que corresponde, separando en el producto igual número de cifras decimales. En este resultado se tomará la parte entera con su especie y la decimal se multiplicará por el número de subdivisiones de la unidad á que corresponde, y así se continuará la operación hasta llegar á la última subdivisión.*

Por ejemplo, se quiere transformar en número complexo, $135'8675^{marcos}$

marcos
135'8675
8
onzas 6'9400
8
ochavas 7'52
6
tomines 3'12×12
24
granos 1'44

Tomaremos desde luego la parte entera 135 marcos, y reduciremos á onzas la parte 0'8675 multiplicándola por 8, lo que da 6 onzas y 94 centésimas. La parte decimal la reducimos á ochavas; 0'52 de ochava los reducimos á tomines, y por último, 12 centésimas de tomines las reducimos á granos. Obteniéndose que:

Marcos Marcos Ons. Och. Ts. Gr.
$135'8675 = 135 — 6 — 7 — 3 — 1'44$.

Esta operación tiene por fundamento que es un uso de la multiplicación reducir unidades de especie mayor á menor.

ADICION DE LOS DENOMINADOS.

191.—Regla.—*Para sumar los números denominados, se colocan las cantidades unas debajo de otras, lo mismo que en los enteros, teniendo cuidado de poner separadamente cada especie de unidades formando una columna vertical. Se tira una línea horizontal para separar el resultado, y*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

se comienza la operación por las unidades de especie menor; si la suma no consta del número de unidades que componen una mayor, se escribe la suma debajo de la columna de su especie; y en caso contrario, se reduce la suma á la especie inmediata mayor, escribiéndose el número de unidades menores que queden, como resta en la división, debajo de la columna correspondiente; y se retienen las unidades mayores para unirlas á las de su especie. Con cada clase de unidades se repite la misma operación, y en las de mayor especie se escribe la suma tal como sale.

Sean por sumar las siguientes cantidades:

Cargas.	fs.	almds.	cts	
345	— 1 —	9	— 3	
200	— 0 —	10	— 2	
175	— 1 —	8	— 2	
875	— 1 —	6	— 1	
100	— 0 —	9	— 2	16 cuartillos = 4 almudes.
50	— 1 —	3	— 1	62 almudes = 5 fs.—2 alms.
90	— 1 —	2	— 2	11 fanegas = 5 cgs.—1 fs.
162	— 1 —	11	— 3	
2002	— 1 —	2	— 0	

Se comienza la operación sumando los cuartillos, lo cual da 16 cuartillos; y como un almud se compone de 4 cuartillos, dividiendo 16 por 4, se obtienen 4 almudes, que se retienen para reunirlos á la columna de los almudes, y se pone 0 en la de los cuartillos.

Sumando los 4 almudes retenidos con la columna correspondiente, se obtienen 62 almudes, que se reducen á fanegas dividiendo por 12, de lo que resultan 2 almudes que se escriben debajo, y 5 fanegas que se agregan á la columna correspondiente. La suma de las fanegas da 11, que reducidas á cargas, dan 5 cargas y 1 fanega. Este último número se escribe en la columna que le corresponde, y las 5 cargas se agregan á las unidades de esta especie, cuya suma es 2002 cargas y la suma total es:

2002 cargas—1 fanega—2 almudes.

La prueba de esta operación se hace como la de los enteros, repitiéndola en sentido contrario, esto es, si se sumó de arriba para abajo, se suma de abajo para arriba, y debe obtenerse el mismo resultado; ó se dividen los sumandos cuando son muchos en varias porciones, se hace la suma de cada porción, y en seguida se suman las sumas parciales, debiéndose obtener un resultado igual al primero, si no se ha cometido ninguna equivocación.

SUBSTRACCION DE LOS DENOMINADOS.

192.—Regla.—*Para restar los números denominados, se colocan las cantidades unas debajo de otras, lo mismo que en los enteros, teniendo cuidado de poner separadamente cada especie y las del substraendo debajo de las correspondientes del minuendo. Se tira una linea horizontal y se comienza á ejecutar la resta por las unidades de menor especie, restando cada parte del substraendo de la superior del minuendo. Cuando alguna de las partes del substraendo es mayor que la correspondiente del minuendo para poder ejecutar la resta, se agrega al minuendo una unidad de la especie inmediata mayor reducida á la menor, y para no alterar el valor de la diferencia, se le agrega una unidad á la parte inmediata mayor del substraendo, al continuar la operación.*

Sea como primer ejemplo encontrar la diferencia entre

Surcos.	Naranjas.	Reales.	Pajas.
36	— 2 —	6	— 16
24	— 2 —	5	— 8
12	— 0 —	1	— 8

Como cada parte del substraendo en este ejemplo ha sido menor que la correspondiente del minuendo, se ha ejecutado la substracción haciendo uso de la primera parte de la regla.

Sea como segundo ejemplo encontrar la diferencia entre

2078 $	—4 rs.	— 5 tls.	
894	—6	— 6	
1183	—5	— 7	

Aquí, como de 5 tlacos no se puede restar 6, se le agrega á la parte 5 tlacos del minuendo un real reducido á tlacos, y la diferencia de 6 á 13 tlacos, que es 7, se escribe debajo, reteniéndose un real para agregarlo á los reales del substraendo y no alterar la diferencia. Así se dice: 6 y 1 son 7, que no pudiendo restarse de 4, se le agrega á este último número un peso reducido á reales, y la diferencia 5 entre 7 y 12 reales se escribe debajo, reteniendo un peso para agregarlo á los pesos del substraendo al continuar la operación. Así se dice; 4 y 1 son 5, á 8, la di-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ferencia es 3; de 9 á 17, 8 y va 1; de 9 á 10, 1 y va 1, á 2, la diferencia es 1. La diferencia total es 1183 $—5 rs.—7 tlacos.

La prueba de esta operación se ejecuta como la de enteros, sumando el substraendo con la resta, y cuando no se ha cometido equivocación, la suma debe ser igual al minuendo.

MULTIPLICACION DE LOS DENOMINADOS.

193.—Regla general.—La multiplicación de denominados se ejecuta de dos modos: transformándolos en quebrados, ó por partes alicuotas.

Para multiplicar un denominado por otro, primero se convierten el multiplicando y el multiplicador en quebrados; segundo, se multiplican los quebrados; y tercero, se transforma el quebrado que resulta en denominado valuándolo en la especie de las unidades de que deba ser el producto.

Antes de multiplicar los quebrados, se abrevian cuando es posible.

Por ejemplo: se quiere saber cuánto valdrán 32@ 8 lb., 12 onzas de cobre á razón de 7 $—2 rs.—4 tlacos la arroba.

La operación se dispone como sigue:

@	lb	onzs.		$	rs.	tls.
32	—8	—12		×7	—2	—4
25				8		
160				58		
648				8		
808 × 16				468		
4848						
12						
12940						

$$\frac{647}{400}\times\frac{117}{64}=\frac{647\times117^{3}}{20\times16}=236^{3}-4^{rs}-3^{tls}.\ \frac{4}{5}$$

$$647\times117$$

647		
4529		4
7569(9	32(0	32
116	236—4—3+	256
209		320
179		40
8		5
1432		
152		
1216		
256		

Después de haber reducido el multiplicando y el multiplicador á su menor especie, se convierten en los quebrados $\frac{12940}{400}$ de arroba, y $\frac{468}{64}$ de peso. Estos quebrados se abrevian y se multiplican $\frac{647}{20}$ @ por $\frac{117}{16}$ $. Como el producto debe expresar pesos, al quebrado que resulta de la multiplicación se le sacan los enteros y se valúa en reales y en tlacos; obteniéndose que el valor del cobre es

236 $—4 rs.—3 tlacos $\frac{4}{5}$

Después de haber convertido los denominados en quebrados, la multiplicación de éstos también puede hacerse transformándolos en decimales.

Cuando el multiplicador, además de ser incomplexo, solo consta de unidades, se abrevia la operación comenzando la multiplicación por las unidades de especie menor, y se determina, lo mismo que en la suma, el número de unidades de la especie inmediata mayor y de la menor, que contenga el producto; éstas últimas se escriben debajo de las de su especie y las primeras se retienen en la memoria para reunirlas al producto del multiplicador por las unidades de la especie inmediata mayor, continuándose así la operación hasta las unidades del orden mayor.

Sea como ejemplo averiguar el valor de 6 varas á razón de 25 pesos —3 reales—9 granos. La operación se dispone y ejecuta como sigue:

$	rs.	gs.
25	—3	—9
6		
$ 152	—6	—6

Se comienza multiplicando 6 por 9 granos=54 granos=4 reales y 6 granos. Se escriben los 6 granos y se retienen los 4 reales. Multiplicando 6 por 3 reales se obtienen 18, y 4, son 22 reales=2$ que se retie-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

nen, y 6 reales que se ponen en el lugar correspondiente. Por último, se multiplica 6 por 25$ y se agregan al producto los dos pesos retenidos, siendo el valor de las 6 varas.

152 $—6 reales—6 granos.

Esta operación es realmente una suma abreviada.

194.—Multiplicación de los denominados por partes alícuotas.—*Se llaman partes alícuotas de un denominado aquellas en que puede descomponerse y que respectivamente son equivalentes á quebrados de la especie inmediata mayor que tienen por numerador la unidad.*

Por ejemplo: 7 rs. es igual á 4 rs.+2+1 real=$\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$ siendo estas tres últimas fracciones de la unidad inmediata mayor las partes alícuotas en que se pueden descomponer 7 reales. Muchas veces las alícuotas son relativas; así, en el ejemplo anterior estando compuesto 7 reales de 4+2+1 real, se tiene que 4 reales es la mitad de un peso; 2 reales es igual á la mitad de 4 reales; y un real es la mitad de 2 reales.

El conocimiento de los factores primos de que consta un número, es de gran auxilio para la determinación de las partes alicuotas de los denominados. Cuando la unidad está dividida en 25 partes, como la arroba, las partes alicuotas se determinan de 5 en 5 y de 1 en 1 subdivisión. Cuando la unidad está subdividida en 16 partes, se buscan partes alícuotas compuestas de 8, 4, 2 y 1 subdivisiones. Cuando la unidad consta de 12 subdivisiones, las partes alícuotas se componen de 6, 3, 4, 2 y 1. Y cuando la unidad consta de 8 subdivisiones, las partes alícuotas se componen de 4, de 2 y de 1 subdivisiones.

Para la multiplicación de los denominados por partes alícuotas, es conveniente distinguir dos casos: 1º, *cuando el multiplicador es incomplexo;* 2º *cuando el multiplicador es complexo.*

Primer caso.—*Cuando el multiplicador es incomplexo, se multiplica primero por las unidades de especie mayor del multiplicando, como números enteros; y en seguida por cada una de las partes del multiplicando descompuesta en sus alícuotas.*

En la multiplicación de los denominados es indispensable determinar cuál de los dos factores es el multiplicando, que como se sabe, es el término de la especie que se busca en el resultado, pues de esta misma especie deben ser los productos parciales.

Por ejemplo, se quiere saber cuánto valdrán 285 libras de vainilla á razón de 15$ 6 rs. 4 tlacos la libra. Supuesto que el resultado que se busca ha de expresar pesos, la última cantidad será el multiplicando, y la operación se dispone y ejecuta como sigue:

15 $—6 rs.—4 tls.
285

75	libras
120	285 × 15 $
30	
142—4	285 × 4 rs.
71—2	285 × 2 rs.
17—6—4	285 × 4 tls.

$ rs. tls.
4506—4—4

La ejecución de la operación debe concebirse de esta manera: si cada libra valiera solo 15 pesos, el valor de 285 libras sería el producto de estos dos números; pero como la libra vale 15 pesos—6 rs.—4 tlacos, es preciso agregar al producto anterior el valor de 285 libras á razón de 6 reales 4 tlacos. *Si la libra valiera un peso,* 285 *libras valdrían* 285 *pesos,* y de este valor, que *es un producto auxiliar,* deduciremos el de las mismas libras á 6 reales 4 tlacos. Descomponemos primero 6 reales en sus partes alicuotas, 4=$\frac{1}{2}$ de peso, y 2 reales=$\frac{1}{2}$ de 4 reales: y decimos, que supuesto que 285 libras á 1 peso valen 285 pesos, las mismas 285 libras á 4 reales, valdrán la mitad de 285 pesos, esto es, 142 pesos 4 reales, segundo producto parcial. Si 285 libras á 4 reales valen 142 pesos 4 reales, á 2 reales valdrán la mitad de esta cantidad, esto es, 71 pesos 2 reales. A razón de 4 tlacos, que es la cuarta parte de 2 reales, valdrán la cuarta parte de esta cantidad, esto es, 17 pesos—6 reales—4 tlacos. Y en consecuencia, el valor de las 285 libras á razón de 15 pesos—6 reales—4 tlacos, es la suma de los productos parciales, igual á 4506 pesos—4 reales—4 tlacos.

2º caso.—*Cuando el multiplicador es complexo, se ejecuta la operación como si fuera incomplexo, conforme á la regla dada para el primer caso, prescindiendo al principio de las unidades de menor especie que acompañan al multiplicador. En seguida se descomponen las unidades menores del multiplicador en sus partes alícuotas y se multiplica todo el multiplicando sucesivamente por cada una de ellas. Sumando los productos parciales, se tendrá el total.*

Sea como ejemplo determinar el valor de 425 varas—2 pies—5 pulgadas á razón de 36 pesos—5 reales—10 granos. Siendo esta última cantidad el multiplicando, la operación se ejecuta como sigue:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

36$ —5rs. —10gs.
425vs. —2ps. —5ps.

180
72
144

Valor de 425 vs. á 36$ .....15,300$
" id. á 4 rs. ..... 212—4 rs.
" id. á 1 rl. ..... 53—1 gs.
" id. á 6 gs. ..... 26—4—6
" id. á 3 gs. ..... 13—2—3
" id. á 1 gs. ..... 4—3—5

Valor de 425vs. á 36$ 5rs. 10gs. .....15,609—7— 2
Idem de 1 pie á id. ..... 12—1—11 $\frac{1}{3}$ $\frac{12}{36}$
Idem de 1 pie á id. ..... 12—1—11 $\frac{1}{3}$ $\frac{12}{36}$
Idem de 4 pulgadas á id. ..... 4—0— 7 $\frac{7}{9}$ $\frac{28}{36}$
Idem de 1 pulgada á id. ..... 1—0— 1 $\frac{34}{36}$ $\frac{34}{36}$

Valor de 425vs. 2p 5ps. á 36$ 5rs 10gs.=15,639$—3rs.—10gs. $\frac{17}{36}$ $\frac{86}{36}$=2+$\frac{14}{36}$

Al principio hemos prescindido de los 2 pies 5 pulgadas que acompañan al multiplicador, y después de haber hallado conforme á la regla del primer caso el valor de sólo 425 varas, (valor que para mayor claridad hemos sumado y es igual á 15,609 pesos—7 reales—2 granos) nos ocupamos en determinar el valor de las partes del multiplicador. Supuesto que una vara vale 36 pesos—5 reales—10 granos, un pie valdrá la tercera parte de esta cantidad, y 2 pies valdrán dos veces 12 pesos—1 real—11 granos $\frac{1}{3}$. Respecto á las 5 pulgadas, las descomponemos en las partes: 4 pulgadas=$\frac{1}{3}$ de pie, y 1 pulgada=$\frac{1}{4}$ de 4 pulgadas, por lo que tomamos primero la tercera parte del valor de un pie, y en seguida la cuarta parte del valor de 4 pulgadas.

Debe observarse que las partes de la última subdivisión se estiman en fracciones comunes; y que para dividir estas fracciones se sigue el método de multiplicar su denominador por el divisor; así por ejemplo al concluir de tomar la tercera parte de 12$—1rl.—11gs $\frac{1}{3}$, decimos: tercera de 23 granos son 7 y sobran 2 granos que debemos sumar con $\frac{1}{3}$ de grano; 2 por 3 son 6 y 1, $\frac{7}{3}$; tercera de $\frac{7}{3}$ son $\frac{7}{9}$, que es lo que se escribe. Por último, estas fracciones se suman reduciéndolas á un común denominador buscando su menor múltiplo común.

Sucede á veces en la multiplicación de partes alicuotas, que una de éstas tiene un denominador muy grande, y en este caso se toma un producto auxiliar que se tiene cuidado de no sumar, como lo explicaremos en el ejemplo siguiente:

$425—6 rs.—4 tlacos.
35@ 10 lb. 2 onz. 2 adrs.

2125
1275

14875 $..... Valor de 35 @ á $425
17—4 rs..... id. á 4 rs=$\frac{1}{2}$ de $ 35
8—6 .... id. á 2 id.
2—1—4 tls. id. 4 tlacos=$\frac{1}{4}$ de $ 8—6 rs.

14903—3—4.... Valor de 35 @ á 425 $ 6 rs. 4 tlacos.
85—1—2$\frac{2}{5}$...$\frac{640}{1600}$ Valor de 5 lb.=$\frac{1}{5}$ de 425 $ 6 rs. 4 tlacos.
85—1—2$\frac{2}{5}$...$\frac{640}{1600}$ Valor de 5 lb.

17—0—2 $\frac{2}{25}$ Idem de 1 lb. *Producto auxiliar.*

2—1—0$\frac{52}{200}$..$\frac{416}{1600}$ Idem de 2 onz.=$\frac{1}{8}$ de $17—0 rs. 2 $\frac{2}{25}$ tls.

1—0—4$\frac{26}{200}$ Idem de 1 onz. *Producto auxiliar.*

0—1—0$\frac{826}{1600}$..$\frac{826}{1600}$ Idem de 2 adrs.=$\frac{1}{8}$ de $ 1—0—4 tls. $\frac{26}{200}$

$15076—0rs—1$\frac{922}{1600}$...$\frac{2522}{1600}$=1+$\frac{922}{1600}$

Después de haber determinado el producto parcial $ 85—1 rl. 2 tls.$\frac{2}{5}$ valor de 5 libras, para determinar el de 2 onzas, como esta cantidad es $\frac{1}{10}$ de 5 libras, para evitar lo molesto que seria tomar á la memoria la 40 ava parte del anterior producto, se determina uno auxiliar—el de una libra—del cual ya es fácil deducir el valor de 2 onzas; pero se tiene cuidado de tachar el producto auxiliar para no sumarlo. Igualmente para deducir del valor de 2 onzas el de 2 adarmes, se toma el producto auxiliar de una onza, que también hemos señalado para no sumarlo.

La prueba de esta operación comunmente se hace verificando el resultado de un método por el otro; pero puede igualmente tomarse la mitad de un factor para obtenerse la mitad del producto si no ha habido error en la multiplicación ó en su prueba.

En la multiplicación de los complexos es preciso fijar cuál de los factores es el multiplicando para valuar los productos parciales y el total en la especie de unidades que les corresponde conforme á la naturaleza de la cuestión; pero si se transforman los denominados en quebrados ó en decimales, el valor abstracto del producto no se altera aun cuando se invierta el orden de los factores.

DIVISION DE LOS DENOMINADOS.

195.—Regla general.—*Para dividir un denominado por otro: 1°, se convierten el dividendo y el divisor en quebrados: 2°, se dividen estos quebrados; y 3°, se transforma el quebrado que resulta en denominado, valuándolo en la especie de unidades que deba expresar el cociente.*

Antes de dividir los quebrados, se abrevian cuando es posible.

Por ejemplo, se han pagado 845$—4 rs.—2 tlacos por 105 marcos—6 onzas—4 ochavas—4 tomines de plata, y se quiere conocer el valor del marco.

La operación se ejecutará como sigue:

$$845^{\$}—4^{rs.}—2^{tls.} \div 105^{mcos.}—6^{onz.}—4^{och.}—4^{toms.}$$

```
   8              8
 6764           846
    8             8
54114          6772
                  6
              40636
```

$$\frac{\overset{27057}{54114}}{\underset{32}{64}} \div \frac{\overset{10159}{40636}}{\underset{96}{384}} = \frac{27057 \times \overset{\overset{3}{12}}{96}}{10159 \times \underset{\underset{1}{4}}{32}} = \frac{81171}{10159}\$ = 7^{\$}—7^{rs.}—7^{tls.} + \frac{3695}{10159}$$

```
 27057
     3
 81171 | 10159
 10058 | 7$—7rs.—7tls.
     8 |
 80464
  9351
 74808
  3695
```

196.—Distinguiremos en la división de denominados, *el caso en que siendo el dividendo de la especie que se busca en el cociente, el divisor es incomplexo.*

En este caso, la división se dispone como la de enteros y se comienzan á dividir las unidades de mayor especie del dividendo por el divisor; la resta se reduce á especie menor agregándole las de igual clase del dividendo, y el resultado se divide por el divisor, repitiéndose esta operación con la resta hasta llegar á la última subdivisión.

Por ejemplo: por una pieza de oro que pesa 125 marcos se han pagado 16974$—3 rs.—3 tls., y se quiere determinar el valor del marco. La operación se dispone y ejecuta como sigue:

```
16974$—3rs.—3tls. | 125mcos.
  447             | 135$—6rs.—2tls. 113/125 valor del marco de oro.
   724
    99
     8
   795
    45
     8
   363
   113
```

La prueba de la división puede hacerse multiplicando el cociente por el divisor, y agregando la resta, el producto deberá ser igual al dividendo; ó bien, se dividen el dividendo y el divisor por un mismo número, y el nuevo cociente deberá ser igual al anterior.

Nota.—*Todas las operaciones de los números complexos, pueden ejecutarse convirtiéndolos préviamente en decimales.*

* (197).—Observaciones sobre el cálculo de los denominados.—Los números denominados ó complexos, tienen sus denominadores sobrentendidos lo mismo que los decimales; pero además de ser diferentes para cada especie de unidad, el denominador es variable de una á otra subdivisión, por lo cual los denominados vienen á ser reuniones de fracciones relativas unas á otras, cuyos denominadores es indispensable conocer de memoria para poder ejecutar las operaciones.

Para el cálculo de denominados, tenemos como operaciones fundamentales, la reducción de unidades de especie mayor á menor ó viceversa, y las conversiones de los complexos en quebrados y en decimales y recíprocamente.

La suma y la resta se ejecutan como en los enteros, por partes. La multiplicación y la división, por regla general, se ejecutan transformando préviamente los denominados en quebrados. La multiplicación también se ejecuta por partes, haciéndose uso de las alícuotas. Tanto en la multiplicación como en la división, importa conocer bien por la cuestión la especie del resultado que se busca para valuar en ella el quebrado obtenido, ó para señalar la especie de los productos parciales en la multiplicación por partes alícuotas.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Los resultados de las operaciones de los denominados son exactos, lo mismo que los de los quebrados, á diferencia de los de las decimales, que la mayor parte de las veces sólo son aproximados.

ELEVACION A POTENCIAS Y EXTRACCION DE RAICES.

198.—Potencia de los números.—Definición.—*Se llama potencia de un número, el producto que resulta de multiplicarlo una ó varias veces por sí mismo.*—Por ejemplo, si $9=3\times3$, 9 será una potencia de 3; y si $27=3\times3\times3$, 27 será igualmente otra potencia de 3.

El grado de la potencia lo indica el número de factores iguales que forman el producto; así 9 es la segunda potencia, y 27 es la tercera potencia del número 3.

Multiplicando sucesivamente por sí mismos varias veces los números que representan las unidades, formaremos las segundas, terceras, etc., potencias de estos números cuyos resultados constan en la siguiente tabla.

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª potencia
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

De estos números es útil saber de memoria los correspondientes á la 2ª y 3ª potencia.

A la 2ª *potencia* se le llama *cuadrado*, y á la 3ª *potencia, cubo.*

La elevación á una potencia se indica poniendo un poco arriba y á

la derecha de la cantidad un número más pequeño que sirve para expresar su grado, y se llama *exponente.*

Por ejemplo, 56 elevado á la 4ª potencia se escribe así: 56^4, siendo el número 4 el que indica el grado de ésta. La cantidad suele ponerse debajo de una raya ó dentro de un paréntesis así; $\overline{1087}^3$, ó $(1087)^3$.

Definición.—*Se llama exponente el número que indica cuántas veces una cantidad entra como factor en el producto.*

$$56^4=56\times56\times56\times56$$

Regla.—*Para elevar una cantidad á una potencia, se multiplica por sí misma tantas veces como unidades tiene el exponente de la potencia menos una.* El número de factores es igual al exponente, y el de multiplicaciones es una unidad menos.

Cuando se trata de una potencia superior, se descompone, cuando es posible, el exponente en varios sumandos, iguales entre sí; se eleva sucesivamente la cantidad á las potencias indicadas por cada uno de los sumandos, y en seguida se multiplican entre sí los resultados obtenidos.

Por ejemplo, se quiere elevar el número 20 á la 13ª potencia. Como $13=4+4+4+1$, tendremos que

$$20^{13}=20^4\times20^4\times20^4\times20$$

y para obtener el primer factor 20^4, observaremos que es igual á $20^2\times20^2$, con lo cual se economizan algunas multiplicaciones y el resultado se obtiene con más facilidad.

La razón de esta regla es, que buscándose el valor de un producto en el que la cantidad 20 entre 13 veces como factor, lo mismo es formar ese producto por multiplicaciones sucesivas del mismo factor, que por multiplicaciones de resultados que contengan á 20 varias veces como factor. Por ejemplo:

$$20^5=20\times20\times20\times20\times20=(20\times20\times20)\times(20\times20)=20^3\times20^2$$

luego

$$20^5=20^3\times20^2$$

Para elevar un quebrado á una potencia, se elevan por separado el numerador y el denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador

$$\left(\tfrac{2}{5}\right)^3=\tfrac{2}{5}\times\tfrac{2}{5}\times\tfrac{2}{5}=\frac{2\times2\times2}{5\times5\times5}=\frac{2^3}{5^3}=\tfrac{8}{125}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Los resultados de las operaciones de los denominados son exactos, lo mismo que los de los quebrados, á diferencia de los de las decimales, que la mayor parte de las veces sólo son aproximados.

ELEVACION A POTENCIAS Y EXTRACCION DE RAICES.

198.—Potencia de los números.—Definición.—*Se llama potencia de un número, el producto que resulta de multiplicarlo una ó varias veces por sí mismo.*—Por ejemplo, si $9=3\times3$, 9 será una potencia de 3; y si $27=3\times3\times3$, 27 será igualmente otra potencia de 3.

El grado de la potencia lo indica el número de factores iguales que forman el producto; así 9 es la segunda potencia, y 27 es la tercera potencia del número 3.

Multiplicando sucesivamente por sí mismos varias veces los números que representan las unidades, formaremos las segundas, terceras, etc., potencias de estos números cuyos resultados constan en la siguiente tabla.

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª potencia
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

De estos números es útil saber de memoria los correspondientes á la 2ª y 3ª potencia.

A la 2ª *potencia* se le llama *cuadrado*, y á la 3ª *potencia, cubo.*

La elevación á una potencia se indica poniendo un poco arriba y á

la derecha de la cantidad un número más pequeño que sirve para expresar su grado, y se llama *exponente.*

Por ejemplo, 56 elevado á la 4ª potencia se escribe así: 56^4, siendo el número 4 el que indica el grado de ésta. La cantidad suele ponerse debajo de una raya ó dentro de un paréntesis así; $\overline{1087}^3$, ó $(1087)^3$.

Definición.—*Se llama exponente el número que indica cuántas veces una cantidad entra como factor en el producto.*

$$56^4=56\times56\times56\times56$$

Regla.—*Para elevar una cantidad á una potencia, se multiplica por sí misma tantas veces como unidades tiene el exponente de la potencia menos una.* El número de factores es igual al exponente, y el de multiplicaciones es una unidad menos.

Cuando se trata de una potencia superior, se descompone, cuando es posible, el exponente en varios sumandos, iguales entre sí; se eleva sucesivamente la cantidad á las potencias indicadas por cada uno de los sumandos, y en seguida se multiplican entre sí los resultados obtenidos.

Por ejemplo, se quiere elevar el número 20 á la 13ª potencia. Como $13=4+4+4+1$, tendremos que

$$20^{13}=20^4\times20^4\times20^4\times20$$

y para obtener el primer factor 20^4, observaremos que es igual á $20^2\times20^2$, con lo cual se economizan algunas multiplicaciones y el resultado se obtiene con más facilidad.

La razón de esta regla es, que buscándose el valor de un producto en el que la cantidad 20 entre 13 veces como factor, lo mismo es formar ese producto por multiplicaciones sucesivas del mismo factor, que por multiplicaciones de resultados que contengan á 20 varias veces como factor. Por ejemplo:

$$20^5=20\times20\times20\times20\times20=(20\times20\times20)\times(20\times20)=20^3\times20^2$$

luego

$$20^5=20^3\times20^2$$

Para elevar un quebrado á una potencia, se elevan por separado el numerador y el denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador

$$\left(\tfrac{2}{5}\right)^3=\tfrac{2}{5}\times\tfrac{2}{5}\times\tfrac{2}{5}=\frac{2\times2\times2}{5\times5\times5}=\frac{2^3}{5^3}=\tfrac{8}{125}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Conforme á lo que se explicó en el número (160), la potencia de un quebrado propio es menor que este quebrado; por esto, $\frac{8}{125}<\frac{2}{5}$.

Cuando se eleva una decimal ó un entero junto con decimales á una potencia, debe observarse que el número de decimales del resultado será igual al número de las que tiene la cantidad multiplicado por el exponente de la potencia. La razón de esto es, que en cada producto se separan tantas decimales como hay en ambos factores juntos (177).

Así, si se eleva 0'25 á la 2ª potencia, el resultado tendrá $2\times2=4$ cifras decimales. Si se eleva á la 3ª potencia el resultado tendrá 6 decimales, y si se eleva á la 5ª potencia, tendrá 10 decimales.

199.—Raíces y números inconmensurables.—Definición.—*Se llama raíz de una cantidad, el número que, multiplicado una ó varias veces por sí mismo, da por producto la cantidad propuesta.* Así, por ejemplo, 5 es la raíz cuadrada de 25, porque 5×5 produce 25. La raíz 3ª ó cúbica de 27 es 3, porque $3\times3\times3=27$.

En la tabla puesta al principio del párrafo anterior, los números que ocupan la primera columna, representan las raíces 2ª, 3ª y 4ª, etc., de los números puestos respectivamente en las columnas 2ª, 3ª y 4ª, etc.

La inspección de la tabla nos hace conocer, que la potencia de un número entero siempre es número entero; pero debemos advertir, que los números intermedios entre las potencias de dos números consecutivos, no tienen raíz exacta. Por ejemplo, el cuadrado de 5 es 25, el de 6, es 36, pues bien, la raíz de 30 será un número comprendido entre 5 y 6, la cual podrá obtenerse con cuanta aproximación sea necesaria, pero nunca será enteramente exacta, porque 5 más una fracción multiplicado por sí mismo, da por producto un número mixto, y no un número entero como 30. Así como la división de dos números enteros cuando no es exacta, conduce á la formación de los números fraccionarios, del mismo modo la extracción de la raíz de un número que no es potencia de otro entero, conduce á la formación de una nueva especie de números que se llaman *inconmensurables ó irracionales*, porque no se pueden medir exactamente con la unidad, y porque la relación que existe entre el número y su raíz, no puede expresarse por la de dos números enteros. Para que un número entero sea una potencia cabal de otro, es necesario que, descompuesto en sus factores primos, cada uno de estos resulte elevado á la misma potencia.

Para representar la operación de la extracción de la raíz de una cantidad, se usa el signo radical $\sqrt{\ }$ colocando debajo de la línea horizontal la cantidad, y entre las ramas el grado de la raíz por medio de un número que se llama índice. Así:

$$\sqrt[6]{64}=2$$

Se lee, raíz 6ª de 64 igual á 2, y significa que 64 es el producto en que 2 entra 6 veces como factor, esto es:

$$64=2\times2\times2\times2\times2\times2$$

Para comprobar que un número es raíz de otro, bastará dividir este por la raíz, así como los cocientes que sucesivamente vayan resultando hasta obtener la unidad como último cociente. El número de divisiones determina el grado de la raíz.

La raíz de un quebrado se obtiene extrayendo la del numerador y la del denominador, como operación inversa de la ejecutada al elevarlo á una potencia.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{2}{5}$$

La raíz de un entero junto con decimales, se extrae sacando primero la de los enteros y en seguida la de las decimales; teniendo cuidado de que el número de cifras decimales sea un múltiplo del índice del radical para lo que se agrega á la derecha de las decimales el número de ceros que es necesario.

CUADRADO Y RAIZ CUADRADA.

200.—Elevación de un número al cuadrado.—Definición.—*Se llama cuadrado de un número, el producto que resulta de multiplicarlo por sí mismo.* Por ejemplo, 64 es el cuadrado de 8, supuesto que $8\times8=64$.

La elevación de un número al cuadrado, se indica poniendo el exponente 2 arriba y á la derecha de la cantidad, la cual algunas veces se pone debajo de una raya y otras dentro de un paréntesis, de la manera siguiente:

$$25^2 \text{ ó } \overline{25}^2 \text{ ó } (25)^2=625$$

Para elevar un número al cuadrado, basta multiplicarlo por sí mismo. Si el número es entero, su cuadrado será también número entero. Si el número es un quebrado, para obtener el cuadrado se elevará por separado el numerador y el denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador; en este caso, el resultado es quebrado, y además, es

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

menor que el quebrado que se eleva al cuadrado, porque el producto de los quebrados propios es menor que cualquiera de los factores (160).

Si el número que se eleva es mixto, su cuadrado también lo será: y si está compuesto de enteros y decimales, el cuadrado constará en la parte decimal de un número de cifras decimales duplo de las de la cantidad. La razón de esto es, que siendo el cuadrado de un número el producto que resulta de multiplicarlo por sí mismo; y debiendo tener el producto de las decimales tantas cifras decimales como hay en ambos factores juntos, en nuestro caso, éstas serán un número doble de las que tenga la cantidad que se eleva al cuadrado.

Igual observación tiene que hacerse cuando la cantidad que se eleva al cuadrado sólo es decimal; el cuadrado consta de un número de cifras doble de las de la decimal, y su valor numérico es menor que el de la cantidad que se eleva al cuadrado. Como resumen de lo expuesto pondremos los siguientes ejemplos:

$25^2=625$ número entero mayor que 25.
$(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$ " quebrado menor que $\frac{3}{4}$.
$(2+\frac{3}{4})^2=7+\frac{9}{16}$ " mixto mayor que $2+\frac{3}{4}$
$(0{\cdot}04)^2=0{\cdot}0016$ " decimal, con doble número de cifras decimales y menor que 0'04.
$(3{\cdot}04)^2=9{\cdot}2416$ " mixto con doble número de cifras decimales y mayor que 3'04.

201.—Elevación al cuadrado de un número compuesto de decenas y de unidades.—Si queremos elevar al cuadrado el número $36=30+6$, su cuadrado será igual al producto que resulte de multiplicar $30+6$ por $30+6$ de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r} 30+6 \\ 30+6 \\ \hline 900=30\times 30 \text{ Cuadrado de las decenas} \\ 180=30\times 6 \\ 180=30\times 6 \end{array} \Big\} \text{Dos veces decenas por unidades.}$$
$$\begin{array}{r} 36=6\times 6 \text{ Cuadrado de las unidades.} \\ \hline 1296=30^2+2\times(30\times 6)+6^2 \end{array}$$
$$(d+u)^2=d^2+2\times(d\times u)+u^2$$

Al multiplicar 30 por 30, formamos el cuadrado de las decenas; al multiplicar 30 por 6, obtenemos un producto de decenas por unidades; al multiplicar 6 por 30, obtenemos otro producto de decenas por unidades, igual al anterior, y al multiplicar 6 por 6 formamos el cuadrado de las unidades.

En consecuencia, *el cuadrado de todo número compuesto de decenas y de unidades, consta de tres partidas:* 1ª *cuadrado de las decenas;* 2ª *doble producto de las decenas por las unidades, y* 3ª *cuadrado de las unidades.* *

El objeto con que se determinan las partidas de que se compone el cuadrado de un número, es el de tener un procedimiento general para determinar la raíz de un número y para poderla aproximar.

Debe observarse: 1°, que decenas cuadradas producen centenas, supuesto que estando terminado cada uno de los factores en un cero, el producto debe llevar dos ceros (71, 5° caso) esto es, debe expresar centenas; 2°, el doble producto de decenas por unidades, debe expresar decenas, supuesto que uno de los factores, las decenas, termina en un cero; y 3°, la tercera partida, el cuadrado de las unidades, siempre tiene unidades aunque conste de dos ó más guarismos.

La unidad elevada al cuadrado ó á cualquiera potencia, produce la unidad, y como $10^2=100$, resulta que los cuadrados de los números compuestos de un solo guarismo, esto es, menores que 10, están comprendidos entre 1 y 100. Como $100^2=10000$, resulta que los cuadrados de los números comprendidos entre 10 y 100, esto es, compuestos de dos cifras, estarán comprendidos entre 100 y 10000, tendrán 3 ó 4 cifras. Como $1000^2=1000000$, resulta que los cuadrados de los números de 3 cifras,

* La demostración de este principio, así como la de todos aquellos que se refieren más bien á la relación que al valor de las cantidades, se puede dar mejor haciendo uso de los signos algebráicos. Considerando todo número compuesto de decenas y unidades, si representamos por la letra d las decenas y por u las unidades, multiplicando $(d+u)$ por $(d+u)$, tendremos los productos parciales de que se compondrá el cuadrado de cualquier número formado de decenas y unidades. Ejecutando la multiplicación, tendremos:

$$\begin{array}{r} d+u \\ d+u \\ \hline d^2+d\times u+d\times u+u^2=d^2+2d\times u+u^2 \end{array}$$

luego
$$(d+u)^2=d^2+2d\times u+u^2$$

que son las tres partidas de que consta el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades.

Si en vez de descomponer un número en decenas y unidades lo descomponemos en dos partes, y representamos por d la primera parte y por u la segunda, multiplicándolo por sí mismo, generalizaremos el principio demostrado, diciendo que el cuadrado de un número consta: del cuadrado de la primera parte, más el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda. Por ejemplo:

$$(4+5)^2=4^2+2.4\times 5+5^2$$
$$(4+1)^2=4^2+2.4\times 1+1^2$$
$$(4+\tfrac{3}{8})^2=4^2+2.4\times\tfrac{3}{8}+(\tfrac{3}{8})^2$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

tendrán 5 ó 6 guarismos, y en general, conforme á la observación hecha al final del número 68, el cuadrado de un número cualquiera constará de un número doble de cifras de las que él tiene ó de una menos.

202.—Raíz cuadrada.—Definición.—*Se llama raíz cuadrada de un número á la cantidad que multiplicada por sí misma, produce el número propuesto.*

Por ejemplo, la raíz cuadrada de 81 es 9, supuesto que $9 \times 9 = 81$.

$\sqrt{7298}$: se lee, raíz cuadrada de 7,298.

203.—Ejemplo para extraer la raíz cuadrada.—El método natural para encontrar una raíz cuadrada, sería ir formando los productos sucesivos de todos los números, unidad por unidad, hasta encontrar el cuadrado del número que más se aproximara al propuesto; pero además de lo penoso de este método, sería ineficaz para las aproximaciones, por lo cual, una vez determinadas las partidas de que consta el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades, se prefiere buscar un número, la suma de cuyas partidas se aproxime más al número dado.

Si se trata de conocer la raíz cuadrada de la cantidad 55298, la operación se dispondrá y ejecutará como sigue:

	$\sqrt{5,52,98}$	235	$\sqrt{5,52,98}$	235
2^2	—4	43	15,2	43
	15,2	465	239,8	465
3×43	—129		73	
	239,8			
5×465	—2325			
	73			

1ª resta..... $23 < 2 \times 23$
2ª resta..... $73 < 2 \times 235$

Dividida la cantidad en períodos de dos en dos guarismos, se busca el mayor cuadrado contenido en 5, que es 4, cuya raíz es 2. El cuadrado de este número, restado de 5 da 1 por resta, á cuyo lado bajamos el período 52. Separamos el último guarismo 2; duplicamos la raíz y escribimos este duplo, 4, debajo de ella; dividimos 15 entre 4, y el cociente 3 lo escribimos al lado del 4 y de la raíz 2. El cociente 3 se multiplica por 43, cantidad formada con el duplo de las decenas de la raíz y sus unidades, y el producto 129 se resta de 152. Al lado de la resta 23, bajamos el período 98: separando el guarismo 8 dividimos 239 entre 46, duplo de la raíz; y el cociente 5 lo ponemos al lado de 23 y de 46. En seguida multiplicamos las 5 unidades de la raíz por 465, número formado con el duplo de 23 (decenas de la raíz), más 5 unidades y el producto lo restamos de 2398, quedando la resta 73.

Este resultado nos indica que la raíz cuadrada de 55298 no es un número exacto, estando comprendida entre 235 y 236. La extracción de la raíz cuadrada, pocas veces conduce á un resultado exacto, y el verdadero valor en nuestro ejemplo, debe concebirse así:

$$55298 = 235^2 + 73$$

Esta resta 73 es el exceso de 55298 sobre el cuadrado de 235.

Por cada período que se baja debe obtenerse un guarismo en la raíz ó cero. Además, la resta no debe ser mayor que el duplo de la raíz hallada. En caso contrario, es seguro que el último guarismo de la raíz es menor de lo que debía ser.

204.—Regla.—*Para extraer la raíz cuadrada de un número, se divide éste en períodos de dos guarismos contando de derecha á izquierda; se busca la raíz del mayor cuadrado contenido en el período de la izquierda, que podrá constar de uno ó de dos guarismos; se escribe ésta raíz á la derecha de la cantidad separándola por una línea vertical como en la división; se forma el cuadrado de la raíz hallada, y se resta del primer período de la izquierda; al lado de la resta se baja el período siguiente; se separa el último guarismo de la derecha; se duplica la raíz y por el resultado, que se escribe debajo de ella, se divide el número separado á la izquierda en la cantidad formada con la resta y el segundo período, poniendo el cociente al lado de la raíz y á la derecha del duplo de las decenas de la raíz; las unidades de la raíz se multiplican por la cantidad así formada, y se resta el producto de la cantidad formada con la resta y el período que se bajó á su derecha. Si el guarismo de las unidades es mayor que el verdadero la resta no podrá efectuarse, y si es menor, la resta resultará mayor que el duplo de la raíz. Al lado de la resta obtenida se baja el período siguiente: se separa el último guarismo, y la cantidad de la izquierda se divide por el duplo de la raíz hallada, poniendo al lado de esta el cociente; este cociente se multiplica por cantidad formada con el duplo de las decenas de la raíz y las unidades, y el producto se resta de la cantidad formada con la resta y el período bajado á su lado. Así se continúa la operación, y si la cantidad es un cuadrado completo, la última resta será 0. Cada período que se baja produce un guarismo ó cero en la raíz.*

205.—Demostración de la regla.—Refiriéndonos á un ejemplo, haremos raciocinios generales aplicables á cualquiera otro. Hemos visto que el cuadrado de un número se compone de tres partidas: 1ª, el cuadrado

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

de las decenas; 2ª, doble producto de decenas por unidades, y 3ª, cuadrado de las unidades. En consecuencia, si de una cantidad restamos sucesivamente estas tres partidas del cuadrado del número que expresa la raíz, habremos quitado el cuadrado de la raíz. Para más facilitar la inteligencia de esta demostración, elevamos al cuadrado por sus partidas el número 73=70+3. La primera partida expresa 49 centenas; la segunda expresa 42 decenas y la tercera 9 unidades. Vamos á extraer ahora la raíz cuadrada del número 5329, dando la razón de todo lo prescrito en la regla general.

d^2=4900
$2d \times u$= 420
u^2= 9
73^2=5329

$\sqrt{53,29}$	73
−49	143
42,9	
−42,9	
00 0	

Como 10^2=100, en el hecho de tener el número 5329 más de dos guarismos, su raíz constará de decenas y unidades, y el número 5329 contendrá las tres partidas dichas. Vamos á buscar las decenas de la raiz valiéndonos de la primera partida: *decenas cuadradas*. Pero como decenas cuadradas producen centenas, no las encontraremos en el 29, que representa decenas y unidades, razón por la cual separaremos este período de dos cifras. El mayor cuadrado de un número dígito contenido en 53 es 49, cuya raíz 7 será el valor de las decenas de la raíz, y conocidas éstas, formaremos la primera partida del cuadrado, 70^2=4900, y la restaremos de 5329, ó simplemente 49 de 53 centenas, quedando la resta de 4 centenas, á cuyo lado se baja el período 29. En el número 429 debemos tener las dos partidas restantes, y para encontrar las unidades nos valemos de la segunda: *doble producto de las decenas por las unidades;* y como el valor de esta partida expresará decenas, no la encontraremos en el 9 que representa unidades, y por esta razón lo separaremos; 42 será, pues, el producto de dos factores, siendo uno, el duplo de las decenas y el otro las unidades; y como si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, el cociente será el otro factor (75), resulta que dividiendo 42 entre 14, duplo de las decenas, el cociente 3 nos expresará las unidades de la raiz. Una vez encontradas éstas, formamos las dos partidas restantes, duplo de las decenas multiplicado por las unidades, igual á 420, y cuadrado de las unidades, igual á 9, cuya suma se resta de 429. Las partidas del cuadrado nos han servido para encontrar las partes de la raíz, y una vez conocidas éstas, hemos restado del número propuesto las partidas del cuadrado de la raíz, luego habremos quitado el cuadrado de la raiz. Como en el ejemplo propuesto no queda resta, resulta que $\sqrt{5329}=73$.

Decíamos que *la resta no debe ser mayor que el duplo de la raíz.* La razón de esto es, que si conocemos el cuadrado de un número, por ejemplo, el de 25, y deseamos encontrar el de 26=(25+1), lo obtendremos formando las partidas de sus dos partes, que son:

$$(25+1)^2=25^2+2\times25+1.$$

En consecuencia, si el cuadrado de un número una unidad mayor que otro, es igual al cuadrado de éste, más el doble de este número, más 1, es claro que cuando la resta sea mayor que el duplo de la raíz hallada, las unidades de ésta podrán aumentarse con una unidad, y debe repetirse la operación.

206.—Aproximación de la raíz cuadrada.—*Cuando el resultado de la raíz cuadrada de un número entero no es exacto, se aproxima por decimales, agregando sucesivamente á cada resta dos ceros por cada decimal que se quiere obtener en la raíz, y se continúa la operación hasta alcanzar la aproximación apetecida, teniendo cuidado de separar con una coma la parte entera de la decimal.*

Sea, por ejemplo, extraer la raiz cuadrada á 698.

$\sqrt{6,98}$	26'41
298	46
220,0	524
1040,0	5281
5119	

Ejecutando la operación como se ha dicho, encontraremos la raíz 26 unidades y la resta 22. Para encontrar las décimas de la raíz, agregamos dos ceros al lado de 22, ponemos la coma después de la raíz 26, y procediendo como antes, encontramos 4 décimas en la raíz, y 104 centésimas de resta. A ésta agregamos dos ceros y encontramos 1 centésima en la raíz y 0'5119 por resta.

Demostración.—Cuando se agregan dos ceros á la derecha de cada resta, no se hace sino reducir unidades á centésimas, centésimas á diezmilésimas, etc., y se agregan sucesivamente *dos* ceros, porque para que haya décimas en la raíz, es preciso que haya centésimas en el cuadrado; para que haya centésimas en la raíz es preciso que haya diezmilésimas en el cuadrado, etc. (200), y en general por cada cifra decimal de la raiz debe haber dos en el cuadrado.

Regla.—*Para determinar el valor de la resta, cuando se ha aproximado la raíz cuadrada por decimales, se separarán, contando de derecha á izquierda, doble número de cifras decimales de las que tenga la raíz.*

En el último ejemplo, la resta es 0'5119; habiéndose omitido escribir la coma que separa las unidades de las decimales para no hacer confusa la operación.

207.—Extracción de la raíz cuadrada de las decimales.—Ocurren dos casos: cuando hay enteros juntos con decimales, y cuando sólo hay decimales.

1° *Cuando hay enteros con decimales, antes de comenzar la operación se examina si el número de cifras decimales es ó no par; y cuando no lo es,*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

se agrega á la derecha un cero. En seguida se ejecuta la operación conforme á la regla general (204), *teniendo cuidado de poner la coma de separación entre los enteros y las decimales en la raíz, al bajar el primer período de cifras decimales.*

Sea como ejemplo extraer la $\sqrt{235{\cdot}273}$.

Comenzamos por agregar un cero á la derecha de las decimales para que éstas sean pares, y luego ejecutamos la operación por la regla general, teniendo cuidado de distinguir en la raíz las decimales de los enteros.

Demostración.—El valor del número cuya raíz debemos obtener, no se altera agregándole un cero á la derecha, (168—3°); y es necesario agregar este cero porque conforme á la regla de la multiplicación, cuando se eleva al cuadrado un número que tiene decimales, es indispensable que el producto conste de un número par de decimales; luego cuando esta condición no esté satisfecha tendremos que comenzar por cumplir con ella para poder obtener en la raíz una decimal por cada período del cuadrado.

$\sqrt{2,3\ 5'27,30}$	15'33
1 3,5	25
1 02,7	30'3
11 83,0	30'63
2 64 1	

2° Caso.—*Cuando solo hay decimales, se hace que el número de éstas sea par, y con este objeto se agrega un cero á la derecha cuando sea necesario. Se pone en la raíz 0 como raíz de la parte entera, una coma, y en seguida se extrae la raíz de las decimales como si fueran enteros.*

Por ejemplo,

$\sqrt{0'87,50}$	0'93
65,0	0'183
101	

$$0'875=(0'93)^2+0'0101$$

Demostración.—Como la raiz de cero unidades es cero, por eso ponemos cero en la parte de los enteros de la raíz y como por cada cifra decimal que haya en la raíz debe haber dos cifras en el cuadrado, por eso hacemos que el número de cifras decimales sea par, agregando un cero á la derecha, lo cual no altera el valor de la decimal.

Cuando la parte decimal sea una fracción periódica, en lugar de agregar ceros, tanto para hacer que las cifras decimales sean pares, como para aproximar la raiz, se agregarán las cifras correspondientes del periodo.

La prueba de la raíz cuadrada se ejecuta elevando al cuadrado la raíz encontrada, y agregando al producto la resta, debe obtenerse el número propuesto. Operación que se facilita reduciendo las cantidades á unidades simples.

208.—Extracción de la raíz cuadrada de los quebrados.—En la ejecución de esta operación se presentan tres casos: 1°, *cuando los dos términos del quebrado tienen raíz exacta;* 2°, *cuando solo uno de sus términos tiene raíz exacta; y* 3°, *cuando ni el numerador ni el denominador tienen raíz exacta.*

En el *primer caso* se extrae la raíz del numerador y la del denominador separadamente, y el quebrado formado con estas raíces será la raíz del quebrado propuesto, una vez que para elevar un quebrado al cuadrado se elevan separadamente su numerador y su denominador.

Por ejemplo, $\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{4}{7}$

Segundo caso.—*Cuando uno solo de los términos del quebrado tiene raíz exacta,* se le extrae exacta al que la tenga y aproximada al otro término, con lo cual se obtiene un quebrado, uno de cuyos términos es entero y el otro se compone de enteros y decimales. A este quebrado se le da la forma común agregando al término entero tantos ceros como cifras decimales tenga el otro, suprimiendo en seguida la coma y simplificándolo cuanto sea posible.

Por ejemplo: $\sqrt{\frac{16}{58}}=\frac{4}{7,61}=\frac{400}{761}$

$\sqrt{58}$	7'61
90,0	14'6
2 40,0	15'21
87 9	

En este ejemplo, como el denominador es aproximado, esto es, menor que el verdadero, el quebrado $\frac{400}{761}$ es mayor que la raiz exacta de $\frac{16}{58}$. Cuando el numerador no tenga raíz exacta, el resultado será menor que el verdadero.

Tercer caso.—*Cuando ninguno de los dos términos del quebrado tiene raíz exacta,* se reduce éste al segundo caso multiplicando ambos términos por el numerador ó por el denominador, y en seguida se ejecuta la regla antes dada.

Si se quiere extraer la raíz cuadrada de $\frac{5}{7}$, cuyos términos no son ni uno ni otro cuadrados perfectos, multiplicaremos por el denominador sus dos términos, lo cual no altera su valor y diremos:

$$\sqrt{\frac{5}{7}}=\sqrt{\frac{35}{49}}=\frac{5'91}{7}=\frac{591}{700}$$

$\sqrt{35}$	5'91
10'00	10'9
190,0	11'81
71 9	

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Además de la forma de quebrado común puede darse á la raíz de los quebrados la forma decimal, para lo cual se convierte el quebrado obtenido en decimal.

Así: $\sqrt{\frac{5}{7}}=\frac{591}{700}=0'844$

Por último, *la raíz cuadrada de un quebrado puede obtenerse convirtiéndolo préviamente en decimal y extrayendo á ésta la raíz conforme á la regla dada* (207), *teniendo cuidado de que el número de decimales sea par.*

Por ejemplo: $\sqrt{\frac{5}{7}}=\sqrt{0'7142}=0'84$

50	7	$\sqrt{}$ 0'71,42	0'84
10	0'7142	7 42	1'64
30		86	
20			
6			

La raíz cuadrada de un quebrado propio ó de una cantidad decimal sin enteros, es mayor que el quebrado ó que la decimal, supuesto que conforme á lo explicado en los números 160 y 177 cualquiera de los factores es mayor que el producto, y aquí la raíz es factor del quebrado ó de la decimal dada.

Para extraer la raíz cuadrada de un número mixto se transformará préviamente en quebrado impropio ó en enteros con decimales, y en seguida se extraerá la raíz del quebrado impropio (208) *ó la de los enteros con decimales* (207).

Para extraer la raíz cuadrada de un número denominado, se convertirá préviamente en decimal, y en esta forma se le extraerá la raíz.

CUBO Y RAIZ CUBICA.

209.—Elevación de un número al cubo.—Definición.—*Se llama cubo ó tercera potencia de un número, el producto que resulta de multiplicarlo por su cuadrado.* En consecuencia, el cubo de un número es un producto formado por tres factores iguales. Por ejemplo, 125 es el cubo de 5, supuesto que 5×5^2 ó $5\times5\times5=125$.

La elevación de un número al cubo, se indica poniendo el exponente 3 á la derecha y arriba de la cantidad, la cual suele colocarse debajo de una raya ó dentro de un paréntesis.

$$15,^3 \text{ ó } \overline{15,}^3 \text{ ó } (15)^3=3375$$

se lee: 15 elevado al cubo, igual á 3375.

Regla.—*Un número se eleva al cubo multiplicándolo por su cuadrado, ó dos veces sucesivas por sí mismo.*

Cuando el número es entero, también lo será su cubo. Si el número es quebrado, para obtener su cubo habrá que elevar separadamente su numerador y su denominador, supuesto que para multiplicar los quebrados se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. En este caso el cubo es quebrado y menor que el propuesto, porque el producto de la multiplicación de los quebrados propios es menor que cualquiera de sus factores. (160).

Si el número que se eleva al cubo consta de enteros y decimales, su cubo será un número mixto compuesto en la parte decimal de un número de cifras triple de las que tenga el propuesto, porque el cuadrado contiene un número doble, y porque en el producto del cuadrado por el número propuesto se deben separar tantas decimales como hay en ambos factores juntos.

Cuando la cantidad que se eleva al cubo solo es decimal, su cubo constará de un número triple de cifras decimales, y su valor será menor que el de la decimal propuesta (177).

Como resumen de lo expuesto pondremos los siguientes ejemplos:

$15^3=3375$	número	entero mayor que 15.
$(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}$	„	quebrado menor que $\frac{3}{4}$.
$(2+\frac{3}{5})^3=17+\frac{72}{125}$	„	mixto, mayor que $2+\frac{3}{5}$.
$(0'05)^3=0'000125$	„	decimal con triple número de cifras decimales y menor que 0'05.
$(2'05)^3=8,615125$	„	mixto, con triple número de cifras decimales y mayor que 2'05.

210.—Partidas de que consta el cubo de un número compuesto de decenas y unidades.—Si queremos elevar al cubo el número $75=70+5$ tendremos que multiplicarlo por su cuadrado, esto es:

$$(70+5)^3=(70+5)^2\times(70+5)$$

pero como $(70+5)^2=70^2+2\times70\times5+5^2$ (201)

tendremos que multiplicar las tres partes del cuadrado, primero por 70 y luego por 5 para formar el cubo de $70+5$; ejecutando esta multiplicación, tendremos:

$(70+5)^2=70^2+2\times70\times5+5^2$

por $(70+5)=\quad\quad 70+5$

producto por $70=70^3+2\times70^2\times5+70\times5^2$

id. por $5=\quad\quad 70^2\times5+2\times70\times5^2+5^3$

sumando $(70+5)^3=70^3+3\times70^2\times5+3\times70\times5^2+5^3$

$$(d+u)^3=d^3+3\times d^2\times u+3\times d\times u^2+u^3$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

pero como 70 representa las decenas, y 5 las unidades del número 75, inferimos: *que el cubo de un número compuesto de decenas y unidades, consta de cuatro partidas:* 1ª *cubo de las decenas:* 2ª, *tres veces decenas cuadradas multiplicadas por las unidades;* 3ª *tres veces decenas multiplicadas por las unidades cuadradas; y* 4ª, *cubo de las unidades.* *

Se distinguen las partidas de que está formado el cubo de un número compuesto de decenas y unidades, con el objeto de determinar un procedimiento general para extraer la raíz cúbica de un número, y para poderla aproximar.

Debe observarse: 1º, que decenas cúbicas producen millares, porque al multiplicar el cuadrado de las decenas que expresa centenas, por decenas, que terminan en un cero, el producto ó cubo terminará en tres ceros; 2ª, la segunda partida expresa centenas, porque decenas cuadradas producen centenas; 3º, la tercera partida compuesta de decenas multiplicadas por tres veces las unidades cuadradas, expresa decenas; y 4º, el cubo de las unidades, siempre tiene unidades simples, aun cuando conste de más de una cifra.

Como $1^3=1$ y $10^3=1000$, el cubo de las unidades constará de una, dos ó tres cifras, pero no de más de tres. Como $10^3=1000$ y $100^3=1000000$, el cubo de los números comprendidos entre 10 y 100, tendrá

* Este principio puede demostrarse de una manera general, haciendo uso de los signos del álgebra. Considerando compuesto un número de decenas y unidades si se representan por d las decenas y por u las unidades, multiplicando $(d+u)^2$ por $(d+u)$, obtendremos las partidas de que está formado el cubo de cualquier número compuesto de decenas y unidades, y para esto ejecutaremos la siguiente operación:

$$(d+u)^3=(d+u)^2\times(d+u)=(d^2+2d\times u+u^2)\times(d+u).$$

ejecutando la multiplicación de las partidas del cuadrado por $(d+u)$:

$$\begin{array}{l} (d+u)^2=d^2+2d\times u+u^2 \\ \underline{(d+u)\qquad\qquad d+u} \\ d^3+2d^2\times u+d\times u^2 \\ \qquad\quad +d^2\times u+2d\times u^2+u^3 \\ \overline{(d+u)^3=d^3+3d^2\times u+3d\times u^2+u^3} \end{array}$$

resultado que demuestra la verdad del principio.

Si descomponemos un número en sus dos partes y representamos por d su primera parte y por u la segunda, generalizaremos el principio demostrado, diciendo que, el cubo de un número consta: del cubo de la primera parte, más tres veces el cuadrado de la primera por la segunda, más tres veces la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda parte.

Por ejemplo

$$(4+5)^3=4^3+3.4^2\times 5+3.4\times 5^2+5^3$$
$$(4+1)^3=4^3+3.4^2\times 1+3.4\times 1^2+1^3$$
$$(4+\tfrac{5}{8})=4^3+3.4^2\times\tfrac{5}{8}+3.4\times(\tfrac{5}{8})^2+(\tfrac{5}{8})^3$$

más de 3 y menos de 7 guarismos; y en general, el cubo de un número constará de triple número de guarismos que los suyos, de uno ó de dos menos.

211.—Raíz cúbica.—Definición.—*Se llama raíz cúbica de un número, aquel que multiplicado por su cuadrado produce el propuesto.*

Así, supuesto que $4\times4^2=64$, 4 será la raíz cúbica de 64.

La raíz cúbica de una cantidad se indica poniéndola debajo del signo radical con el número 3 entre las ramas del radical, y á este número se llama índice de la raiz: $\sqrt[3]{872}$, se lee: raíz cúbica de 872.

212.—Ejemplo para extraer la raíz cúbica.—Para ejecutar esta operación, nos valemos de las cuatro partidas del cubo, determinando las partes de la raíz por medio de ellas.

Se quiere determinar la raíz cúbica de 22873456. La operación se dispondrá y ejecutará como sigue:

	$\sqrt[3]{22,873,456}$	283
$2^3=$	8	$12\ldots\ldots=3.2^2$
	148,73	2352 $=3.(28)^2$
$3.(20)^2\times8=$	96 00	
$3.(20)\times8^2=$	38 40	
$8^3=$	5 12	
	139 52	
	9 214,56	
$3.(280)^2\times3=$	7056 00	
$3.(280)\times3^2=$	75 60	
$3^3=$	27	
	7131 87	
	2082 69	

28
28
224
56
784
3
2352

$3\times(28)^2=2352$
$3\times28=84$

La resta..... 921 $<2436+1$

Resulta que: $22873456=(283)^3+208269$

Dividida la cantidad en períodos de á tres guarismos, se ve que el mayor cubo contenido en el período 22 de la izquierda es 8, cuya raíz es

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

2: restando el cubo de la raíz de 22, se obtiene 14 por resta á cuyo lado se baja el período 873; se separan las decenas y unidades; se cuadra y triplica la raíz 2 escribiendo el resultado 12 debajo de ella: se dividen los guarismos 148 separados á la izquierda de la cantidad 14873 por 12, triple del cuadrado de las decenas de la raíz, y aunque el cociente es 12, como éste sólo debe constar de unidades, ponemos 8 por unidades. Se forman las tres últimas partidas del cubo, y la suma 13952, se resta de 14873 obteniéndose la resta 921. Si el guarismo 8 de las unidades hubiera sido *mayor* que el verdadero, la suma de las tres partidas habría resultado mayor que 14873; y si el guarismo 8 de las unidades de la raíz hubiera sido *menor* que el verdadero, la resta 921 habría resultado mayor que tres veces 28^2 más tres veces 28, esto es, debe obtenerse:

$$921 < 3 \times 28^2 + 3 \times 28 + 1 \text{ ó } 921 < 2436 + 1.$$

Al lado de la resta 921 se baja el período 456: se separan las decenas y unidades, se cuadra y triplica la raíz 28, se divide 9214 por 2352 triple del cuadrado de la raíz hallada, y el cociente 3 se pone como unidades: se forman las tres últimas partidas del cubo, y restando su suma 713187 de 921456, se obtiene la resta 208269, que es el exceso que tiene el número propuesto sobre el cubo de 283.

213.—Regla.—*Para extraer la raíz cúbica de un número, se divide en períodos de á tres cifras contando de derecha á izquierda, pudiendo constar el último de la izquierda de uno, dos ó tres guarismos; se busca la raíz del mayor cubo contenido en el período de la izquierda, y se escribe á la derecha de la cantidad, separándola por una raya vertical como en la división; se forma el cubo de la raíz hallada, y se resta del primer período de la izquierda; al lado de la resta se baja el período siguiente: se separan los dos guarismos de la derecha, se cuadra y triplica la raíz hallada, y por el resultado, que se escribe debajo de la raíz, se divide el número separado á la izquierda en la cantidad formada con la resta y el segundo período, poniendo el cociente como unidades al lado del guarismo de la raíz: una vez encontradas las decenas y unidades de la raíz se forman con ellas las tres partidas restantes del cubo, que son: tres veces decenas cuadradas multiplicadas por las unidades; tres veces decenas por el cuadrado de las unidades, y cubo de las unidades; la suma de estas tres partidas se resta de la cantidad formada con la primera resta y el período bajado á su lado. Si el guarismo de las unidades es mayor que el verdadero, la resta no podrá ejecutarse; y si es menor, la resta será mayor que la suma del triple del cuadrado de la raíz, más tres veces esta raíz. Al lado de la resta se baja el período siguiente: se separan los dos últimos guarismos, se cuadra y triplica la raíz hallada, y por el resultado, que se escribe debajo de la raíz, se divide el número separado á la izquierda en la cantidad formada con la resta y el período bajado á su lado: el cociente se pone como unidades de la raíz: se forman las tres últimas partidas del cubo, y su suma se resta de la cantidad formada con la última resta y el período bajado á su lado; y así se continúa la operación hasta el último período, quedando 0 por resta cuando la cantidad es un cubo perfecto. Por cada período que se baja se pone 0 ó una cifra significativa en la raíz.*

214.—Demostración de la regla para extraer la raíz cúbica.—Refiriéndonos á un ejemplo, haremos raciocinios generales aplicables á cualquier otro. Supuesto que el cubo de un número consta de cuatro partidas, 1ª, el cubo de las decenas; 2ª, tres veces el cuadrado de las decenas por las unidades; 3ª, tres veces las decenas por el cuadrado de las unidades; y 4ª, el cubo de las unidades, si de una cantidad restamos sucesivamente estas cuatro partidas del número que expresa la raíz, habremos quitado el cubo de la raíz. Aclararemos la demostración comenzando por elevar al cubo por sus partidas el número $64 = 60 + 4$.

$$\begin{aligned} d^3 &= 216000 \\ 3\,d^2 \times u &= 43200 \\ 3\,d \times u^2 &= 2880 \\ u^3 &= 64 \\ \hline & 262144 \end{aligned}$$

La primera partida expresa millares; la segunda, por estar formada del cuadrado de las decenas, expresa centenas: la tercera expresa decenas, y la cuarta indica unidades. Vamos á extraer la raíz cúbica á 262144 explicando el fundamento de todas las partes de la regla.

$$\begin{array}{rl|l} & \sqrt[3]{\,262,144} & 64 \\ d^3 = 60^3 = & 216 & \overline{108} \\ \hline & 461,44 & \\ \hline 3\,d^2 \times u = 3.60^2 \times 4 = & 432\,00 & \\ 3\,d \times u^2 = 3.60 \times 16 = & 28\,80 & \\ u^3 = \quad 4^3 = & 64 & \\ \hline & 461\,44 & \\ \hline & 00\,00 & \end{array}$$

Como $10^3 = 1000$, en el hecho de tener el número 262144 más de tres guarismos, su raíz cúbica constará de decenas y de unidades, y el número 262144 estará compuesto de las partidas de la raíz. Para encontrar las decenas de la raíz nos valemos de la primera partida, pero como de-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

cenas cúbicas producen millares, no la encontraremos en el período compuesto de centenas, decenas y unidades, y por esta razón separamos las tres cifras de la derecha. El mayor cubo de un número entero contenido en 262, es 216 cuya raíz cúbica 6 expresará las decenas de la raiz. Formaremos la primera partida elevando 6 decenas al cubo; y restaremos 216 de 262 millares. Al lado de la resta 46 bajamos el período 144 unidades, y en la resta 46144, deberemos encontrar las tres partidas restantes del cubo. Para encontrar las unidades nos valemos de la segunda partida formada del producto del *triple del cuadrado de las decenas* multiplicado *por las unidades*, y como el valor de esta partida expresa centenas, no la encontraremos en las decenas ni en las unidades, y por esta razón separamos las dos últimas cifras 44; la cantidad 461 centenas podrá contener las centenas procedentes de la tercera y cuarta partida, pero principalmente estará formada de la segunda partida, esto es, del producto del *triple del cuadrado de las decenas multiplicado por las unidades*, y como si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, el cociente será el otro factor, dividiendo 461 centenas por 108, triple del cuadrado de 6 decenas, el cociente 4 nos expresará las unidades de la raiz. *Este cociente generalmente es mayor que el verdadero á causa de las centenas que provienen de las otras partidas, por lo que se procede por tanteos disminuyendo el cociente hallado.*

Encontradas las decenas y las unidades de la raiz se forman las tres últimas partidas del cubo y su suma se resta de 46144. Las partidas de que está compuesto el cubo de un número, que consta de decenas y unidades, nos han servido para encontrar las partes de la raiz y como después de encontradas hemos restado de la cantidad las partidas del cubo de la raiz, habremos restado de la cantidad propuesta el cubo de la raiz.

Cuando el cociente no es menor que el verdadero, decimos que la *resta debe ser menor que la suma del triple del cuadrado de la raíz, más el triple de la raíz, más* 1; porque si conocido el cubo de un número 64, por ejemplo, determinamos el cubo de 64+1 que es,

$$(64+1)^3=64^3+3.64^2+3.64+1$$

veremos que el cubo de un número una unidad mayor excede al cubo del primero *tres veces su cuadrado, más tres veces el número, más la unidad.*

215.—Aproximación de la raíz cúbica.—*Cuando al concluir de extraer la raíz cúbica de un número, queda una resta y se quiere aproximar el resultado por decimales, se agregan sucesivamente tres ceros á las restas por cada decimal que se quiera obtener en la raíz, y se continuará la operación*

conforme á la regla general hasta tener el grado de aproximación que se desea; teniendo cuidado de separar en la raíz con una coma la parte entera de la decimal.

Sea por ejemplo extraer la raíz cúbica de 12345.

$\sqrt[3]{12,345}$	23'1		
8	12		
43,45	1587	**23**	**23**
36 00		23	3
5 40		69	69
27		46	
178'0,00		529	
158 700		3	
690		1587	
1			
18'609			

$$12345=(23'1)^3+18'609$$

Ejecutando la operación conforme á la regla, se llega á obtener la raíz 23 y como resta 178. Para aproximar por decimales, se agregan tres ceros y se pone una coma á la derecha de 23 unidades de la raíz, y después se determinan las décimas ejecutando la operación conforme á la regla general.

Demostración.—Como el cubo de una decimal consta de un número triple de cifras decimales que su raíz, resulta que para que haya décimas en la raíz es preciso que haya milésimas en el cubo, por lo que agregaremos tres ceros á la resta para reducirla á milésimas y obtener las décimas de la raíz. Para que haya centésimas en la raíz debe haber millonésimas en el cubo, y por esto tendremos que agregar dos veces tres ceros, y así sucesivamente.

Regla.—*Para determinar el valor de la resta, cuando se ha aproximado la raíz cúbica por decimales, se separarán, contando de derecha á izquierda triple número de cifras decimales de las que tenga la raíz.*

En el último ejemplo la resta es 18'609. Si la raíz tuviera dos cifras decimales, la resta tendría seis, y así sucesivamente.

216.—Extracción de la raiz cúbica de las decimales.—Ocurren dos casos: cuando hay enteros juntos con decimales, ó cuando sólo hay decimales.

Primer caso.—*Cuando hay enteros y decimales, antes de comenzar la operación se examina si el número de cifras decimales es ó no múltiplo de tres, teniendo cuidado cuando no lo es, de agregar á la derecha uno ó dos ceros para satisfacer esta condición. En seguida se extrae la raíz de los*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

enteros, se pone una coma á la derecha de las unidades de la raíz y luego se bajan sucesivamente los períodos decimales para determinar la parte decimal de la raíz.

Sea como ejemplo extraer la raíz cubica de 36'4. No siendo el número de decimales múltiplo de 3, comenzamos por hacerlo, agregando dos ceros, y en seguida ejecutamos la operación conforme á la regla.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{36'400} & 3'3 \\ 27 & 27 \\ \hline 9'400 & \\ 8\,100 & \\ 810 & \\ 27 & \\ \hline 463 & \end{array} \qquad 36'4=(3'3)^3+0'463.$$

Demostración.—Al agregar ceros á la derecha de la parte decimal, el valor de ésta no se altera; (168—3°) y es preciso agregar tres ceros, porque según se ha visto en el párrafo anterior, por cada cifra decimal que hay en la raíz cúbica, debe haber tres en el cubo.

Segundo caso.—*Cuando solo hay decimales, se comienza por hacer que el número de éstas sea tres ó un múltiplo de tres, y á este fin se agregan, cuando sea necesario, uno ó dos ceros á la derecha. En seguida se pone cero en la raíz para representar su parte entera, una coma, y se extrae la raíz de las decimales como si fueran enteros, por la regla general.*

Si se quiere extraer la raiz cúbica de 0'7654, se comienza por agregar dos ceros á la derecha:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{0'765,400} & 0'91 \\ 729 & 243 \\ \hline 364,00 & \\ 243\,00 & \\ 2\,70 & \\ 1 & \\ \hline 118\,29 & \end{array}$$

$$0'7654=(0'91)^3+0'11829.$$

Se pone 0 enteros en la raiz porque la raiz de cero es cero, y se determina la de la parte decimal que es 0'91.—Esta regla tiene el mismo fundamento que el caso anterior.

Cuando la parte decimal sea una fracción periódica, en lugar de agregar ceros, tanto para hacer que las cifras decimales sean tres ó múltiplas de tres, como para aproximar la raíz, se agregarán las cifras respectivas del período.

La prueba de la raíz cúbica se hace elevando al cubo la raíz hallada, y agregando la resta debe obtenerse el número propuesto. Operación que se facilita reduciendo las cantidades á unidades simples.

217.—Extracción de la raiz cúbica de los quebrados.—Ocurren tres casos: 1°, *cuando los dos términos del quebrado tienen raíz exacta;* 2°, *cuando uno solo la tiene;* y 3°, *cuando ni el numerador ni el denominador tienen raíz exacta.*

En el *primer caso* se extrae la raíz del numerador y la del denominador, y el quebrado formado con las raíces respectivas de cada término será la raíz cúbica del quebrado propuesto, supuesto que para elevar un quebrado al cubo, se eleva separadamente su numerador y su denominador.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{64}}=\frac{2}{4}$$

En el *segundo caso* se extrae la raíz exacta al término que la tenga, y la del otro se aproxima por decimales. En el quebrado que se obtiene, se agregan al término entero tantos ceros como cifras decimales tenga el otro, en el cual se suprime la coma, operación que equivale á multiplicar los dos términos del quebrado por un mismo número.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{12}}=\frac{2}{2'2}=\frac{20}{22}$$

El *tercer caso* se reduce al segundo, multiplicando los dos términos del quebrado por el cuadrado del numerador, ó por el cuadrado del denominador, según que se quiera obtener un resultado aproximado por exceso ó por defecto.

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}}=\sqrt[3]{\frac{5\times6^2}{6\times6^2}}=\sqrt[3]{\frac{180}{6^3}}=\frac{5'6}{6}=\frac{56}{60}$$

La raíz cúbica de un quebrado puede obtenerse convirtiéndolo préviamente en decimal y extrayéndole á éste la raíz cúbica conforme á la regla dada (216).

Por ejemplo: $\sqrt[3]{\frac{5}{6}}=\sqrt[3]{0'8(3)}=0'94$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 6 \\ 20 & 0'8(3) \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt[3]{0'833,333} & 0'94 \\ 729 & 243 \\ \hline 1043,33 & \\ 972\,00 & \\ 43\,20 & \\ 64 & \\ \hline 27\,49 & \end{array}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La raíz cúbica de un quebrado propio, ó de una decimal es mayor que el quebrado ó la decimal; porque según se ha visto (160 y 177), en la multiplicación de los quebrados ó de las decimales, cualquiera de los factores es mayor que el producto, y aquí la raíz viene á hacer papel de factor del quebrado ó de la decimal dada.

Para extraer la raíz cúbica de un número mixto se transformará préviamente en quebrado impropio, ó en enteros con decimales, y en seguida se extraerá la raíz del quebrado impropio (217), *ó la de los enteros con decimales* (216).

Para extraer la raíz cúbica de un denominado se convertirá préviamente en decimal, y en esta forma se le extraerá la raíz.

RAZONES Y PROPORCIONES.

218.—Razones.—Para adquirir la idea de la magnitud de una cantidad, hasta ahora lo hemos hecho refiriéndola á la de la unidad; pero hay veces en que el valor de una cantidad se compara con el de otra cantidad de su misma especie, y á la relación que se advierte entre ellas se llama razón de las cantidades comparadas. Por ejemplo, cuando se dice que una persona es 10 años mayor que su hermano, no se atiende al número de años que cada cual tenga y que podrá ser más ó menos grande, sino á la diferencia de edad de las personas, siendo 10 la razón. Cuando se dice que el oro vale 16 y media veces más que la plata, no se refiere el valor de cada metal al de la unidad de su especie, sino que se comparan entre sí los valores de los dos metales, y el resultado $16\frac{1}{2}$ es la *razón*.

Definición.—*Se llama, pues, razón, á la relación que existe entre dos cantidades homogéneas que se comparan*, y también se da este nombre al número que expresa la relación. Cuando los términos de la razón son heterogéneos, se consideran como abstractos.

La comparación puede hacerse determinando la diferencia que hay entre las dos cantidades, ó bien el número de veces que una contiene á la otra. *Las cantidades que se comparan forman los términos de la razón llamándose antecedente al primero y consecuente al segundo.*

219.—Razón aritmética.—Definición.—*Se llama razón aritmética la diferencia que hay entre dos cantidades homogéneas.*

La razón aritmética se indica poniendo un punto entre las dos cantidades que se comparan:

$$22 \,.\, 14$$

se lee: 22 es á 14. Otras veces se indica poniendo el signo menos entre las dos cantidades: 22—14=8. Las dos cantidades 22 y 14 forman los términos de la razón, llamándose á la primera, 22, *antecedente*, y á la segunda, 14, *consecuente* de la razón.

La propiedad fundamental de *la razón aritmética es: que no se altera cuando se agregan ó quitan á sus dos términos cantidades iguales.*

Demostración.—Supuesto que razón aritmética es la diferencia que hay entre dos cantidades, se puede considerar el antecedente como el minuendo, y el consecuente como el substraendo de una resta, y una vez que la resta no se altera cuando se agrega ó se quita una misma cantidad al minuendo y al substraendo (50); otro tanto sucederá con la razón aritmética.

220.—Razón geométrica.—Definición.—*Se llama razón geométrica el cociente que resulta de dividir una por otra dos cantidades homogéneas.*

La razón geométrica, que suele llamarse *por cociente*, se indica poniendo dos puntos entre las cantidades comparadas:

$$24 : 8;$$

y se lee: 24 es á 8. Otras veces se indica en forma de quebrado poniendo el antecedente de la razón como numerador, así $\frac{24}{8}$, y en ambos casos se determina la razón dividiendo el antecedente por el consecuente.

Teorema.—*La razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número.*

Demostración.—Siendo la razón geométrica el cociente que resulta de dividir uno por otro sus dos términos, y supuesto que el cociente de una división no se altera cuando se multiplican ó dividen el dividendo y el divisor por un mismo número (79); lo mismo sucederá con la razón geométrica. Cuando á ésta se le da la forma de quebrado, se sabe igualmente que el valor de un quebrado no se altera cuando se multiplican ó parten sus dos términos por un mismo número.

221.—Proporciones.—Sucede á menudo en matemáticas, que entre dos cantidades de una especie, existe la misma relación que entre otras dos cantidades, generalmente de diferente especie que la de las primeras, aunque homogéneas entre sí. Esta igualdad de relación de magni-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La raíz cúbica de un quebrado propio, ó de una decimal es mayor que el quebrado ó la decimal; porque según se ha visto (160 y 177), en la multiplicación de los quebrados ó de las decimales, cualquiera de los factores es mayor que el producto, y aquí la raíz viene á hacer papel de factor del quebrado ó de la decimal dada.

Para extraer la raíz cúbica de un número mixto se transformará préviamente en quebrado impropio, ó en enteros con decimales, y en seguida se extraerá la raíz del quebrado impropio (217), *ó la de los enteros con decimales* (216).

Para extraer la raíz cúbica de un denominado se convertirá préviamente en decimal, y en esta forma se le extraerá la raíz.

RAZONES Y PROPORCIONES.

218.—Razones.—Para adquirir la idea de la magnitud de una cantidad, hasta ahora lo hemos hecho refiriéndola á la de la unidad; pero hay veces en que el valor de una cantidad se compara con el de otra cantidad de su misma especie, y á la relación que se advierte entre ellas se llama razón de las cantidades comparadas. Por ejemplo, cuando se dice que una persona es 10 años mayor que su hermano, no se atiende al número de años que cada cual tenga y que podrá ser más ó menos grande, sino á la diferencia de edad de las personas, siendo 10 la razón. Cuando se dice que el oro vale 16 y media veces más que la plata, no se refiere el valor de cada metal al de la unidad de su especie, sino que se comparan entre sí los valores de los dos metales, y el resultado $16\frac{1}{2}$ es la *razón*.

Definición.—*Se llama, pues, razón, á la relación que existe entre dos cantidades homogéneas que se comparan*, y también se da este nombre al número que expresa la relación. Cuando los términos de la razón son heterogéneos, se consideran como abstractos.

La comparación puede hacerse determinando la diferencia que hay entre las dos cantidades, ó bien el número de veces que una contiene á la otra. *Las cantidades que se comparan forman los términos de la razón llamándose antecedente al primero y consecuente al segundo.*

219.—Razón aritmética.—Definición.—*Se llama razón aritmética la diferencia que hay entre dos cantidades homogéneas.*

La razón aritmética se indica poniendo un punto entre las dos cantidades que se comparan:

$$22 \,.\, 14$$

se lee: 22 es á 14. Otras veces se indica poniendo el signo menos entre las dos cantidades: 22—14=8. Las dos cantidades 22 y 14 forman los términos de la razón, llamándose á la primera, 22, *antecedente*, y á la segunda, 14, *consecuente* de la razón.

La propiedad fundamental de *la razón aritmética es: que no se altera cuando se agregan ó quitan á sus dos términos cantidades iguales.*

Demostración.—Supuesto que razón aritmética es la diferencia que hay entre dos cantidades, se puede considerar el antecedente como el minuendo, y el consecuente como el substraendo de una resta, y una vez que la resta no se altera cuando se agrega ó se quita una misma cantidad al minuendo y al substraendo (50); otro tanto sucederá con la razón aritmética.

220.—Razón geométrica.—Definición.—*Se llama razón geométrica el cociente que resulta de dividir una por otra dos cantidades homogéneas.*

La razón geométrica, que suele llamarse *por cociente*, se indica poniendo dos puntos entre las cantidades comparadas:

$$24 : 8;$$

y se lee: 24 es á 8. Otras veces se indica en forma de quebrado poniendo el antecedente de la razón como numerador, así $\frac{24}{8}$, y en ambos casos se determina la razón dividiendo el antecedente por el consecuente.

Teorema.—*La razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número.*

Demostración.—Siendo la razón geométrica el cociente que resulta de dividir uno por otro sus dos términos, y supuesto que el cociente de una división no se altera cuando se multiplican ó dividen el dividendo y el divisor por un mismo número (79); lo mismo sucederá con la razón geométrica. Cuando á ésta se le da la forma de quebrado, se sabe igualmente que el valor de un quebrado no se altera cuando se multiplican ó parten sus dos términos por un mismo número.

221.—Proporciones.—Sucede á menudo en matemáticas, que entre dos cantidades de una especie, existe la misma relación que entre otras dos cantidades, generalmente de diferente especie que la de las primeras, aunque homogéneas entre sí. Esta igualdad de relación de magni-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

tudes ó de valores, es lo que constituye una proporción y es un manantial fecundo en aplicaciones prácticas. Así, cuando por ejemplo, se sabe que 30 varas de paño valen 100 pesos, puede determinarse el valor de 60 ó de otro número cualquiera de varas, á causa de que entre 100 pesos y el valor de 60 varas tiene que haber la misma relación que entre 30 y 60 varas.

Por medio de las proporciones, y valiéndose de métodos más ó menos indirectos, se determinan las distancias con ayuda de los ángulos; el peso de los cuerpos por medio de sus volúmenes, etc.

Definición.—*Se llama, pues, proporción la igualdad de dos razones.* La proporción será aritmética ó geométrica, según sea la clase de las razones que la forman.

Una proporción consta de cuatro términos: dos que forman la primera razón, y dos que constituyen la segunda; siendo siempre de rigor la condición de igualdad entre las dos razones.

222.—Proporción aritmética.—Definición.—*Se llama proporción aritmética la igualdad de dos razones aritméticas.*

La proporción aritmética se indica como sigue:

$$11 \,.\, 7 : 9 \,.\, 5;$$

y se lee: 11 es á 7, como 9 es á 5. Suele llamarse equidiferencia, é indicarse 11—7=9—5.

Se llaman *antecedentes* en la proporción á los números que en las razones que la constituyen forman también los antecedentes; 11 es el primer antecedente, y nueve el segundo antecedente. Igual distinción se hace con los *consecuentes.* A 7 y á 9 se les llama los *medios* de la proporción: y á 11 y á 5 los *extremos*, indicando estos últimos nombres, la posición relativa de los cuatro términos de la proporción. Se llama *proporción continua aquella cuyos medios son iguales;* por ejemplo:

$$12 \,.\, 8 : 8 \,.\, 4,$$

en este caso, 8 es un medio aritmético entre los números 12 y 4, y la proporción suele indicarse de esta manera:

$$\div\ 12 \,.\, 8 \,.\, 4;$$

debiendo repetirse el término medio al leerla.

La propiedad fundamental de la proporción aritmética es, que la suma de los extremos es igual á la de los medios.

Demostración.—Sea la proporción: $13 \,.\, 8 : 9 \,.\, 4,$

la cual podemos poner en la forma $13-8=9-4,$

supuesto que proporción es la igualdad de dos razones. Y como si

á cantidades iguales se agregan iguales, los resultados serán iguales, podremos agregar á cada razón la suma de los consecuentes 8+4 subsistiendo la igualdad.

$$13-8+8+4=9-4+8+4;$$

pero en el primer miembro de esta ecuación, tenemos que $+8$ y $-8=0$ y en el segundo miembro $+4$ y $-4=0$; luego quedará

$$13+4=9+8;$$

como 13 y 4 son los extremos de la proporción, y 9 y 8 los medios, se infiere que la suma de los extremos es igual á la de los medios.

En la proporción aritmética, la propiedad fundamental nos sirve para resolver dos problemas: primero, encontrar el cuarto término de una proporción cuando se conocen los otros tres; y segundo, hallar un medio aritmético entre dos cantidades dadas.

Regla.—*Para encontrar el cuarto término de una proporción aritmética, si el término que se busca es un extremo, se suman los medios, y de la suma se resta el extremo conocido; si lo que se busca es un medio, se sumarán los extremos y se restará el medio conocido.*

Ejemplo.—Si se quiere encontrar el cuarto término de una proporción aritmética, cuyos tres primeros son

$$15 \,.\, 7 : 10 \,.\, x$$

Sumaremos 7 y 10=17, y de esta suma restaremos el extremo conocido 15, y como 17—15=2, este número será el cuarto término de la proporción 15 . 7 : 10 . 2. Lo mismo que se acostumbra en álgebra, aquí hemos representado por x la cantidad desconocida.

Demostración.—Como en la proporción aritmética la suma de los extremos es igual á la de los medios, la suma 7+10, será igual á la del extremo 15 con el número que buscamos, y como si de la suma de dos cantidades se quita una de ellas, la resta nos da la otra, se infiere que restando de la suma de los medios el extremo conocido, tendremos el otro extremo, cuarto término de la proporción.

Regla.—*Para hallar un medio aritmético, entre dos números dados, se suman éstos y se toma la mitad de la suma.*

Ejemplo.—Para hallar un medio aritmético entre los números 9 y 17, se suma 9+17=26 y la mitad, 13 de 26, será el medio aritmético buscado.

$$9 \,.\, 13 : 13 \,.\, 17$$

Demostración—Debiendo ser la suma de los extremos conocidos igual

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

á la de los medios, cuando éstos hayan de ser iguales, la suma de los extremos será el doble del término medio, luego tomando la mitad de la suma de los extremos, obtendremos el medio aritmético.

Teorema.—*Recíprocamente, siempre que en cuatro cantidades la suma de dos de ellas sea igual á la de las otras dos, las cuatro cantidades formarán una proporción aritmética.*

Demostración.—Sean las cuatro cantidades 17, 11, 28, 22 en las que se tiene que $17+22=11+28$.

Como si á cantidades iguales se quitan iguales, los resultados serán iguales, la ecuación anterior subsistirá restando á sus dos miembros el segundo y cuarto término, esto es,

$$17+22-11-22=11+28-11-22;$$

pero como $+22-22=0$ y $+11-11=0$,
quedará: $17-11=28-22$,

y supuesto que proporción aritmética es la igualdad de dos razones aritméticas, con las cuatro cantidades podemos formar una proporción,

$$17 \,.\, 11 : 28 \,.\, 22,$$

que es lo que se quería demostrar.

Este principio sirve de fundamento á varias transformaciones que pueden hacerse en una proporción aritmética sin alterarla, y son: *alternar* medios ó extremos; *invertir* los medios por los extremos, y *permutar* las razones.

223.—Proporción geométrica.—Definición.—*Se llama proporción geométrica, la igualdad de dos razones geométricas.*

La proporción geométrica se indica así

$$24 : 8 :: 27 : 9,$$

y se lee: 24 es á 8 como 27 es á 9. Se suele llamar proporción por cociente é indicarse: $\frac{24}{8}=\frac{27}{9}$ leyéndose siempre del mismo modo. Las denominaciones de *antecedentes*, *consecuentes*, *medios*, *extremos*, *primera* y *segunda razón*, son las mismas que las explicadas en la proporción aritmética.

Se llama proporción geométrica continua aquella cuyos medios son iguales, y suele indicarse así:

$$\div\ 16 : 8 : 4,$$

y se lee: 16 es á 8 como 8 es á 4.

La propiedad fundamental de la proporción geométrica es que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Demostración.—Desarrollaremos nuestro raciocinio con la proporción:

$$5 : 15 :: 6 : 18$$

Fundándonos en que razón geométrica, es el cociente que resulta de dividir una por otra dos cantidades, tendremos que la primera razón es $\frac{5}{15}$ y que la segunda es $\frac{6}{18}$, y como proporción es la igualdad de dos razones, podremos establecer la ecuación

$$\frac{5}{15}=\frac{6}{18}$$

Como si cantidades iguales se multiplican por iguales, los resultados serán iguales, la ecuación anterior subsistirá multiplicando sus dos miembros por el producto 15×18 de los consecuentes y tendremos:

$$\frac{5}{15}\times15\times18=\frac{6}{18}\times15\times18.$$

Como en el primer miembro tenemos 15 como factor y 15 como divisor, el cociente será la unidad: y en el segundo miembro tenemos 18 que multiplica y 18 que divide, igual á 1; haciendo las correspondientes simplificaciones resulta que:

$$5\times18=6\times15,$$

pero 5 y 18 son los extremos, y 6 y 15 los medios, luego el producto de los extremos será igual al de los medios.

La propiedad fundamental sirve para resolver dos problemas de la proporción geométrica. primero encontrar un término cuando se conocen los otros tres; y segundo, hallar un medio geométrico entre dos números dados.

Regla.—*Para encontrar el extremo de una proporción geométrica, se multiplican los medios, y el producto se divide por el extremo conocido, para hallar un medio se multiplican los extremos, y el producto se divide por el medio conocido.*

Ejemplo.—Se quiere encontrar el cuarto término de la proporción geométrica.

$$3 : 9 :: 7 : x.$$

Multiplicaremos los medios 7 y 9, y el producto 63 lo dividiremos por el extremo 3 conocido; el cociente 21 será el cuarto término de la proporción:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

3 : 9 :: 7 : 21.

Este principio es el fundamento de la resolución de los problemas que se llaman *regla de tres* y de sus numerosas aplicaciones.

Demostración.—Como en toda proporción geométrica, según hemos visto, el producto de los extremos es igual al de los medios, el producto 63 de los medios será igual al del extremo 3 multiplicado por el extremo que buscamos; y como si el producto de dos cantidades se divide por una de ellas, el cociente será el otro factor, resulta, que dividiendo el producto de los medios por el extremo conocido 3, el cociente será el otro extremo, 21, cuarto término de la proporción.

Regla.—*Para encontrar un medio geométrico entre dos números dados, se multiplicarán éstos y al producto se le extrae la raíz cuadrada.*

Ejemplo.—Se quiere encontrar un medio geométrico entre 4 y 16. Multiplicaremos $4\times16=64$ y extrayendo la raíz cuadrada á 64; que es 8, este número será el medio geométrico buscado.

$\therefore$ 4 : 8 : 16.

Demostración.—Siendo el producto de los extremos igual al de los medios, en la proporción geométrica continua será igual al cuadrado del término medio; luego extrayendo la raíz cuadrada al producto de los números dados, obtendremos el medio geométrico buscado.

Teorema.—*Recíprocamente, siempre que en cuatro cantidades el producto de dos de ellas es igual al de las otras dos, las cuatro cantidades estarán en proporción geométrica.*

Demostración.—Si en las cuatro cantidades 8, 3, 24 y 9, se verifica que el producto de dos de ellas es igual al de las otras dos, podremos poner la ecuación:

$$8\times9=3\times24.$$

Dividiendo los dos miembros por el producto, 3×9, de la segunda por la cuarta cantidad, tendremos:

$$\frac{8\times9}{3\times9}=\frac{3\times24}{3\times9}$$

simplificando estos quebrados, resulta que

$$\frac{8}{3}=\frac{24}{9}$$

siendo iguales los dos cocientes que dan estas cantidades, podremos formar la proporción:

8 : 3 :: 24 : 9,

que es lo que se quería demostrar.

Este teorema nos sirve para efectuar diversas transformaciones en una proporción geométrica sin que se altere.

224.—Transformaciones que pueden efectuarse en la proporción geométrica.—Fundándonos en que, siempre que en cuatro cantidades se verifique que el producto de los extremos es igual al de los medios las cuatro cantidades estarán en proporción; podremos efectuar en una proporción dada, las tres transformaciones siguientes que referiremos á la proporción 3 : 4 :: 6 : 8.

1ª *Alternar, que es mudar de lugar los medios ó los extremos.*

Por ejemplo de	3 : 4 :: 6 : 8
Alternando medios se obtiene	3 : 6 :: 4 : 8
„ extremos	8 : 4 :: 6 : 3

Demostración.—Si se forma el producto de extremos y medios en la primera y en la segunda proporción, se obtiene:

$$3\times8=4\times6$$

después de alternar $\quad 3\times8=6\times4$

y como el orden de los factores no altera el producto, resulta que, si las cuatro cantidades estaban antes en proporción, después de haber alternado los medios ó los extremos, también lo estarán.

2ª *Invertir, que es poner los medios en lugar de los extremos, y éstos en lugar de aquellos.*

Por ejemplo: refiriéndonos á la proporción	3 : 4 :: 6 : 8
Invirtiendo se obtiene	4 : 3 :: 8 : 6

Demostración.—Si se forma el producto de los extremos y de los medios de ambas proporciones, se observará que como los factores son los mismos, sus productos serán iguales, y en consecuencia subsistirá la proporción después de haber invertido.

3ª *Permutar, que es poner la primera razón en lugar de la segunda, y recíprocamente.*

De la proporción	3 : 4 :: 6 : 8
Permutando se obtiene	6 : 8 :: 3 : 4

Demostración.—Subsiste la proporción porque los mismos números forman el producto de extremos y medios en ambas proporciones.

Fundándonos en que proporción es *la igualdad de dos razones,* podremos hacer en una proporción dada las tres siguientes transformaciones, las cuales referiremos á la proporción

12 : 9 :: 8 : 6

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

4ª *Componer, que es comparar la suma del antecedente y consecuente en cada razón, con el consecuente.*

Por ejemplo, $12 : 9 :: 8 : 6$

Componiendo $12+9 : 9 :: 8+6 : 6.$

En efecto, poniendo la proporción primitiva en forma de ecuación, tendremos:

$$\frac{12}{9}=\frac{8}{6}$$

como si á cantidades iguales se agregan iguales, los resultados serán iguales; agregando 1, resulta:

$$\frac{12}{9}+1=\frac{8}{6}+1$$

ejecutando la suma indicada:

$$\frac{12+9}{9}=\frac{8+6}{6}$$

formando con estos dos cocientes iguales una proporción, se tendrá:

$$12+9 : 9 :: 8+6 : 6$$

expresión que nos hace ver que puede hacerse en una proporción geométrica la transformación que hemos llamado *componer*.

5ª *Dividir, que es comparar la diferencia, entre el antecedente y consecuente en cada razón, con el consecuente.*

Por ejemplo: $12 : 9 :: 8 : 6$

Dividiendo $12-9 : 9 :: 8-6 : 6$

En efecto, tenemos $\frac{12}{9}=\frac{8}{6}$

quitando 1 á estas cantidades iguales, se tiene:

$$\frac{12}{9}-1=\frac{8}{6}-1$$

substituyendo por 1 respectivamente sus valores $\frac{9}{9}$ y $\frac{6}{6}$, se tendrá:

$$\frac{12}{9}-\frac{9}{9}=\frac{8}{6}-\frac{6}{6}$$

ó bien

$$\frac{12-9}{9}=\frac{8-6}{6}$$

poniendo estos cocientes en forma de proporción:

$$12-9 : 9 :: 8-6 : 6$$

Expresión que demuestra que puede efectuarse la transformación que hemos llamado *dividir*.

6ª *Se pueden multiplicar ó dividir por un mismo número los antecedentes de una proporción, así como sus consecuentes, sin alterar la proporción.*

Sea la proporción $12 : 9 :: 8 : 6.$

Multiplicando los antecedentes por 3 cada razón se hará 3 veces mayor. $36 : 9 :: 24 : 6.$

Dividiendo los antecedentes por 2 cada razón se hará 2 veces menor. $6 : 9 :: 4 : 6.$

Multiplicando los consecuentes por 5 cada razón se hará 5 veces menor. $12 : 45 :: 8 : 30.$

Dividiendo los consecuentes por 3 cada razón se hará 3 veces mayor. $12 : 3 :: 8 : 2.$

Pero como en cualquier caso las dos razones han sufrido igual variación, resulta, que si antes eran iguales, lo serán después de haberse multiplicado ó dividido los antecedentes ó consecuentes por un mismo número.

225.—Teoremas ó propiedades de la proporción geométrica.

I.—*Los antecedentes caben uno en otro el mismo número de veces que los consecuentes.*

Sea la proporción $4 : 3 :: 8 : 6$

Alternando medios $4 : 8 :: 3 : 6$

poniendo esta proporción en forma de ecuación, resulta $\frac{4}{8}=\frac{3}{6}$, esto es, el cociente que se obtiene de dividir los antecedentes de la proporción primitiva es igual al que produce la división de los consecuentes, que es lo que se quería demostrar.

II.—*La suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la proporción $4 : 3 :: 8 : 6.$

Alternando medios $4 : 8 :: 3 : 6.$

Componiendo $4+8 : 8 :: 3+6 : 6.$

Alternando medios $4+8 : 3+6 :: 8 : 6.$

y supuesto que 4 y 8 son los antecedentes, y 3 y 6 son los consecuentes, resulta demostrado el teorema.

III.—*La diferencia de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la proporción $4 : 3 :: 8 : 6.$

Alternando medios $4 : 8 :: 3 : 6.$

Dividiendo $4-8 : 8 :: 3-6 : 6.$

Alternando medios $4-8 : 3-6 :: 8 : 6.$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

y supuesto que 4 y 8 son los antecedentes, y 3 y 6 son los consecuentes, resulta demostrado el teorema.

IV.—*Una proporción no se altera cuando se multiplican ó dividen sus cuatro términos por un mismo número.*

Sea la proporción $4 : 3 :: 8 : 6.$

Multiplicando por 10 todos los términos $40 : 30 :: 80 : 60.$

Esto se funda en que una razón geométrica no se altera cuando se multiplican ó parten sus dos términos por un mismo número.

V.—*Si se multiplican ordenadamente dos proporciones, los cuatro productos que resulten estarán igualmente en proporción.*

Sean las proporciones

$$3 : 4 :: 6 : 8$$
$$10 : 9 :: 20 : 18$$

y vamos á demostrar que estarán igualmente en proporción los productos

$$3\times10 : 4\times9 :: 6\times20 : 8\times18$$

poniendo cada proporción en forma de ecuación, se tendrá:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$
$$\frac{10}{9}=\frac{20}{18}$$

y como si cantidades iguales se multiplican por iguales, los resultados también lo serán, se tendrá:

$$\frac{3}{4}\times\frac{10}{9}=\frac{6}{8}\times\frac{20}{18}$$

ejecutando la operación

$$\frac{3\times10}{4\times9}=\frac{6\times20}{8\times18}$$

y con estos valores podemos establecer la proporción

$$3\times10 : 4\times9 :: 6\times20 : 8\times18$$

que es lo que debíamos demostrar.

VI.—*Si cuatro cantidades están en proporción, sus potencias del mismo grado también lo estarán.*

Sea la proporción $3 : 4 :: 6 : 8$

Puesta en forma de ecuación $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

Si cantidades iguales se elevan á una misma potencia, los resultados serán iguales; y como para elevar un quebrado á una potencia, es nece-

sario elevar cada uno de sus términos, resulta, que si elevamos los dos quebrados $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ á una potencia cualquiera, á la cuarta, por ejemplo, tendremos:

$$\frac{3^4}{4^4}=\frac{6^4}{8^4}$$

y con estas cuatro cantidades formaremos una proporción,

$$3^4 : 4^4 :: 6^4 : 8^4$$

resultando así demostrado el teorema.

VII.—*Si cuatro cantidades están en proporción lo estarán igualmente sus raíces de un mismo grado.*

Sea la proporción $27 : 64 :: 216 : 512.$

Puesta en forma de ecuación será $\frac{27}{64}=\frac{216}{512}.$

y como las raíces de cantidades iguales son iguales, y la raíz de un quebrado se obtiene extrayéndola al numerador y al denominador, resulta que extrayendo, por ejemplo, la raíz cúbica de los dos miembros de la última ecuación, se obtiene:

$$\sqrt[3]{\tfrac{27}{64}}=\sqrt[3]{\tfrac{216}{512}},$$

ó

$$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{512}}$$

ecuación que puesta en forma de proporción,

$$\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{64} :: \sqrt[3]{216} : \sqrt[3]{512}.$$

demuestra el teorema.

VIII.—*Cuando deban multiplicarse ordenadamente dos ó más proporciones, se podrán suprimir los factores que sean comunes á los dos términos de la misma razón, los que sean comunes á los antecedentes, y los que lo sean á los consecuentes, multiplicándose únicamente los términos restantes.*

Sean por multiplicar las tres proporciones
$$\begin{cases} 2 : (3) :: 4 : 6 \\ (3) : 9 :: (5) : 15 \\ (5) : 4 :: 10 : 8. \end{cases}$$

$$2 : 9\times4 :: 4\times10 : 6\times15\times8.$$

En este ejemplo se podrá suprimir 3, que hemos colocado dentro de un paréntesis, por ser factor común al antecedente y al consecuente

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

de la primera razón: y se podrá suprimir 5 por ser factor común á los antecedentes de la proporción final.

La primera operación equivale á dividir por 3 los dos términos de la primera razón de la proporcion final, lo que no la altera; y la segunda operación equivale á dividir los antecedentes de la proporción resultante por 5, lo que tampoco la altera; pero debe tenerse cuidado de *no suprimir un término común á los medios ó á los extremos.* En el ejemplo de que nos ocupamos, se tiene 4 como factor de los medios que no puede suprimirse.

(226).—Observaciones sobre las razones y las proporciones.—La razón aritmética es la diferencia entre dos cantidades. La geométrica es la indicación de un cociente por las cantidades que lo engendran. Las proporciones son la igualdad de dos razones. Toda la teoría y aplicaciones de las proporciones, están fundadas en la igualdad de las razones que constituyen la proporción, ó en su propiedad fundamental, que se deduce de esta igualdad, ó de que la suma, y en su caso de que el producto de los medios es igual al de los extremos. La principal aplicación de las proporciones es la de encontrar el cuarto término cuando se conocen los otros tres; pero siendo de uso frecuente las propiedades y transformaciones de las proporciones en matemáticas, conviene á los alumnos estar muy familiarizados con todo lo concerniente á ellas.

REGLA DE TRES.

227.—Problema.—En una semana 10 caballos consumen 3 cargas de cebada: en el mismo tiempo 25 caballos ¿cuántas cargas consumirán?

Como si el número de caballos se duplica, se duplicará igualmente el número de cargas de cebada que consumirán, y como si se triplican los caballos se triplicarán las cargas de cebada, se infiere que la misma relación que haya entre los números de los caballos, habrá entre las cargas consumidas, y por tanto, estas cantidades, por la naturaleza de la cuestión, serán proporcionales. Si representamos por x el número de cargas de cebada que buscamos, podremos establecer la siguiente proporción geométrica:

cab. cab. cgs. cgs.
$$10 : 25 :: 3 : x$$

y como, conforme á lo explicado en las proporciones *para determinar el valor del cuarto término que se busca, hay que multiplicar los medios*, 3 y 25, *y dividir el producto por el extremo*, 10, *conocido tendremos que*

$$x=\frac{3\times 25}{10}=7\tfrac{1}{2} \text{ cargas de cebada,}$$

que será el consumo de los 25 caballos.

Se llama regla de tres, todo problema en que conocidos tres términos de una proporción geométrica, queda por determinar el cuarto.

228.—Problemas que pueden resolverse por regla de tres.—*Se conoce que una cuestión es de regla de tres cuando satisface á las siguientes condiciones*: 1ª, *que el enunciado del problema esté dividido en dos períodos*; 2ª, *que los términos del primer período sean homogéneos respectivamente á los del segundo*; 3ª, *que se conozcan tres cantidades y se busque una*; y 4ª, *que por la naturaleza del problema las cantidades sean proporcionales.*

Supuesto que en toda proporción la relación entre las dos cantidades que forman la 1ª razón, ha de ser la misma que existe entre las otras dos, se comprende la necesidad de la división del enunciado del problema en dos períodos, y la de que los términos del primer período sean respectivamente de la misma especie que los del segundo. Además, como la cuestión lleva por objeto encontrar el cuarto término de una proporción; es indispensable que se conozcan tres cantidades y se busque una.

En cuanto á la 4ª condición, fácilmente se comprende que para que pueda determinarse la cantidad desconocida por medio de la regla dada para hallar el 4º término de una proporción geométrica, es indispensable que las cantidades del problema, por la naturaleza de éste, sean proporcionales.

En el problema propuesto es fácil ver que están satisfechas las tres primeras condiciones, y respecto de la 4ª observaremos que los caballos y las cargas de cebada consumidas son cantidades *relativas*, puesto que del número de los primeros depende el de las cargas, y además que si se multiplican por determinado número los caballos, resultarán las cargas multiplicadas por el *mismo número*, y esta circunstancia, que depende de la naturaleza de la cuestión, es lo que hace que las cantidades que la forman *sean proporcionales.*

Consideremos el siguiente ejemplo: caminando 12 leguas al día, ha tardado una persona 15 días para ir de una ciudad á otra; caminando 10 leguas ¿cuántos dias empleará para recorrer la misma distancia?

En este problema las cantidades *relativas* son las leguas que se caminan diariamente y los días que se emplean; pero la naturaleza de la cuestión es tal, que si se *duplica* el número de leguas que se andan cada

de la primera razón: y se podrá suprimir 5 por ser factor común á los antecedentes de la proporción final.

La primera operación equivale á dividir por 3 los dos términos de la primera razón de la proporcion final, lo que no la altera; y la segunda operación equivale á dividir los antecedentes de la proporción resultante por 5, lo que tampoco la altera; pero debe tenerse cuidado de *no suprimir un término común á los medios ó á los extremos.* En el ejemplo de que nos ocupamos, se tiene 4 como factor de los medios que no puede suprimirse.

(226).—Observaciones sobre las razones y las proporciones.—La razón aritmética es la diferencia entre dos cantidades. La geométrica es la indicación de un cociente por las cantidades que lo engendran. Las proporciones son la igualdad de dos razones. Toda la teoría y aplicaciones de las proporciones, están fundadas en la igualdad de las razones que constituyen la proporción, ó en su propiedad fundamental, que se deduce de esta igualdad, ó de que la suma, y en su caso de que el producto de los medios es igual al de los extremos. La principal aplicación de las proporciones es la de encontrar el cuarto término cuando se conocen los otros tres; pero siendo de uso frecuente las propiedades y transformaciones de las proporciones en matemáticas, conviene á los alumnos estar muy familiarizados con todo lo concerniente á ellas.

REGLA DE TRES.

227.—Problema.—En una semana 10 caballos consumen 3 cargas de cebada: en el mismo tiempo 25 caballos ¿cuántas cargas consumirán?

Como si el número de caballos se duplica, se duplicará igualmente el número de cargas de cebada que consumirán, y como si se triplican los caballos se triplicarán las cargas de cebada, se infiere que la misma relación que haya entre los números de los caballos, habrá entre las cargas consumidas, y por tanto, estas cantidades, por la naturaleza de la cuestión, serán proporcionales. Si representamos por x el número de cargas de cebada que buscamos, podremos establecer la siguiente proporción geométrica:

cab. cab. cgs. cgs.
$$10 : 25 :: 3 : x$$

y como, conforme á lo explicado en las proporciones *para determinar el valor del cuarto término que se busca, hay que multiplicar los medios*, 3 y 25, *y dividir el producto por el extremo*, 10, *conocido tendremos que*

$$x=\frac{3\times 25}{10}=7\tfrac{1}{2} \text{ cargas de cebada,}$$

que será el consumo de los 25 caballos.

Se llama regla de tres, todo problema en que conocidos tres términos de una proporción geométrica, queda por determinar el cuarto.

228.—Problemas que pueden resolverse por regla de tres.—*Se conoce que una cuestión es de regla de tres cuando satisface á las siguientes condiciones*: 1ª, *que el enunciado del problema esté dividido en dos períodos*; 2ª, *que los términos del primer período sean homogéneos respectivamente á los del segundo*; 3ª, *que se conozcan tres cantidades y se busque una*; y 4ª, *que por la naturaleza del problema las cantidades sean proporcionales.*

Supuesto que en toda proporción la relación entre las dos cantidades que forman la 1ª razón, ha de ser la misma que existe entre las otras dos, se comprende la necesidad de la división del enunciado del problema en dos períodos, y la de que los términos del primer período sean respectivamente de la misma especie que los del segundo. Además, como la cuestión lleva por objeto encontrar el cuarto término de una proporción; es indispensable que se conozcan tres cantidades y se busque una.

En cuanto á la 4ª condición, fácilmente se comprende que para que pueda determinarse la cantidad desconocida por medio de la regla dada para hallar el 4º término de una proporción geométrica, es indispensable que las cantidades del problema, por la naturaleza de éste, sean proporcionales.

En el problema propuesto es fácil ver que están satisfechas las tres primeras condiciones, y respecto de la 4ª observaremos que los caballos y las cargas de cebada consumidas son cantidades *relativas*, puesto que del número de los primeros depende el de las cargas, y además que si se multiplican por determinado número los caballos, resultarán las cargas multiplicadas por el *mismo número*, y esta circunstancia, que depende de la naturaleza de la cuestión, es lo que hace que las cantidades que la forman *sean proporcionales.*

Consideremos el siguiente ejemplo: caminando 12 leguas al día, ha tardado una persona 15 días para ir de una ciudad á otra; caminando 10 leguas ¿cuántos dias empleará para recorrer la misma distancia?

En este problema las cantidades *relativas* son las leguas que se caminan diariamente y los días que se emplean; pero la naturaleza de la cuestión es tal, que si se *duplica* el número de leguas que se andan cada

día, los dias que se emplean para recorrer la distancia, serán la *mitad* de los que se emplearon antes; esto es, *multiplicando* por un *número* dado el camino recorrido diariamente, resultarán divididos por el *mismo número* los dias necesarios para recorrer la distancia. Esta circunstancia es la que constituye que las cantidades del problema sean proporcionales. En el 1er ejemplo las cantidades relativas están en razón directa, y en el 2º están en razón inversa.

Cantidades relativas son las que están ligadas entre sí, de modo que el valor de una depende del que tenga la otra.

Para conocer si las cantidades relativas son proporcionales, se observará si, á causa de la naturaleza de la cuestión, multiplicando una de las cantidades por un número, su relativa debe resultar multiplicada unas veces, y dividida otras, por el mismo número.

Esta investigación es de la mayor importancia, porque la facilidad con que la regla de tres conduce á la determinación de una cantidad desconocida, hace que á veces se quiera aplicar indebidamente á algunos problemas. Por ejemplo, si se sabe que para enlosar un patio cuadrado que tiene 10 varas de lado, se han necesitado 100 losas de á vara cuadrada, y se quiere saber cuántas se necesitarán para enlosar otro patio también cuadrado de 20 varas de lado, este problema no será de regla de tres, porque en un patio cuyo lado es doble, no entra doble número de losas, sino cuádruplo.

Hay problemas que se resuelven por una sola proporción, y otros por varias proporciones ligadas entre sí.

229.—Casos de la regla de tres.—Para facilitar la resolución de los problemas relativos á la regla de tres, se subdivide ésta *en simple y compuesta;* y la simple *en directa ó inversa.*

Se llama regla de tres simple, aquella en que se conocen tres cantidades y se busca una.

Regla de tres compuesta, es aquella en que se conocen más de tres cantidades ligadas entre sí por varias proporciones geométricas y se tiene que determinar una cantidad desconocida.

Antes de definir las reglas de tres directa é inversa, haremos algunas explicaciones.

En toda regla de tres, dos de las cantidades conocidas son homogéneas y la otra es de la especie del número que se busca; además, las cantidades generalmente de diversa especie son *relativas* entre sí de dos en dos. Por ejemplo, si sabiendo que 30 varas de paño han costado 50 pesos, se quiere averiguar cuánto costarán 40 varas; en este caso 30 varas y 50 pesos son cantidades *relativas*, así como 40 varas y el valor que se busca. Pues bien, en la regla de tres se presentan dos casos distintos: primero, cuando la naturaleza de la cuestión es tal, que al cambiar de valor una de las cantidades, su *relativa* experimenta una variación en el mismo sentido, esto es, crece, cuando la primera crece, ó disminuye cuando la primera cantidad disminuye; segundo, cuando la variación es en sentido contrario, esto es, que cuando una cantidad aumenta, su *relativa* disminuye; y cuando una cantidad disminuye, su *relativa* crece proporcionalmente á la disminución de la primera. En el primer caso, se dice que la regla de tres es *directa*, en el segundo que es *inversa.* Algunos ejemplos aclararán esto.

Si 20 hombres han hecho 35 varas de terraplén en un día, 40 hombres cuántas varas harán? Aquí se comprende, por la naturaleza del problema, que si el número de hombres que trabaja aumenta, igualmente aumentará el número de varas; por tanto, como de *más hombres* vamos á buscar *más varas*, la regla de tres será *directa.*

Para hacer una obra, 20 hombres han empleado 5 dias, 40 hombres ¿cuántos dias emplearán? Aquí se observa que mientras *más* hombres trabajen, *menos* tiempo emplearán; en consecuencia como de *más hombres* vamos á buscar *menos dias*, la regla de tres será *inversa.*

Es fácil darse cuenta de la razón por la cual en los problemas de regla de tres directa, la variación de las cantidades relativas es en el mismo sentido, y en los de regla de tres inversa es en sentido contrario.

Por ejemplo, cuando sabiendo que 20 hombres han hecho en un dia 35 varas de terraplén, queremos determinar cuántas varas harán 40 hombres en el mismo tiempo; la incógnita, que son las varas del terraplén, es producto de su cantidad relativa, el número de hombres, multiplicado por las varas de terraplén que al dia hace cada hombre; y como el producto experimenta variaciones semejantes á las de uno de sus factores, (62) el número de hombres que trabajan, la regla de tres será directa. El segundo factor del valor de la incógnita, las varas de terraplén que al día hace cada hombre, no se expresa ni hay necesidad de conocerlo para resolver nuestro problema; pero se supone constante y de esto resulta que *las cantidades relativas, que son el producto y uno de sus factores, varíen de un modo semejante.*

Cuando sabiendo que 20 hombres han empleado 5 días para hacer una obra, queremos determinar cuántos días emplearán 40 hombres para hacer otra obra igual; esta obra, cuyo valor numérico no se indica en el problema, es *un producto constante* siendo sus factores los hombres que trabajan, la obra diaria que cada uno hace y los días que dura el trabajo, de lo que resulta que *las cantidades relativas son factores de un producto fijo*, por lo cual si uno de estos factores, el número de hombres que trabajan, *aumenta*, forzosamente tendrá que *disminuir* el otro factor,

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

los días que trabajan, en la misma relación (63), y esto hace que el problema sea de regla de tres inversa, para cuya resolución no se necesita conocer la obra total ni la parte de obra que cada hombre hace al día.

Se ve, pues, que cuando por la naturaleza de la cuestión *las cantidades relativas sean el producto y uno de sus factores* variarán en el mismo sentido y la regla de tres será directa, y que cuando *las cantidades relativas sean dos de los factores de un producto constante*, tendrán que variar en sentido contrario y la regla de tres será inversa.

Definición.—*Se llama regla de tres directa, aquella en la que las variaciones de las cantidades relativas se verifican en el mismo sentido*, esto es, en la que de *lo más* se va á buscar *lo más* ó de *lo menos* se va á buscar *lo menos*.

Definición.—*Regla de tres inversa, es aquella en la que las variaciones de las cantidades relativas se verifican en sentido contrario*; esto es, en la que *de lo más* se va á buscar *lo menos* ó de *lo menos* se va á buscar *lo más*.

230.—Resolución de la regla de tres simple.—Cuando conforme á lo explicado en el número 228, se ha averiguado que una cuestión debe resolverse por medio de una proporción, queda por determinar el lugar que cada cantidad debe ocupar en ella.

Se tiene costumbre de que el cuarto término sea la cantidad que se busca, por lo cual será el tercero la cantidad de la misma especie que la incógnita: establecida así la segunda razón de la proporción, la primera razón la formarán las cantidades conocidas de la misma especie; pero el orden de éstas lo determina la naturaleza de la cuestión, fundándose en que en toda proporción geométrica, si un consecuente es mayor que su antecedente, el consecuente de la otra razón debe ser también mayor que su antecedente; y si un consecuente es menor que su antecedente, el consecuente de la otra razón también lo será.

Tomemos como ejemplo las siguientes cuestiones:

1ª Un correo que camina con una velocidad uniforme, ha andado en 16 horas 50 leguas; en 24 horas, ¿cuántas leguas andará? Formada la segunda razón con 50 leguas y con x, se reflexionará para determinar el orden de los números 16 y 24 horas que han de formar la primera razón, que como en más horas se andarán más leguas, naturalmente el término que buscamos será mayor que su antecedente, 50 leguas; y por tanto el consecuente de la primera razón deberá ser mayor que su antecedente, y la proporción quedará definitivamente establecida así:

hs. hs. lgs.
$$16 : 24 :: 50 : x$$

y se tendrá:

$$x=\frac{24\times 50}{16}=75 \text{ leguas}$$

2ª Para ir de una ciudad á otra, un correo que camina 3 leguas por hora ha dilatado 16 horas; caminando 4 leguas por hora ¿cuánto tiempo empleará para andar la misma distancia? La segunda razón se formará con 16 y el término que se busca; y la primera razón la expresaremos con las velocidades 3 y 4 leguas por hora. Para determinar el orden de los términos de la primera razón, notaremos que supuesto que mientras más leguas se andan en cada hora, menos tiempo se empleará para recorrer una distancia dada, el término que buscamos será menor que 16 horas; y por tanto el consecuente de la primera razón deberá ser menor que su antecedente, y la proporción quedará establecida así:

$$4^{\text{lgs}} : 3^{\text{lgs}} :: 16^{\text{hs}} : x$$

$$x=\frac{3\times 16}{4}=12$$

Se ve, pues, que por el examen atento de la cuestión, puede siempre determinarse si la incógnita debe ser mayor ó menor que su homogénea; *en el caso que deba ser mayor*, se tendrá cuidado de colocar en la primera razón, formada con las dos cantidades homogéneas conocidas, como 2º *término la mayor; si por el contrario, la incógnita ha de ser menor* que su homogénea, se colocará en la primera razón *como* 2º *término* la cantidad menor de las dos conocidas de la misma especie.

Estos raciocinios siempre conducirán á colocar en el lugar correspondiente de la proporción los datos de un problema de regla de tres, que es lo que se llama plantear la cuestión; pero mucho se facilita la resolución determinando préviamente, si la regla de tres es directa ó inversa y aplicando en seguida la siguiente

Regla para resolver la regla de tres planteando la proporción.—*La primera razón se formará con las dos cantidades homogéneas conocidas; poniendo como primer término, cuando la regla de tres sea directa la cantidad relativa á la conocida de la misma especie que la incógnita, y cuando sea inversa, la relativa á la incógnita. La segunda razón se formará con la cantidad de la misma especie que la incógnita y con la incógnita.* Vamos á aplicar esta regla á un problema de la regla de tres directa y á otro de inversa.

Regla de tres directa.—Si 12 marcos de plata han costado 102 pesos, ¿8 marcos cuánto costarán? Generalmente se escriben los datos de la cuestión de la manera siguiente:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

marcos. $
12 102
marcos
8 x

Siendo el problema de regla de tres directa, en razón de que menos marcos costarán menos pesos, formaremos la primera razón con las dos cantidades homogéneas conocidas, teniendo cuidado de poner como primer término 12 marcos que es la cantidad relativa á 102 pesos, cantidad de la especie de la incógnita, estableciendo así la proporción:

marcos $
12 : 8 :: 102 : x

Para cerciorarnos de que está bien planteada la proporción raciocinaremos como sigue: debiendo ser, por la naturaleza de la cuestión, el valor de la incógnita x menor que $102, en la primera razón deberá también ser el consecuente 8 marcos menor que el antecedente 12 marcos, y estando bien establecidos los términos de la proporción, el valor que buscamos será:

$$x=\frac{102\times 8}{12}=\$68$$

Regla de tres inversa.—Trabajando un hombre diariamente 6 horas, ha empleado 12 días para hacer una obra; trabajando 8 horas, ¿cuántos días empleará?

horas. días.
6 12
horas.
8 x

Supuesto que trabajando *más* horas diariamente, se emplearán *menos* días para hacer la misma obra, la regla de tres será inversa y aplicando la regla dada, formaremos la primera razón con las cantidades homogéneas *conocidas*, teniendo cuidado de poner como primer término, 8 *horas, que es la relativa á la incógnita*, estableciendo la proporción como sigue:

hs. hs. días.
8 : 6 :: 12 : x

Nos cercioraremos de que está bien planteada la porporción raciocinando como sigue: debiendo ser, por la naturaleza de la cuestión el valor de la incógnita x menor que 12 días, en la primera razón deberá ser igualmente el consecuente 6 horas menor que su antecedente 8 horas. Estando bien establecidos los términos de la proporción, el valor que buscamos será:

$$x=\frac{12\times 6}{8}=9 \text{ días.}$$

Método de reducción á la unidad.—Supuesto que regla de tres es una cuestión en la que conociendo tres términos de una proporción geométrica se trata de determinar el cuarto, el método fundamental para resolver esta clase de problemas, es plantear la proporción y calcular el valor de la cantidad desconocida; pero en aritmética se emplea también otro procedimiento, que vamos á explicar, el cual evita la clasificación de si la regla de tres es directa ó inversa y transforma estos problemas en aplicaciones del uso de la multiplicación: conocido el valor de una unidad determinar el de muchas; y del uso de la división: conocido el valor de varias unidades determinar el de una.

Ejemplo.—12 marcos de plata han costado 102 pesos: 8 marcos ¿cuántos pesos costarán?

Dispondremos los datos del problema como sigue:

12 marcos han costado $102
8 marcos costarán x

Al principio prescindiremos del segundo período y fijándonos en el primero, diremos: si 12 marcos han costado $102, un marco costará 12 veces menos, esto es:

1 marco costará... $\$\frac{102}{12}$

En seguida, tomando en consideración el segundo período de la cuestión, diremos:

si 1 marco cuesta ... $\$\frac{102}{12}$

8 marcos costarán.... $\$\frac{102\times 8}{12}=\$68$

Ejemplo.—12 albañiles han hecho una pared en 15 días; trabajando 18 albañiles ¿cuántos días emplearán para hacer otra pared igual?

Para hacer una pared 12 albañiles han empleado 15 días
» 18 » emplearán x

Fijándonos en el primer período, diremos: si trabajando 12 albañiles para hacer una pared emplean 15 días, un albañil habría empleado 12 veces más días, esto es:

días
1 albañil empleará... 15×12

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
ALERE FLAMMAM VERITATIS
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Considerando el segundo período de la cuestión, diremos: si 1 albañil emplea 15×12 días para hacer una pared

$$18 \text{ albañiles emplearán....} \overset{\text{días}}{\frac{15\times12}{18}} = 10 \text{ días}$$

Regla para resolver los problemas de regla de tres por el método de reducción á la unidad.—*En el primer período de la cuestión se determinará el valor de una unidad de la cantidad relativa á la conocida de igual especie que la incógnita; en seguida considerando el segundo período, se calculará el valor de la cantidad relativa á la incógnita.*

Es conveniente limitarse á indicar los cálculos y simplificar el valor de la incógnita antes de ejecutar las operaciones.

Ejemplos.—10 esterios de arena pesan 24 toneladas, 35 esterios ¿cuántas toneladas pesarán?

Si 10 esterios pesan 24 toneladas

1 esterio pesará $\frac{24 \text{ ton.}}{10}$

y 35 esterios pesarán $\frac{24\times35}{10} = 84$ toneladas.

Estudiando 5 páginas al día se repasa el curso en 60 días; estudiando 6 páginas ¿en cuántos días se repasaría?

5 páginas 60 días

6 „ x

Si estudiando 5 páginas se hace el repaso en 60 días, estudiando 1 página se hará en 60 ds. $\times5$

y estudiando 6 páginas se hará en $\frac{60 \text{ ds.}\times5}{6} = 50$ ds.

Sea cual fuere el procedimiento que se use, fácil será persuadirse de que el valor de la incógnita se forma siempre conforme á la siguiente

Regla para resolver una regla de tres sin plantear la proporción.—*En una regla de tres, se obtiene el valor de la incógnita multiplicando la cantidad de su misma especie por un quebrado formado con las cantidades homogéneas conocidas, en el que la cantidad relativa á la incógnita se colocará, cuando la regla de tres sea directa, como numerador, y cuando sea inversa se colocará como denominador.*

Basta recordar que el valor de un quebrado experimenta variaciones en el mismo sentido que su numerador, é inversas de las de su denominador para comprender que, dependiendo el valor de la incógnita del de un quebrado, hay que *colocar la cantidad relativa á la incógnita, cuando la regla de tres sea directa, como numerador, y que cuando sea inversa debe ponerse como denominador.*

La aplicación de esta última regla evita el planteo de la proporción y los raciocinios necesarios para resolver una regla de tres por el método de reducción á la unidad.

Aplicaremos esta regla á un ejemplo relativo á cada una de las especies de regla de tres.

16 varas de paño han costado 64 pesos;

124 varas ¿cuánto costarán?

16 v. $ 64

24 x

como *más* varas costarán *más* pesos, la regla de tres será directa, y conforme á la regla el valor de la incógnita se obtendrá multiplicando la cantidad de su misma especie, $64, por un quebrado formado con las cantidades homogéneas conocidas, en el que la cantidad *relativa á la incógnita*, 24 varas, se pondrá *como numerador*, por ser la regla de tres *directa*.

Esto es:

$$x = \$\,64\times\frac{24}{16} = \$\,96$$

6 albañiles han levantado una pared en 10 días, 15 albañiles ¿en cuántos días levantarán otra igual?

$6^{\text{alb.}}$ $10^{\text{ds.}}$

15 x

Como trabajando *más* albañiles tardarán *menos* días, la regla de tres es inversa, y el valor de la incógnita se obtendrá multiplicando la cantidad de su misma especie, 10 días, por un quebrado formado con las cantidades homogéneas conocidas, en el que la cantidad *relativa á la incógnita*, 15 albañiles, se pondrá *como denominador*, por ser la regla de tres *inversa*.

Esto es:

$$x = \overset{4.}{10}\times\frac{6}{15} = 4 \text{ días.}$$

231.—Ejemplos de la regla de tres simple.—I. Para elevar cierta ta cantidad de agua á la altura de 6 metros, se emplea la fuerza de 4 caballos de vapor; para elevar la misma cantidad de agua á 9 metros de altura ¿cuántos caballos se necesitarán?

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

II. Caminando un tren de ferrocarril con la velocidad de 36 millas por hora, dilata en recorrer una distancia 10 horas; caminando con la velocidad de 30 millas ¿cuántas horas tardará?

III. Una máquina de vapor de la fuerza de 20 caballos consume 320 cargas de leña á la semana; otra máquina de la fuerza de 55 caballos ¿cuántas cargas consumirá?

IV. Una fuente á la cual le entran 8 pajas de agua se llena en 5 horas; con otro chorro que produce 12 pajas ¿en cuántas horas se llenará?

232.—Prueba de la regla de tres simple.—Se comprueba la regla de tres, poniendo en lugar de la incógnita el número encontrado; y considerando como incógnita uno de los números conocidos, debe encontrarse este como resultado.

233.—Regla de tres compuesta.—Ya dijimos que regla de tres compuesta es todo problema en el que conociéndose más de tres cantidades ligadas entre sí por varias proporciones geométricas se trata de determinar una desconocida.

Se conoce que un problema es de regla de tres compuesta en que satisface las siguientes condiciones: 1ª, *el enunciado de la cuestión está dividido en dos períodos;* 2ª, *las cantidades del primer período son respectivamente homogéneas á las del segundo;* 3ª, *por la naturaleza de la cuestión las cantidades son proporcionales;* y 4ª, *una de las cantidades conocidas es de la especie de la incógnita.*

Por ejemplo:

Si 10 hombres han hecho en 20 dias una zanja de 200 metros de largo, 25 hombres en 18 días ¿cuántos metros harán?

hs.	ds.	metros.
10	20	200
25	18	x

El método natural que ocurre para resolver la regla de tres compuesta, es suponer por un momento iguales algunas de las cantidades homogéneas de la cuestión menos dos, con las cuales y con la cantidad de la misma especie que la incógnita, se forma una regla de tres, y resolviendo la proporción se obtiene un primer resultado. En seguida, con otras dos de las cantidades de la misma especie y con el cuarto término hallado en la primera proporción, se forma una segunda proporción y se obtiene un segundo resultado, y así sucesivamente se van estableciendo tantas proporciones como sean necesarias, formando siempre la primera razón con dos de las cantidades homogéneas conocidas; y poniendo como tercer término, el que sirvió de cuarto en la proporción anterior. Cada proporción, según sea el caso, se planteará como regla de tres directa ó inversa.

Refiriéndonos al ejemplo propuesto diremos primero: si 10 hombres han hecho 200 metros de zanja, 25 hombres ¿cuánto harán?

$$\overset{\text{hs.}}{10} : \overset{\text{hs.}}{25} :: \overset{\text{ms.}}{200} : x \qquad x=\frac{25\times 200}{10}=\overset{\text{ms.}}{500}$$

y en seguida, si en 20 días se han hecho 500 metros de zanja, en 18 días ¿cuántos se harán?

$$\overset{\text{ds.}}{20} : \overset{\text{ds.}}{18} :: 500 : x' \qquad x'=\frac{18\times 500}{20}=450$$

450 metros es el valor del resultado que se busca.

Este método se simplifica en la práctica, omitiendo la resolucion de cada proporción, planteando previamente todas, multiplicándolas ordenadamente y haciendo las abreviaciones posibles antes de resolver la proporción final, de la manera siguiente: (225—V y VIII.)

$$\begin{array}{r} 10 : 25 :: 200 : x \\ 20 : 18 :: \quad x : x' \\ \hline 10\times 20 : 25 \times 18 :: 200\times x : x\times x' \end{array}$$

La segunda razón puede abreviarse *siempre* dividiendo sus términos por x, y en seguida dividiremos los antecedentes sucesivamente por 10 y por 20, y quedará:

$$1 : 25\times 18 :: 1 : x'=450 \text{ metros.}$$

En lo expuesto se funda la siguiente

Regla para resolver la regla de tres compuesta planteando proporciones.—*Se escriben los datos del problema poniendo las cantidades de la misma especie unas debajo de otras: se suponen iguales las cantidades homogéneas menos dos de ellas, con las cuales y con el término de la misma especie que la incógnita se forma una proporción designando por x el cuarto término: en seguida, con otras dos de las cantidades homogéneas y con el cuarto término de la primera proporción, que pasa á tercero, se forma una segunda, designando por x' su cuarto término; y así se continúa estableciendo proporciones hasta haber hecho entrar todos los datos del problema.*

Cada regla de tres simple se planteará conforme á la regla correspondiente, según sea directa ó inversa (230). *En seguida se multiplican ordenadamente las proporciones establecidas, indicando solamente las multipli-*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

caciones, y antes de resolver la proporción final, se hacen las abreviaciones posibles, suprimiendo los factores comunes á los términos de cada razón y á los antecedentes.

Sea como ejemplo el siguiente:

30 hombres han hecho una pared de 120 varas de largo y 22 pulgadas de espesor en 7 días, trabajando 8 horas diarias; ¿en cuántos días harán 40 hombres una pared de 150 varas de largo y 28 pulgadas de espesor trabajando 18 horas al día?

hs. vs. ps. ds. hor
30—120—22—7—8
hs.
40—150—28—x—10

La resolución será como sigue:

$$\begin{array}{rrrrr} 40 & : & 30 & :: & 7^{ds.} & : & x \\ 120 & : & 150 & :: & x & : & x' \\ 22 & : & 28 & :: & x' & : & x'' \\ 10 & : & 8 & :: & x'' & : & x''' \end{array}$$

$$40\times120\times22\times10 : 30\times150\times28\times8 :: 7 : x'''$$
$$4\times 12\times22\times10 : 3\times 15\times28\times8 ::$$
$$1\times 3\times22\times 2 : 3\times 3\times 7\times2 ::$$
$$1\times22\times 1 : 1\times 3\times 7\times1 :: 7 : x''' = \frac{3\times7\times7}{22} = 6\,\frac{15}{22} \text{ dias.}$$

Si para la resolución de la regla de tres compuesta se quiere aplicar el

Método de reducción á la unidad, *considerando sucesiva y separadamente cada una de las reglas de tres simples de que se compone el problema, se determinará primero el valor de una unidad del término que, en el primer período del enunciado de la cuestión, es relativo á la cantidad de la misma especie que la incógnita, y en seguida se calculará el valor de la cantidad que en el segundo período es relativa á la incógnita, y así se continuará el cálculo, indicando solamente las operaciones, hasta haber tomado en consideración todos los datos del problema. En la expresión final se harán las simplificaciones posibles.*

Aplicaremos este método al ejemplo anterior, cuyos datos escribiremos como sigue:

hs, vs. ps. ds. horas.
30—120—22—7— 8
40—150—28—x—10.

y se dice:

si 30 hombres hacen una pared en — 7 días
1 la hará en — 7×30 ds.
y 40 hombres la harán en — $\frac{7\times30}{40}$ ds.

Considerando la 2ª. regla de tres, diremos:

si 120$^{vs.}$ se hacen en — $\frac{7\times30}{40}$ ds.
1 se hará en — $\frac{7\times30}{40\times120}$
y 150 se harán en — $\frac{7\times30\times150}{40\times120}$ ds.

En la 3ª. regla de tres, diremos:

si 22^{ps} se hacen en — $\frac{7\times30\times150}{40\times120}$ ds.
1 se hará en — $\frac{7\times30\times150}{40\times120\times22}$
y 28 se harán en — $\frac{7\times30\times150\times28}{40\times120\times22}$ ds.

En la 4ª. regla de tres, diremos:

si trabajando 8 horas al día se emplean — $\frac{7\times30\times150\times28}{40\times120\times22}$ ds.
„ 1 al día se emplearán — $\frac{7\times30\times150\times28\times8}{40\times120\times22}$ ds.
y „ 10 „ „ — $\frac{7\times30\times150\times28\times8}{40\times120\times22\times10}$ ds.

El valor definitivo de la incognita es, pues:

$$x = \frac{7\times30\times150\times28\times8}{40\times120\times22\times10} \text{ ds.}$$

Suprimiendo los factores comunes al numerador y al denominador, y ejecutando después las operaciones indicadas, resulta:

$$x = 6 + \tfrac{15}{22}^{\text{días.}}$$

Como el valor de la incógnita en el método de las proporciones, ó en el de la reducción á la unidad, puede ponerse en la forma:

$$x = 7 \times \frac{30}{40}^{hs.} \times \frac{150}{120}^{vs.} \times \frac{28}{22}^{ps.} \times \frac{8}{10}^{hs.}$$

se infiere la siguiente

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

REGLA PARA RESOLVER UNA REGLA DE TRES COMPUESTA SIN PLANTEAR PROPORCIONES.—*Considerando sucesiva y separadamente cada una de las reglas de tres simples en que puede descomponerse el enunciado de un problema de regla de tres compuesta, el valor de la incógnita se obtiene multiplicando la cantidad de su misma especie por una serie de quebrados; cada uno de los cuales se formará respectivamente con dos de las cantidades homogéneas conocidas, en el que la cantidad relativa á la incógnita se colocará, cuando la regla de tres sea directa como numerador, y cuando sea inversa como denominador. Se suprimen los factores comunes á los numeradores y á los denominadores, y por último, se ejecutan las multiplicaciones y divisiones indicadas.*

En el ejemplo anterior, el valor de la incógnita sería

$$x=7\times\frac{30\times150\times28\times8}{40\times120\times22\times10}=7\times\frac{3\times7}{22}=6+\frac{15}{22}$$

234.—EJEMPLOS DE REGLA DE TRES COMPUESTA.

I.—3 fanegas de tierra se han sembrado de trigo y se han regado con 4 surcos de agua durante 6 horas al día; se quiere saber por cuántas horas deberán regarse al día 5 fanegas sembradas de caña de azúcar contando con tres surcos de agua, y bajo el concepto de que para el riego de la caña se gasta $1\frac{1}{2}$ veces la cantidad de agua que se emplea en el trigo.

f.	s.	h.
3	4	6
5	3	x

$1\frac{1}{2}$			

II.—Habiendo hecho un viaje de 450 leguas en 15 días, caminando 10 horas diarias y andando 3 leguas por hora, se quiere saber ¿cuántas horas deberán caminarse al día para recorrer 300 leguas en 12 días, andando $2\frac{1}{2}$ leguas por hora?

ls.	ds.	hs.	ls.
450	15	10	3
300	12	x	$2\frac{1}{2}$

III.—Con una rueda hidráulica de 10 metros de diámetro, movida con 120 litros de agua, se han molido 600 cargas en 8 días: se quiere saber ¿cuántas cargas podrá moler otra rueda que tiene 8 metros de diámetro, movida con 200 litros en 10 días?

m.	litros.	cargas.	días.
10	120	600	8
8	200	x	10

235.—PRUEBA DE LA REGLA DE TRES COMPUESTA.—La prueba de esta operación se ejecuta comunmente, poniendo en lugar de la incógnita el número encontrado, y considerando como incógnita otro de los números dados. Si en el último problema se ha encontrado que $x=1000$ cargas, se buscará, por ejemplo, ¿cuántos litros de agua necesitará una rueda de

8 metros para moler en 10 días 1000 cargas? Si la operación y la prueba se han ejecutado sin equivocación deberá encontrarse 200 litros.

236.—REGLA DE COMPAÑÍA.—Esta operación tiene por objeto determinar la parte que corresponde á cada uno de varios socios, de la ganancia ó pérdida que la compañía ha tenido, y siendo la utilidad ó pérdida de cada compañero proporcional al capital introducido y al tiempo que lo haya tenido en giro, estos problemas pertenecen al dominio de la regla de tres. Se consideran dos casos: 1° la regla de compañía simple, esto es, cuando todos los capitales han permanecido en el giro el mismo tiempo; y 2° la regla de compañía compuesta, que es cuando los socios han tenido su capital en el fondo común tiempos designales.

1° Tres socios han puesto: el primero, 2000 pesos: el segundo, 4000 pesos, y el tercero, 3000 pesos: después de 2 años al disolverse la sociedad, encuentran que ha habido una pérdida de 495 pesos, y se quiere saber cuánto debe perder cada socio. La operación se dispone como sigue:

$ 2000
4000 $ 495 pérdida total.
3000 »

$ 9000 capital social.
9000 : 2000 : : 495 : x=110
9000 : 4000 : : 495 : x=220
9000 : 3000 : : 495 : x=165

$ 495

Sumando los capitales ó puestas de los tres socios, se obtiene 9000 pesos, y de este capital se ha tenido la pérdida de 495 pesos; y como la parte correspondiente á cada asociado será proporcional á su puesta, para determinar la pérdida del primer socio, ponemos la proporción:

$$9000 : 2000 : : 495 : x,$$

y se obtiene 110 pesos. De la misma manera se determinan las pérdidas 220 y 165 pesos que corresponden al segundo y tercer asociados, debiendo ser la suma de las pérdidas parciales, igual á la total, si no se ha cometido alguna equivocación.

REGLA.—*Para resolver la regla de compañía simple, se establecen las proporciones necesarias, planteadas como sigue: el capital social es al capital de cada compañero, como la ganancia ó pérdida total es á la parte correspondiente á cada socio.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Se ve, pues, que la regla de compañia es un caso particular del problema más general: dividir una cantidad en partes proporcionales á números dados.

2ª—En la regla de compañía compuesta, los capitales permanecen en la sociedad tiempos desiguales. Tres socios han tenido en un giro mercantil la utilidad de 900 pesos, habiendo puesto el primero 2000 pesos durante 9 meses; el segundo 3000 pesos durante 10 meses; y el tercero 4000 pesos durante 12 meses; se quiere saber la parte de la utilidad que corresponde á cada socio.

	pesos.	meses.
$ 900 de utilidad....	2000	9
	3000	10
	4000	12

$2000\times 9=18000$
$3000\times 10=30000$
$4000\times 12=48000$

$96000 : 18000 :: 900 : x=168'75$
$96000 : 30000 :: 900 : x=281'25$
$96000 : 48000 :: 900 : x=450'00$

$ 900'00

Siendo los tiempos desiguales comenzaremos, por igualarlos, y para esto, determinaremos el capital que habria producido la misma utilidad durante un mes. Si con 2000 pesos se ha tenido cierta utilidad en 9 meses, para tenerla en un mes, se necesitaria un capital 9 veces mayor, esto es, 18000 pesos. Igualmente se necesitaria el capital 3000×10 para obtener la utilidad del segundo socio en un mes y 4000×12 para la del tercero. Una vez hecho esto, la regla de compañia compuesta se ha reducido á simple, y por medio de las correspondientes proporciones se determina la parte de utilidad perteneciente á cada socio; y la suma de las utilidades parciales deberá ser igual á la total, siempre que no se haya cometido algún error en la operación.

Regla.—*Para resolver la regla de compañía compuesta, se multiplica cada puesta por el tiempo que ha estado en la sociedad, y se establece una proporción planteada como sigue: la suma de los productos de las puestas por sus tiempos, es al producto de cada puesta por su tiempo, como la utilidad ó perdida total, es á la parte que corresponde á cada socio.*

Ejemplo.—Para hacer un terraplén tres socios, puso el primero 20 peones durante 15 días, el segundo puso 16 peones por 24 dias y el tercero puso 12 peones por 30 días, habiendo recibido por el terraplén $783, se quiere saber cuánto corresponderá de esta suma á cada socio.

En este ejemplo, en vez de capital, cada socio ha puesto peones.

237.—Regla de interés.—Esta operación que es una aplicación de la regla de tres, tiene por objeto determinar lo que se debe por una cantidad de dinero impuesta á rédito. El uso del comercio es estipular cuánto deben producir 100 pesos en determinado tiempo, y éste rédito ó interés se llama tanto por ciento. Si un capital se impone al 6 por ciento anual, esto significa que por cada 100 pesos debe pagarse el rédito ó interés de 6 pesos cada año, y se indica así: $6p\%$.

Si se quiere saber cuánto producirán de interés 20000 al 9 por ciento anual, una proporción nos hará encontrar el valor que buscamos.

$$\overset{\$}{100} : \overset{\$}{20000} :: 9 : x=\frac{20{,}000\times 9}{100}=1800\ \$$$

Se ve, pues, que *para determinar el interés de una suma en la unidad de tiempo, basta multiplicarla por el número que indica el tanto por ciento y separar dos cifras á la derecha en el producto como decimales.*

Cuando se quiere determinar el interés de una suma en un tiempo diferente del de la unidad, es necesario establecer una segunda proporción con los tiempos y resolver el problema como regla de tres compuesta.

Se quiere saber cuánto se deberá por el interés de $8000 al $1\frac{3}{4}$ por ciento mensual al cabo de 8 meses 20 dias.

Reduciendo los tiempos á dias y considerando los meses de 30 dias según la costumbre del comercio, resolveremos la regla de tres compuesta como sigue:

$$\begin{array}{c} \$\ 100 : \$\ 8000 .. 1\frac{3}{4} : x \\ \text{días. } 30 : \text{días. } 260 :: x : x' \end{array}$$

$$100\times 30 : 8000\times 260 :: 1\tfrac{3}{4} : x'=1\tfrac{3}{4}\times\frac{8000\times 260}{100\times 30}=\$1213'(33)$$

Se ve *que para determinar el interés de una suma en un tiempo diverso del de la unidad se multiplica la suma por el interés y por el tiempo, el producto se divide por la unidad de tiempo, y se separan dos decimales en el resultado.*

Si quisiéramos resolver el problema anterior por el método de reducción á la unidad, procederiamos como sigue:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Si $\dot{100}$ producen de interés $1\frac{3}{4}$

1 producirá $\frac{1.75}{100}$

y $\dot{8000}$ producirán $\frac{1'75\times8000}{100}$

Si en 30 días el interés es de $\frac{1'75\times8000\,\$}{100}$

en un día sería $\frac{1'75\times8000}{100\times30}$

y en 260 días sería $\frac{1'75\times8000\times260\,\$}{100\times30}$

Regla de descuento.—El objeto de esta operación es determinar qué parte puede recibirse al contado de una suma que debiera percibirse á cierto plazo, descontando el interés correspondiente al tiempo por el cual se anticipa el pago.

Si se tiene por ejemplo, una libranza que vence á los 7 meses de la fecha por valor de 5000 pesos, y se quiere recibir la parte correspondiente de su importe desde luego, abonando por el anticipo el premio de 1 por ciento mensual, resolveremos el problema como sigue:

Supuesto que el interés mensual es 1 por ciento, en 7 meses será por ciento y veremos que se deben recibir 100 pesos al contado en lugar de 107 al plazo de 7 meses, por lo cual estableceremos la siguiente proporción:

$$107 : 5000 :: 100 : x=\frac{500000}{107}=4672'89$$

Si la operación está bien hecha, esta suma de 4672'89 pesos, debe producir en 7 meses al 1 por ciento mensual, lo bastante para convertirse en 5000 pesos. Este descuento se llama *interior*, y es poco usado en el comercio.

Comunmente la operación se hace fijando el descuento mensual sobre 100 pesos. En consecuencia por $100 pagaderos á siete meses, conviniendo el descuento de 1 por 100 al mes, solo se recibirán 93 al contado, y la proporción se establece como sigue.

$$100 : 5000 :: 93 : x=\frac{93\times5000}{100}=\dot{4}650$$

Esta operación, que es la usada en el comercio, se llama descuento *exterior*, y se comprueba calculando directamente el descuento, que agregándolo á la suma hallada, debe producir 5000 pesos.

$$100 : 5000 :: 7 : x=350$$
$$350+4650=5000$$

238.—Regla conjunta ó de cambio.—Esta operación tiene por objeto resolver fácilmente algunos problemas de regla de tres compuesta, cuyos datos todos están ligados entre sí únicamente por equivalencias.

Explicaremos el fundamento de su resolución por medio de varios ejemplos. Se sabe que 5 varas equivalen á 4'19 de metro, y se quiere saber á cuántos metros equivalen 20 varas.

Por regla de tres, el problema se resolverá como sigue:

$$\overset{\text{vs.}}{5} : \overset{\text{va}}{20} :: \overset{\text{ms.}}{4'19} : x=\frac{4'19\times20}{5}=16'76 \text{ metros.}$$

Para resolverlo haciendo uso del procedimiento de la regla conjunta, pondremos dos ecuaciones.

4'19 metros=5 varas.

20 varas=x metros.

Como una ecuación no se altera multiplicando sus dos miembros por un mismo número, si multiplicamos la primera por 20, y la segunda por 5, tendremos:

$20\times4'19$ metros $=20\times5$ varas.

20×5 varas$=x\times5$ metros,

y como dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, resulta que

$$20\times4'19 \text{ metros}=x\times5 \text{ metros.}$$

y como si cantidades iguales se dividen por iguales, los resultados serán iguales, dividiendo los dos miembros de esta ecuación por 5, tendremos:

$$\frac{20\times4'19}{5}=x$$

resultado idéntico al de la proporción.

Examinemos un ejemplo más complicado.

Si se quiere saber cuántas varas son 18 yardas, en el concepto de que 3'28 yardas equivalen á 3 metros, y de que 4'19 metros son iguales á 5 varas:

Resolviendo el problema por regla de tres compuesta se tendrá:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\underset{\text{ys.}}{3'28} : \underset{\text{ms.}}{3} :: \underset{\text{ys.}}{18} : \underset{\text{ms.}}{x}$$

$$\underset{\text{ms.}}{4'19} : \underset{\text{ys.}}{5} :: \underset{\text{ms.}}{x} : \underset{\text{ys.}}{x'}$$

$$3'28\times4'19 : 5\times3 :: 18 : x' = \frac{18\times3\times5}{3'28\times4'19}$$

Ahora bien: haciendo uso del procedimiento de la regla conjunta dispondremos los datos como sigue:

x varas $=18$ yardas
$3'28$ yardas $=3$ metros
$4'19$ metros $=5$ varas

Multiplicando ordenadamente las dos primeras ecuaciones, se tendrá:

$$x\times3'28 \text{ yardas} = 18\times3 \text{ metros.}$$

ecuación que combinada

con la tercera . . . $4'19$ metros $=5$ varas,
dará . . . . . $x\times3'28\times4'19$ yardas $=18\times3\times5$ varas,

y dividiendo los dos miembros de la última ecuación por el producto $3'28\times4'19$, se tiene:

$$x = \frac{18\times3\times5}{3'28\times4'19}$$

resultado igual al de la regla de tres compuesta.

Reflexionando en el orden de las ecuaciones sucesivas, y los razonamientos en que nos fundamos para multiplicarlas, se observará *que es necesario que el segundo miembro de cada ecuación sea de la especie del primero de la siguiente, y que cualquiera que sea el número de ecuaciones, el primer miembro de la primera ecuación deberá ser de la especie del segundo de la última. Una vez establecidos así los datos del problema, se multiplicarán ordenadamente las ecuaciones, y el valor de la incógnita se determinará dividiendo el producto de los números de que ella no forma parte, por el producto de los que multiplican á la incógnita.*

Comunmente se comienzan las ecuaciones por la incógnita y cuando el problema tiene por objeto determinar el valor de sumas expresadas en monedas de diversos países, toma el nombre de *regla de cambio ó de arbitrajes.*

Se quiere saber cuántas libras esterlinas valen 1,000 onzas mexicanas, en el concepto de que 100 onzas mexicanas equivalen á 1621 dollars americanos, que 4 dollars valen 21'36 francos, y que 50'42 francos valen 2 libras esterlinas.

El problema lo estableceremos en las cuatro ecuaciones siguientes, comenzando por la incógnita y terminando por un valor, 50'42 francos expresado en libras esterlinas, que es la especie de la incógnita.

Libras esterlinas $x = 1000$ onzas mexicanas.
Onzas $100 = 1621$ dollars americanos.
Dollars $4 = 21'36$ francos.
Francos $50'42 = 2$ libras esterlinas.

$$x = \frac{1000\times1621\times21'36\times2}{100\times4\times50'42} = 3433'61 \text{ libras esterlinas.}$$

El valor de la incógnita será igual al producto de las cantidades que forman los segundos miembros de las ecuaciones, dividido por el producto de las cantidades conocidas del primer miembro de las ecuaciones.

La regla conjunta ó de cambio, no es en realidad más que un caso de la regla de tres compuesta, cuya resolución se abrevia ó facilita por medio del procedimiento indicado, aunque en el fondo sea lo mismo que se hace para obtener el resultado final planteando una serie de reglas de tres.

Nota.—Con el objeto de poder explicar con la extensión debida los fundamentos y aplicaciones de las reglas de interés compuesto, aligación, falsa posición, progresiones y logaritmos, trataremos estas materias en Algebra, de acuerdo con el programa de la Escuela Nacional Preparatoria.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ÍNDICE.

ARITMÉTICA.

Pags.

Opiniones publicadas sobre esta obra..... 5
Prólogo..... 7

INTRODUCCIÓN Y SISTEMA DE NUMERACIÓN.

Definiciones..... 9
Sistema de numeración..... 12
Regla para escribir una cantidad..... 16
Regla para leer una cantidad..... 17

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Preliminares del cálculo de los números enteros y definiciones... 1º
Adición..... 23
Substracción..... 28
Multiplicación..... 33
División..... 43

PROPIEDADES DE LOS FACTORES Y DIVISORES ENTEROS.

Definiciones y determinación de los números primos..... 54
Descomposición de los números en sus factores primos..... 57
Determinación de los divisores de un número..... 58
Determinación del menor múltiplo..... 59
Máximo común divisor..... 59
Teoremas fundamentales..... 60

Pags.

Regla para encontrar el máximo común divisor..... 64
Condiciones para que una cantidad sea divisible por los números menores que 12..... 68
Pruebas de la multiplicación y división de enteros..... 81

CÁLCULO DE LAS FRACCIONES COMUNES Y DE LOS FRACCIONARIOS.

Sistema de numeración, principios y operaciones fundamentales.. 85
Simplificación de los quebrados..... 91
Reducción á un común denominador..... 94
Valuación de los quebrados..... 97
Adición..... 98
Substracción..... 100
Multiplicación..... 103
División..... 106

CÁLCULO DE LAS FRACCIONES DECIMALES.

Sistema de numeración, principios y operaciones fundamentales. 109
Simplificación y reducción de las decimales á un común denominador..... 114
Casos en que un quebrado puede convertirse exactamente en decimal..... 116
Reducción de las decimales á quebrados..... 119
Adición..... 122
Substracción..... 123
Multiplicación..... 123
División..... 124

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL Y MEDIDAS ANTIGUAS.

Diversas especies de unidades..... 127
Base del sistema métrico-decimal..... 128
Diversas unidades del sistema métrico-decimal..... 130
Tabla metódica del sistema métrico-decimal..... 135
Medidas antiguas de México..... 136
Correspondencia entre las medidas y pesos comunes y las del sistema métrico..... 141

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS COMPLEXOS.

Definiciones, principios y operaciones fundamentales..... 143
Conversión de denominados en quebrados y en decimales..... 145

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

	Pags.
Adición	147
Substracción	149
Multiplicación	150
Multiplicación por partes alícuotas	152
División	156

ELEVACIÓN Á POTENCIAS Y EXTRACCIÓN DE RAÍCES.

Potencias de los números	158
Raíces y números inconmensurables	160
Cuadrado y raíz cuadrada	161
Extracción de la raíz cuadrada de los enteros	164
Extracción de la raíz cuadrada de las decimales y quebrados	167
Cubo y raíz cúbica	170
Extracción de la raíz cúbica de los enteros	173
Extracción de la raíz cúbica de las decimales y quebrados	177

RAZONES Y PROPORCIONES.

Razón aritmética	181
Razón geométrica	181
Proporción aritmética	182
Proporción geométrica	184
Transformaciones que pueden efectuarse en la proporción geométrica	187
Teoremas ó propiedades de la proporción geométrica	189

REGLA DE TRES.

Problemas que pueden resolverse por regla de tres	193
Resolución de la regla de tres simple	196
Resolución de la regla de tres compuesta	203
Regla de compañía	207
Regla de interés	209
Regla de descuento	210
Regla conjunta ó de cambio	211

TRATADO

DE

GEOMETRIA ELEMENTAL

ADOPTADO COMO TEXTO EN LA

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Y ESCRITO POR

MANUEL MARIA CONTRERAS

PROFESOR DE MATEMATICAS Y DE FISICA EN DICHO ESTABLECIMIENTO, INGENIERO DE MINAS, ENSAYADOR Y BENEFICIADOR DE METALES, ETC.

CUARTA EDICION REVISADA Y CORREGIDA.



MEXICO.

IMPRENTA DE J. F. JENS, SAN JOSE EL REAL NUMERO 22.

1884.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

	Pags.
Adición	147
Substracción	149
Multiplicación	150
Multiplicación por partes alícuotas	152
División	156

ELEVACIÓN Á POTENCIAS Y EXTRACCIÓN DE RAÍCES.

Potencias de los números	158
Raíces y números inconmensurables	160
Cuadrado y raíz cuadrada	161
Extracción de la raíz cuadrada de los enteros	164
Extracción de la raíz cuadrada de las decimales y quebrados	167
Cubo y raíz cúbica	170
Extracción de la raíz cúbica de los enteros	173
Extracción de la raíz cúbica de las decimales y quebrados	177

RAZONES Y PROPORCIONES.

Razón aritmética	181
Razón geométrica	181
Proporción aritmética	182
Proporción geométrica	184
Transformaciones que pueden efectuarse en la proporción geométrica	187
Teoremas ó propiedades de la proporción geométrica	189

REGLA DE TRES.

Problemas que pueden resolverse por regla de tres	193
Resolución de la regla de tres simple	196
Resolución de la regla de tres compuesta	203
Regla de compañía	207
Regla de interés	209
Regla de descuento	210
Regla conjunta ó de cambio	211

TRATADO

DE

GEOMETRIA ELEMENTAL

ADOPTADO COMO TEXTO EN LA

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Y ESCRITO POR

MANUEL MARIA CONTRERAS

PROFESOR DE MATEMATICAS Y DE FISICA EN DICHO ESTABLECIMIENTO, INGENIERO DE MINAS, ENSAYADOR Y BENEFICIADOR DE METALES, ETC.

CUARTA EDICION REVISADA Y CORREGIDA.



MEXICO.

IMPRENTA DE J. F. JENS, SAN JOSE EL REAL NUMERO 22.

1884.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Esta obra es propiedad del autor conforme á las leyes, y nadie podrá reimprimirla ni traducirla sin su permiso.

AL SEÑOR

D. GABINO BARREDA

En testimonio de aprecio y alta consideracion
dedica este trabajo

Manuel Maria Contreras.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

OPINIONES publicadas sobre las Matemáticas del Ingeniero Manuel María Contreras.

Los que suscribimos certificamos:

1° Que el profesor D. Manuel María Contreras escribió su tratado de matemáticas por encargo del director de la Escuela Nacional Preparatoria, con el objeto de satisfacer debidamente el programa del actual plan de estudios.

2° Que el original de su aritmética fué examinado por los CC. profesores Gabino Barreda, Francisco Diaz Covarrubias, Rafael A. de la Peña é Ignacio Ortiz de Zárate; que el de su álgebra, lo fué por los profesores Manuel Fernandez Leal y Luis del Castillo, y que los de su geometría y trigonometría lo fueron por los profesores Manuel Ramirez y Francisco Echeagaray, quienes unánimemente los consideraron buenos y adecuados á la enseñanza.

3° Que la junta general de catedráticos de dicha Escuela, ha ratificado esa calificacion y los ha aceptado como obras de texto.

4° Que las modificaciones que la experiencia ha indicado y hemos propuesto al autor las ha adoptado, y que seguirá haciendo algunas otras en las posteriores ediciones, con el fin de ir sucesivamente facilitando y mejorando la enseñanza de los alumnos, y

5° Que con el uso de los mencionados tratados de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría, hemos obtenido durante varios años, muy buenos resultados en la instruccion de nuestros discípulos, tanto en las clases del gobierno como en las particulares.

México, Octubre 16 de 1878.—*M. Fernandez.—M. Ramirez.—M. Calderon.—A. Barroso.—F. Echeagaray.—I. Vallarino.—Rafael Barba.—M. Villamil.—Rafael Angel de la Peña.—Emilio G. Baz.—Luis del Castillo y Pacheco.—Ignacio Ortiz de Zárate.*

Del anterior documento resulta, pues, que las obras de matemáticas del Sr. Contreras, no solo fueron examinadas y declaradas buenas por

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

personas competentes, sino que con el uso de ellas durante algunos años, se han obtenido buenos resultados en la enseñanza.

Suplicamos á nuestros colegas se sirvan reproducir el anterior certificado, en honor de una persona que, como el Sr. Contreras, coopera con empeño á la instruccion de la juventud.

(Diario Oficial, Octubre 23 de 1878).

Señores redactores de *La Libertad:*

Agradeceremos mucho á vdes. se sirvan publicar en su acreditado diario el certificado siguiente:

Los que suscriben, antiguos profesores de la Escuela Nacional de Agricultura y Veterinaria, certifican: que durante los años de 1875 y 1876 han dado la clase de primer curso de matemáticas siguiendo como obra de texto la del Sr. Ingeniero Manuel María Contreras, con notorio aprovechamiento de los alumnos, como consta por las calificaciones que obran en los libros respectivos de exámenes. Como constancia extendemos el presente en México á 21 de Octubre de 1878.—*Manuel Cordero.—José C. Segura.—Vicente U. Alcaráz.*

Señores redactores de *La Libertad:*

Suplicamos encarecidamente á vdes. se sirvan insertar en su ilustrado diario el certificado adjunto:

Como directores de establecimientos de instruccion primaria y preparatoria en esta capital, certificamos: que en nuestros respectivos colegios y durante varios años se han adoptado como obras de texto para la enseñanza de matemáticas los tratados de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría escritos por el Ingeniero Manuel María Contreras, y que con ellos se han obtenido buenos resultados en la instruccion y aprovechamiento de los discípulos.

México, Octubre 18 de 1878.—*Adrian Fournier,* director del Licéo Franco-Mexicano.—*Ricardo Rode,* socio director del Rode's English Boarding School.—*Emilio Katthain.—A. Bracho.—Emilio G. Baz,* director del instituto Anglo-Franco-Mexicano.—*M. Soriano.—José Saturnino Yarza,* director del colegio Hispano-Mexicano.

(La Libertad, Octubre 22 y 31 de 1878).

GEOMETRIA.

INTRODUCCION.

Al emprender el estudio de la geometría, parece conveniente dar una idea del espíritu de esta importante parte de las matemáticas, así como lo hicimos al tratar del álgebra.

El objeto de nuestros trabajos en aritmética ha sido encontrar un valor numérico que satisfaga determinadas condiciones, y en álgebra los trabajos analíticos casi siempre han tenido por mira descubrir un modo de formacion de una cantidad desconocida en funcion de las conocidas. Como el fin de la geometría es la medida de la extension, tenemos que comenzar por conocer algunas de las propiedades fundamentales de lo que llamamos extension, para poder en seguida por un método rigurosamente deductivo, ir averiguando relaciones nuevas que sirvan para satisfacer las necesidades prácticas y científicas.

En geometría, así como en las demás ciencias, hay ciertos principios fundamentales que no pueden ser adquiridos sino por la observacion ó la experiencia. Así es como sabemos lo que es la longitud, la direccion, la línea recta, etc., y no por una explicacion verbal; siendo difícil definir éstas y otras voces semejantes por la simplicidad misma de los hechos observados, que no pueden descomponerse en otros más sencillos. Otro tanto pasa con los fundamentos de lo que llamamos axiomas. Cuando se reflexiona sobre la manera con que se han adquirido, se encuentra que ha sido por la contínua observacion y por experiencias repetidas multitud de veces.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La geometría toma por base de sus deducciones las definiciones y los axiomas. Las definiciones, como veremos más adelante, no son otra cosa sino *la expresion del conjunto de atributos que hay necesidad de presuponer en una figura dada, para que las demostraciones que á ella se refieren sean rigorosamente exactas* (Barreda). Los axiomas son verdades fundamentales de las que tenemos multitud de pruebas.

Siendo como es la geometría una ciencia eminentemente deductiva, debería procurarse que el número de los principios fundamentales tomados de la observacion fuese el menor posible; pero para facilitar el estudio se exponen á veces como axiomas fundamentales los que inmediatamente se derivan de éstos. Por ejemplo, el principio de que si á cantidades iguales se quitan iguales los resultados tambien lo serán, puede inferirse del axioma fundamental de que las sumas de cantidades iguales son iguales; pero para facilitar los raciocinios se considera tambien el primero como axioma fundamental.

Habiendo explicado, aunque ligeramente, cuál es la fuente de los fundamentos de las deducciones geométricas, volveremos sobre el objeto de esta ciencia que, en último análisis, es la medida indirecta de la extension.

Toda medida es la valuacion de la relacion que existe entre magnitudes homogéneas. En geometría esta valuacion puede hacerse de una manera directa en las líneas rectas y en algunas superficies planas sobreponiendo la unidad una ó más veces sobre la extension que se quiere medir; pero como en la mayor parte de los casos no es posible ó no es fácil hacer esta superposicion, y como la medida de las curvas, la rectificacion de los perímetros y la determinacion de las superficies y de los volúmenes tiene que verificarse por métodos científicos indirectos, hay necesidad de ocuparse de éstos, procurando sustituir á la comparacion entre figuras cualesquiera, la comparacion de líneas rectas, como única operacion que por regla general puede efectuarse directamente. En cada forma que se considera se buscan las líneas rectas que la fijan ó determinan, y en seguida se procura deducir de la posicion y magnitud de estas rectas la medida de dicha forma. Por ejemplo, una esfera quedará completamente determinada conociendo su centro y su rádio, y el estudio de las propiedades de la esfera lleva por principal mira, llegar á expresar la superficie de la esfera, su volúmen, etc., en funcion del rádio ó de otras rectas constantes. De la necesidad de reducir la medida de cualquiera forma á la medida de líneas rectas, y reemplazar la comparacion de superficies y de volúmenes por relaciones entre líneas rectas, nace la necesidad de dar un gran desarrollo á las investigaciones geométricas.

La extension es una propiedad inherente á cualquier cuerpo, pero en geometría no la consideramos en los cuerpos mismos, sino en el espacio que éstos ocupan. Esta sencilla concepcion facilita sobremanera nuestras investigaciones, no teniendo que preocuparnos con los fenómenos complexos de los cuerpos en los que podriamos estudiar la extension. Estas abstracciones son, por lo demás, sumamente frecuentes. Cuando comparamos, por ejemplo, el color de dos cosas, prescindimos de la sustancia de que están formadas y de sus demás propiedades para no complicar el estudio relativo á la cualidad de que tratamos; pues bien, en geometría, para hacer completa abstraccion de las demás propiedades de los cuerpos y facilitar nuestras investigaciones sobre la extension, suponemos ésta en el espacio ocupado por los cuerpos, como si desapareciendo éstos hubiesen dejado en él una impresion ó molde de su forma.

Otra abstraccion semejante es aquella por medio de la cual concebimos las superficies, las líneas y los puntos, prescindiendo de una, de dos y aun de las tres dimensiones de los cuerpos. Todos los que conocemos tienen largo, ancho y grueso. La extension en estas tres dimensiones se llama volúmen; pero si hacemos abstraccion del grueso y solo consideramos el ancho y el largo, obtendremos la extension en superficie; si en seguida hacemos abstraccion del ancho, nos quedará la línea ó extension puramente en longitud; y si por último, prescindimos de lo largo y solo consideramos la situacion, tendremos nocion de lo que llamamos punto. Por otra parte, las superficies son los límites de los cuerpos, las líneas lo son de las superficies y los puntos son los extremos de las líneas. Así es que siendo un cuerpo sólido ó volúmen un hecho concreto, las nociones de superficies, líneas y puntos no son sino abstracciones sumamente útiles para simplificar nuestras investigaciones; pues por una parte hay cuestiones prácticas que, no refiriéndose á las tres dimensiones, seria inútil y embarazoso ocuparse de todas ellas; por otra parte, se concibe que el conocimiento de las propiedades de las líneas, es un preliminar indispensable para tratar las cuestiones de superficies, así como el estudio de éstas sirve de base á los problemas de volúmenes.

Considerar la extension en el espacio é independientemente de los cuerpos, presenta además la ventaja de no limitar nuestros estudios á las formas reales, lo cual contribuye á dar más generalidad y desarrollo á nuestros ejercicios intelectuales, y á hacer más ámplios los conocimientos que deben servir de base para satisfacer las necesidades prácticas.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Las cuestiones geométricas pueden tratarse de dos maneras esencialmente diferentes, y de esto resulta su division en geometría especial y geometría general. Considerada esta ciencia en su conjunto, debe ocuparse del estudio de todas las formas imaginables, y debe tambien conocer las propiedades de cada forma. Si agrupamos las cuestiones geométricas con relacion á cada especie de figuras, estudiando sucesivamente las propiedades de cada forma, tendremos la geometría especial; y si por el contrario coordinamos las cuestiones con respecto á la semejanza de investigaciones, prescindiendo de las formas en particular, tendremos la geometría general. Por ejemplo, en la geometría especial estudiaremos las propiedades del triángulo, del círculo, etc., para poder deducir uno de los elementos de cada figura de los demás que la constituyen, y valuar su superficie, etc.; miéntras que en la geometría general se considerarán las cuestiones relativas á las superficies, á los volúmenes y otras muchas, en abstracto, para introducir despues en cada caso especial las condiciones específicas de determinada forma. El uso del cálculo es mucho más frecuente en la geometría general, pero no depende del empleo de este medio de deduccion, sino del género de la cuestion que se considere, la distincion entre una y otra parte de la geometría.

El cálculo, no siendo ni debiendo ser mas que un poderoso medio de deduccion, no puede servir para establecer los fundamentos de una ciencia, y se necesita que la geometría especial suministre los datos necesarios para fijar algunas ecuaciones, que sirvan de punto de partida á las deducciones analíticas, y cuyos datos, como hemos dicho, se expresan en las definiciones en su más alto grado de perfeccion ideal.

El objeto de este tratado es la geometría especial, considerándola como base é introduccion indispensable para el estudio de la general, cuyo principal artificio consiste en trasformar las consideraciones geométricas en consideraciones analíticas; valiéndose para esto de la notable concepcion de Descartes, que consiste á su vez en cambiar los problemas de forma en problemas de distancias, sujetos por su naturaleza al dominio del cálculo.

La geometría especial se divide en tres secciones principales: estudio de la línea recta y figuras planas; estudio de las superficies y estudio de los volúmenes.

Considerada como una operacion directa, la medida de las líneas rectas parece á primera vista muy sencilla, y por tanto cosa inútil ocuparse de su estudio; pero como no siempre es posible sobreponer la unidad lineal sobre la recta cuya longitud se trata de determinar, como sucede

cuando ésta es inaccesible, ó cuando, teniendo una magnitud considerable, en vez de estar en una posicion horizontal se encuentra vertical, es preciso conocer los procedimientos necesarios pora poder deducir la magnitud de una línea de las demás que constituyen una figura, pudiendo así llegarse á determinar indirectamente la dimension de una línea recta en cualquiera posicion en que se encuentre. Esto es tanto más esencial, cuanto que, como ya lo dijimos, la mayor parte de los trabajos geométricos llevan por mira reducir las cuestiones de superficies y de volúmenes á comparaciones entre líneas rectas, por lo cual hay que dar una gran extension á esta parte de la geometría, que debe servir de base á las siguientes. En las líneas curvas, el problema que generalmente se trata de resolver, es: averiguar las relaciones que ligan las curvas con las rectas, para poder efectuar por medio de éstas su medida, y sustituir á la relacion de las curvas otra equivalente entre líneas rectas.

Los problemas en geometría elemental admiten casi siempre una resolucion gráfica y otra numérica ó algebráica, y aunque la última es más perfecta, casi siempre tiene que apoyarse en la gráfica, que se ejecuta en una figura comunmente más pequeña, pero semejante á la real. Además, se procura sustituir á las construcciones en relieve las representaciones sobre un plano, lo cual constituye el método de las proyecciones.

La extension de la geometría es indefinida, tanto por la diversidad de cuestiones de que puede ocuparse, como por la infinidad de formas que pueden imaginarse sujetas á definiciones exactas. En efecto, las figuras planas pueden ser tantas como las combinaciones de las líneas que las limitan; las líneas curvas serán tan diversas como las leyes que se conciban para el movimiento de un punto; las superficies pueden variar por la forma de la línea que las engendra, y por la naturaleza del movimiento de ésta; los volúmenes varian por la diversidad de las superficies que los limitan ó que pueden engendrarlos. Por lo demas, es conveniente ocuparse de toda clase de formas, á fin de que las figuras reales que encontremos en la naturaleza, sean casos particulares de las que de antemano tengamos conocidas y estudiadas.

Habiendo señalado como objeto definitivo de la geometría la medida de la extension por medios indirectos, observaremos al hacer su estudio que pocas son en realidad las cuestiones que se refieren á determinar la longitud de las líneas, la superficie de las figuras y el volúmen de los cuerpos; pero al mismo tiempo notaremos que las investigaciones que no llevan por mira la medida de la extension, y que son las más,

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

se ocupan del estudio de las propiedades de las formas, como preliminares y elementos necesarios para poder efectuar la medida de la extension. Además, es muy conveniente dar la mayor amplitud posible á nuestros conocimientos y á la diversidad de maneras de considerar las relaciones de forma, tanto para encontrarnos en aptitud de poder resolver cualquier problema, como para efectuarlo aplicando el procedimiento más sencillo y adecuado al caso que se considere.

De lo expuesto resulta, que siendo el objeto definitivo de la geometría la medida de la extension, para poder efectuarlo convenientemente tiene que fundarse sobre la observacion de un corto número de fenómenos primitivos y extender sus investigaciones á las propiedades de toda clase de formas, para poder determinar unos por otros los elementos de cualquier figura, trasformando las cuestiones de líneas curvas, de superficies y de volúmenes, en relaciones entre líneas rectas; sirviendo, por último, la geometría especial ó elemental, de fundamento y preliminar necesario á la geometría analítica ó general.

PRIMERA PARTE.

LONGITUDES.

DEFINICIONES Y NOCIONES PRELIMINARES.

358.—Definicion.—*Se llama geometría la ciencia que tiene por objeto la medida de la extension por medios indirectos, considerando las relaciones de forma, posicion y magnitud.*

Aunque el objeto definitivo de esta ciencia sea *la medida de la extension*, como para llegar á este resultado es preciso valerse de métodos indirectos, y como casi siempre es necesario reducir las cuestiones relativas á la medida de los volúmenes, de las superficies y de las líneas, á la comparacion de las líneas rectas, lo cual exige un conocimiento extenso y profundo de las diversas propiedades de las figuras para deducir de los elementos conocidos los desconocidos; resulta que, como base indispensable para poder efectuar la medida de la extension, la geometría

elemental tiene que ocuparse especialmente *del estudio de las propiedades de las figuras*, considerando las relaciones que existen entre las partes de que están formadas ó entre otras figuras más sencillas ó más adecuadas á nuestras investigaciones.

359.—Todo cuerpo ocupa en el espacio un lugar, y con el objeto de no considerar en el estudio de la geometría sino la extension, prescindiendo de las demas propiedades de los cuerpos, consideraremos el lugar y la forma del espacio que ocupan, haciendo abstraccion de la materia que los constituye.

Todo cuerpo tiene tres dimensiones: *longitud, latitud* y *altura*, que comunmente se les lama *largo, ancho* y *grueso;* pero como á menudo nuestras investigaciones no se dirigen sino á una sola ó á dos de estas dimensiones, con el fin de no complicar nuestro estudio con elementos innecesarios, prescindimos de aquellas dimensiones que no son objeto de la cuestion de que tenemos que ocuparnos. Cuando consideramos el espacio con tres dimensiones, se le llama *volúmen;* si hacemos abstraccion del espesor ó grueso, la extension que consideramos lleva el nombre de *superficie;* y si prescindimos del grueso y de la anchura, resultará una extension en longitud solamente, que se llama *línea*, y aunque aisladamente no hay superficies ni líneas materiales, estas concepciones son de grande utilidad para estudiar sucesivamente las propiedades de las diversas figuras y poder medir la extension. Por lo demas, en la práctica es de un uso frecuente este género de consideraciones. Cuando se trata de la altura de una montaña ó de un edificio, se prescinde de sus otras dimensiones, así como de sus demas cualidades.

Los límites que determinan la extension de un cuerpo, son las *superficies*, las cuales vienen á quedar limitadas por *líneas*, y los extremos de éstas son *puntos*. Los diversos límites de los cuerpos nos sirven para reconocer su figura y determinar su extension.

A fin de proceder de lo simple á lo compuesto, en nuestro estudio dividiremos la geometría en tres partes, la primera tratará de las *líneas*, la segunda de las *superficies* y la tercera de los *volúmenes*.

360.—Puntos.—Acabamos de ver que prescindiendo de una de las dimensiones de un volúmen resulta una superficie, y que prescindiendo de otra de las dimensiones de la superficie, se obtiene una línea; del mismo modo, si en una línea hacemos abstraccion de la longitud, se concebirá lo que se llama *punto*, destinado únicamente á determinar el lugar ó la posicion.

Se distinguen cuatro clases de puntos: *puntos extremos*, que son los límites A y B de una línea (fig, 1); *punto de interseccion*, que es el lu-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

se ocupan del estudio de las propiedades de las formas, como preliminares y elementos necesarios para poder efectuar la medida de la extension. Además, es muy conveniente dar la mayor amplitud posible á nuestros conocimientos y á la diversidad de maneras de considerar las relaciones de forma, tanto para encontrarnos en aptitud de poder resolver cualquier problema, como para efectuarlo aplicando el procedimiento más sencillo y adecuado al caso que se considere.

De lo expuesto resulta, que siendo el objeto definitivo de la geometría la medida de la extension, para poder efectuarlo convenientemente tiene que fundarse sobre la observacion de un corto número de fenómenos primitivos y extender sus investigaciones á las propiedades de toda clase de formas, para poder determinar unos por otros los elementos de cualquier figura, trasformando las cuestiones de líneas curvas, de superficies y de volúmenes, en relaciones entre líneas rectas; sirviendo, por último, la geometría especial ó elemental, de fundamento y preliminar necesario á la geometría analítica ó general.

PRIMERA PARTE.

LONGITUDES.

DEFINICIONES Y NOCIONES PRELIMINARES.

358.—Definicion.—*Se llama geometría la ciencia que tiene por objeto la medida de la extension por medios indirectos, considerando las relaciones de forma, posicion y magnitud.*

Aunque el objeto definitivo de esta ciencia sea *la medida de la extension*, como para llegar á este resultado es preciso valerse de métodos indirectos, y como casi siempre es necesario reducir las cuestiones relativas á la medida de los volúmenes, de las superficies y de las líneas, á la comparacion de las líneas rectas, lo cual exige un conocimiento extenso y profundo de las diversas propiedades de las figuras para deducir de los elementos conocidos los desconocidos; resulta que, como base indispensable para poder efectuar la medida de la extension, la geometría

elemental tiene que ocuparse especialmente *del estudio de las propiedades de las figuras*, considerando las relaciones que existen entre las partes de que están formadas ó entre otras figuras más sencillas ó más adecuadas á nuestras investigaciones.

359.—Todo cuerpo ocupa en el espacio un lugar, y con el objeto de no considerar en el estudio de la geometría sino la extension, prescindiendo de las demas propiedades de los cuerpos, consideraremos el lugar y la forma del espacio que ocupan, haciendo abstraccion de la materia que los constituye.

Todo cuerpo tiene tres dimensiones: *longitud, latitud* y *altura*, que comunmente se les lama *largo, ancho* y *grueso;* pero como á menudo nuestras investigaciones no se dirigen sino á una sola ó á dos de estas dimensiones, con el fin de no complicar nuestro estudio con elementos innecesarios, prescindimos de aquellas dimensiones que no son objeto de la cuestion de que tenemos que ocuparnos. Cuando consideramos el espacio con tres dimensiones, se le llama *volúmen;* si hacemos abstraccion del espesor ó grueso, la extension que consideramos lleva el nombre de *superficie;* y si prescindimos del grueso y de la anchura, resultará una extension en longitud solamente, que se llama *línea*, y aunque aisladamente no hay superficies ni líneas materiales, estas concepciones son de grande utilidad para estudiar sucesivamente las propiedades de las diversas figuras y poder medir la extension. Por lo demas, en la práctica es de un uso frecuente este género de consideraciones. Cuando se trata de la altura de una montaña ó de un edificio, se prescinde de sus otras dimensiones, así como de sus demas cualidades.

Los límites que determinan la extension de un cuerpo, son las *superficies*, las cuales vienen á quedar limitadas por *líneas*, y los extremos de éstas son *puntos*. Los diversos límites de los cuerpos nos sirven para reconocer su figura y determinar su extension.

A fin de proceder de lo simple á lo compuesto, en nuestro estudio dividiremos la geometría en tres partes, la primera tratará de las *líneas*, la segunda de las *superficies* y la tercera de los *volúmenes*.

360.—Puntos.—Acabamos de ver que prescindiendo de una de las dimensiones de un volúmen resulta una superficie, y que prescindiendo de otra de las dimensiones de la superficie, se obtiene una línea; del mismo modo, si en una línea hacemos abstraccion de la longitud, se concebirá lo que se llama *punto*, destinado únicamente á determinar el lugar ó la posicion.

Se distinguen cuatro clases de puntos: *puntos extremos*, que son los límites A y B de una línea (fig, 1); *punto de interseccion*, que es el lu-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

gar en que se encuentran dos ó más líneas, como C (fig. 2); *puntos de concurso,* que son aquellos donde se reunen dos ó más rectas, como el D en la fig. 3; y *puntos de contacto,* que son aquellos donde dos ó más líneas se tocan, como el E en la fig. 4.



Figura 1. Figura 2. Figura 3. Figura 4.

Careciendo los puntos de magnitud, todos son iguales, y por lo mismo, se concibe que si se sobrepusieran, coincidirian.

361.—LINEAS.—*Se llama línea toda extension en longitud sin ninguna latitud ni profundidad.* Puede concebirse una línea como engendrada por la interseccion de dos superficies, ó como el trazo ó huella que dejaria un punto en su movimiento.

Las líneas pueden ser *rectas, quebradas, curvas* y *mixtas.*

362.—*Línea recta es aquella cuyos puntos todos están en la misma direccion.* De esto resulta que es el camino más corto entre dos puntos.

La interseccion C de dos rectas (fig. 2) es un punto.



Figura 5.

Por un punto A (fig. 5) pueden pasar una infinidad de líneas rectas; pero desde el momento en que se da otro punto B, determinando estos dos puntos una direccion, queda fijada la posicion de la recta A B.

Así pues, *dos puntos fijan la posicion de una recta, y si son éstos los extremos determinarán su magnitud.—Para que dos rectas coincidan es necesario y basta que coincidan dos puntos de una con dos puntos de la otra; y para que dos rectas tengan la misma longitud, es preciso que puedan coincidir los extremos de una con los de la otra.*

363.—La distancia entre dos puntos se estima por la magnitud de la línea recta que los une. Para medir la longitud de una recta es preciso determinar la relacion que existe con la longitud de otra recta tomada por unidad. Así cuando se dice, por ejemplo, que la altura de una torre es de 50 metros, esto significa que cincuenta veces está contenida la longitud de la unidad lineal llamada metro, en la altura de esa torre.

Dos rectas están en la razon, por ejemplo, de 3 á 5 cuando una tercera recta, tomada como unidad, está contenida tres veces en la primera y 5 en la última. La determinacion de la relacion de dos rectas exige,

pues, que se busque otra recta que esté contenida un número cabal de veces en una y en otra, para que sea la comun medida de ambas.

Si estando dadas dos rectas A B y C D (fig. 6) se quiere determinar su mayor medida comun, ó por lo ménos la razon aproximada de una á otra, tendremos que proceder como sigue:

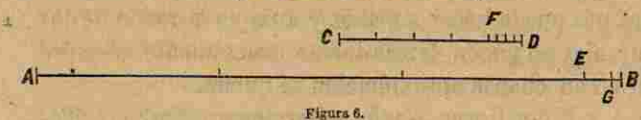


Figura 6.

Se llevará la más pequeña C D sobre la mayor, cuantas veces se pueda: se encontrará tres veces desde A hasta E y quedará una resta ó parte menor que C D de E á B; por lo que se tendrá:

$$A\,B = 3\,C\,D + E\,B$$

En seguida se llevará la resta E B sobre C D, y se encontrará que está contenida 4 veces con una segunda resta F D, lo que dá:

$$C\,D = 4\,E\,B + F\,D$$

Se llevará esta segunda resta sobre E B y como solo está contenida una vez de E á G, con una tercera resta G B, se tiene:

$$E\,B = F\,D + G\,B$$

Por último, llevando G B sobre F D, se encuentra que

$$F\,D = 4\,G\,B$$

Sustituyendo sucesivamente el valor de F D en el de E B, éste en el de C D, y por último el de C D en el de A B, se tendrá:

$$F\,D = 4\,G\,B,\ E\,B = 5\,G\,B,\ C\,D = 24\,G\,B,\ \text{y}\ AB = 77\,G\,B.$$

Resulta, pues, que la última resta G B está contenida 24 veces en C D y 77 en A B, por lo que estas dos rectas están en la razon de 24 á 77.

El procedimiento empleado es análogo á la operacion que sirve para encontrar el máximo comun divisor de dos números, y se termina como aquel cuando la resta encontrada es nula. Un raciocinio semejante al que hicimos en aritmética, (110) probaria que así se encuentra no solo una medida comun para ambas líneas, sino la *mayor* de las medidas comunes, que pueden tener.

Se dice que dos rectas son *conmensurables* entre sí, cuando tienen una medida comun, y que son *inconmensurables* en el caso contrario.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Cuando dos rectas son inconmensurables, el procedimiento que acabamos de indicar no puede conducir á una resta nula; pero como las restas sucesivas van decreciendo, llegan á tal grado de pequeñez, que pueden considerarse como nulas. Que ciertas líneas son inconmensurables, es un hecho que la teoría nos da á conocer, pero que ninguna operacion mecánica nos puede hacer sensible, y aunque la razon de dos líneas inconmensurables no pueda determinarse exactamente, siempre es posible expresarla con cuanta aproximacion se quiera.

En efecto, sean A y B dos líneas, ó más generalmente dos magnitudes de la misma especie. Imaginémonos que B esté dividida en 1000 partes por ejemplo, y que llevando una de éstas sobre A se encuentre que la contiene 3257 veces y que quede una resta. La magnitud A estará comprendida entre $\frac{B}{1000}\times 3257$ y $\frac{B}{1000}\times 3258$, ó lo que es lo mismo, entre $B\times 3'257$ y $B\times 3'258$. Estos números 3'257 y 3'258 serán los valores de la razon $\frac{A}{B}$ con una aproximacion de ménos de $\frac{B}{1000}$, el primero por defecto y el segundo por exceso. Si en lugar de dividir B en 1000 partes iguales se hubiera dividido en 10000, la aproximacion habria sido 10 veces mayor, y si se hubiera dividido B en 100000 partes, la aproxmacion habria sido 100 veces mayor que la obtenida, y así se concibe que prescindiendo de la dificultad material que la division en mayor número de partes presenta en la práctica, siempre se podrán representar las magnitudes de la misma especie por números, ya sea exactamente, ya con la aproximacion que se desée ó que exija la naturaleza de la cuestion.

364.—Para trazar una línea recta sobre un plano nos valemos de la regla y del lápiz ó grafio. La regla es una barra de madera ó de metal construida con la condicion de que todos los puntos de uno de sus bordes estén en la misma direccion, como lo representa la fig. 7. El grafio ó tira-líneas sirve para trazar las rectas con tinta apoyando dos puntos de la regla A y B sobre los dos puntos dados A' B' y haciéndolo resbalar contra el borde de la regla al mismo tiempo que se apoya sobre el papel.

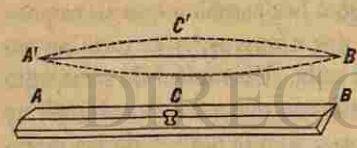


Figura 7.

Para asegurarse de la buena construccion de la regla, á lo cual se llama *rectificarla*, se marca una recta, como se ha explicado, haciendo coincidir el punto A con A' y el punto B con B'. En seguida se invierte la regla teniendo cuidado de hacer coincidir el punto A con B', y el punto B con A', y se traza una nueva línea. Si la regla está bien

construida las dos marcas se confundirán, supuesto que por dos puntos solo puede pasar una recta. Si la regla está mala resultarán dos trazas como son A' C' B' y A' C B'.

Como la falta de exactitud en las construcciones geométricas resulta á veces de que las líneas que se marcan, tienen una anchura más ó ménos considerable y los puntos son pequeñas superficies, debe procurarse que las líneas sean lo más finas posibles, y que los puntos estén determinados por líneas que se corten bajo ángulos casi rectos.

Cuando se quiere fijar no solo la direccion, sino tambien la magnitud de una recta, debe trazarse sobre la regla únicamente hasta los puntos extremos, y para medir su longitud, nos servimos de la escala y del compás.

La escala es una regla de madera, de marfil ó de metal (fig. 8) en la que se han marcado divisiones iguales referidas á una unidad de longitud como el metro, la vara, la yarda, etc.


Figura 8.

El compás es un instrumento regularmente de metal (fig. 9) compuesto de dos piernas de igual longitud A B y A C, que pueden girar al rededor de un eje A. Cuando sirve para medir la longitud de las líneas sus puntas son fijas, y cuando se usa para trazar círculos, una de sus puntas debe reemplazarse por un lápiz ó un grafio. Si la recta que se trata de medir tiene ménos longitud que la escala y ésta tiene hecho su borde en bisel, basta poner la escala junto á la recta haciendo coincidir su cero con uno de los extremos, y leer la division en que toca el otro extremo de la recta. En caso contrario se toma con el compás un cierto número de unidades de la escala, (20 por ejemplo), y se llevan sobre la línea el número de veces que es posible, (supongamos que hayan sido 3), hasta que quede una parte menor. En seguida se mide esta resta con el compás, cuya abertura llevada sobre la escala indicará cuánto se debe agregar á las primeras medidas. Si la resta tenia 5 divisiones, toda la línea tendria 65 milímetros por ejemplo. En todos los casos el grado de aproximacion depende de la igualdad y finura de las divisiones de la



Figura 9.

escala así como del menor grueso que se pueda dar á las líneas y á las puntas del compás.

365.—Cuando se quieren sumar dos rectas B C y D E (fig. 10) se lleva una D E sobre la prolongacion C A de la otra B C y la recta B A será igual á B C+D E. Si las líneas B C y D E fueran iguales, la recta B A seria doble de una de ellas y así se concibe el modo de duplicar, triplicar y en general de multiplicar una recta por un número.



Figura 10.

Para restar DE de BC bastaria llevar DE de C á D', y se tendria BD'=BC—DE.

366.—*Se llama línea quebrada* (fig. 11) *la que está compuesta de líneas rectas que no quedan en la misma direccion.*



Figura 11.

Para fijar la posicion de una línea quebrada, es preciso conocer los puntos extremos A, B, C, D, E, F, de las partes que la forman; y para que dos líneas quebradas sean iguales, es necesario que en el caso de que se sobrepusieran coincidiesen los expresados puntos A, B, C, D, E y F. Entre dos puntos, A y F, se pueden tirar una infinidad de líneas quebradas.

367.—*Se llama línea curva* (fig. 12), *la que tiene todos sus puntos en diferente direccion.* Puede concebirse como descrita por un punto que se mueve cambiando por grados insensibles á cada instante de direccion.



Figura 12.

Para fijar la forma de una curva, es necesario conocer la posicion de todos sus puntos, ó la ley del movimiento del punto que la engendró. Para que dos curvas sean iguales, es preciso que sobreponiéndose puedan coincidir en todos sus puntos. Entre dos puntos, A y B, puede tirarse una infinidad de curvas.

368.—*Se llama línea mixta* (fig. 13) *la que está compuesta de partes rectas y de partes curvas.*

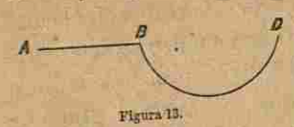


Figura 13.

Para determinar una línea mixta es preciso poder fijar las partes de que se compone, siendo necesario que estas partes sean iguales para que dos líneas mixtas lo sean.

369.—*Se llama circunferencia de círculo una curva* (fig. 14) *plana, cerrada, cuyos puntos todos están á igual distancia de otro* C *interior, llamado centro.*

Círculo es la porcion de superficie comprendida dentro de la circunferencia.

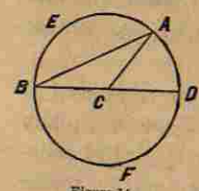


Figura 14.

Suele aplicarse, aunque indebidamente, la palabra círculo á la circunferencia; pero como lo indican las definiciones respectivas, *la circunferencia es una línea,* miéntras que *el círculo es una superficie.*

Se llama *radio toda recta,* C A, *que va del centro á la circunferencia,* y como esta curva tiene todos sus puntos equidistantes del centro, resulta que *todos los radios son iguales.*

La posicion de un círculo queda fijada cuando se conoce su centro y el radio, por lo que *dos círculos serán iguales cuando lo sean sus radios.*

Se llama *diámetro toda recta,* B D, *que pasando por el centro, termina en la circunferencia.* Como todo diámetro se compone de dos radios y éstos son iguales, se infiere que *todos los diámetros de un mismo círculo son iguales.*

Se llama *arco una parte,* A D, *de la circunferencia.*

Cuerda es una recta, B A, *que va de un punto á otro de la circunferencia.* Se dice que la cuerda B A subtende al arco B E A, y aunque toda cuerda subtende dos arcos B E A y B F A, comunmente se aplica esta expresion al arco menor. Recíprocamente se dice que la línea B A se subtensa del arco B E A.

Se llama *segmento la porcion de superficie* B A E B *comprendida entre una cuerda y el arco que subtende.*

Sector es la porcion de superficie A C D A *comprendida entre dos radios y un arco.*

Secante es una recta A B (fig. 15) *que corta la circunferencia en dos puntos, y tiene parte dentro y parte fuera del círculo.*

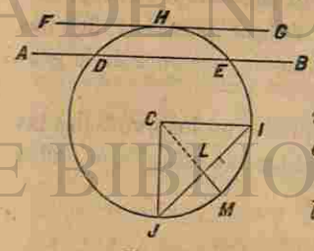


Figura 15.

Tangente es una recta F G *que toca á la circunferencia en un solo punto* H.

Se llama sagita ó flecha la parte L M *de un radio comprendida entre la mitad de la cuerda y la mitad del arco que subtende.*

Cuadrante es el arco J M I *equivalente á la cuarta parte de la circunferencia.*

370.—Las *superficies* pueden ser planas, curvas y mixtas.

Se llama *plano, ó superficie plana, aquella á la que se puede aplicar*

una línea recta en cualquiera direccion, tocándola en todos sus puntos. La superficie tranquila del agua, cuando no tiene una gran extension, es plana.

La interseccion comun de dos planos es una línea recta; pues si tomamos dos puntos en la interseccion y por ellos hacemos pasar una recta, por la definicion de plano esta recta deberá tener todos sus puntos en ambos planos.

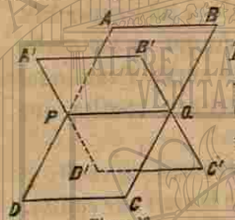


Figura 16.

Por una recta pueden pasar una infinidad de planos. Basta imaginarse (fig. 16) que un plano A B C D que pasa por la recta P Q gira al rededor de ella, para comprender que puede tomar una multitud de posiciones como A' B' C' D' conteniendo todos los planos á la recta P Q.

Por tres puntos no se puede hacer pasar más de un solo plano. Si á la condicion de pasar el plano por los dos puntos de la recta P Q se une la de que pase por un tercer punto A, se comprende fácilmente que si se hace pasar un plano por P Q y nos imaginamos que gire al rededor de esta recta, entre la multitud de planos que nos es dado concebir, solo uno tendrá la propiedad de pasar al mismo tiempo por el punto A.

De esto resulta que *la posicion de un plano queda enteramente fijada por tres puntos que no están en línea recta ó por dos rectas que se cortan en un punto.*

Para fijar la extension de un plano (fig. 16) *es preciso conocer la situacion de los puntos extremos* A B C D *que lo limitan.*

Dos planos coincidirán siempre que coincidan tres puntos de uno de ellos, con tres puntos del otro.

Para que dos planos sean iguales en extension, es necesario que puedan coincidir todos los puntos extremos que los limitan.

Figuras planas son aquellas que pueden estar contenidas en un plano. El círculo y el triángulo son, por ejemplo, figuras planas, y de ellas nos ocuparemos especialmente en las dos primeras secciones de la geometría.

371.—En los *volúmenes* distinguiremos aquellos en los que todas las superficies que los limitan son planas, y aquellos que están terminados por superficies curvas.

Axiomas, métodos de demostracion y definiciones.

372.—Axiomas.—Al tratar de los fundamentos del cálculo, hemos establecido (32 y 242) los siguientes axiomas:

Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí.

Si á cantidades iguales se agregan ó quitan iguales, los resultados serán iguales.

Si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, los resultados serán iguales.

Una cantidad es igual á la reunion de sus partes.

Los cuales como se refieren á las cantidades, son aplicables en geometría á la extension; pero por la naturaleza ú objeto de esta ciencia tenemos que agregar el siguiente que es de un uso frecuente:

Las líneas, superficies ó volúmenes que aplicados unos encima de otros coinciden en todos sus puntos, son iguales.

De este corto número de axiomas y de las *definiciones,* que además de explicar una palabra constituyen *la asercion de un hecho ó de una propiedad fundamental geométrica,* por un riguroso raciocinio se van sucesivamente infiriendo nuevas verdades de las que á su vez nos servimos para deducir y establecer principios desconocidos.

Así, por ejemplo, la definicion de *círculo* además de explicar esta palabra señala, ó si se quiere, enseña la propiedad de esta curva de tener sus puntos equidistantes del centro, de la cual deducimos que los radios son iguales, lo mismo que los diámetros, y otro gran número de teoremas, como que el diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales, que es la mayor de todas las cuerdas, etc., etc.

373.—Métodos de demostracion.—En geometría se emplea lo mismo que en aritmética y en álgebra, la *demostracion positiva* [27] y la *negativa;* pero como la igualdad ó desigualdad de dos figuras puede hacerse muy preceptible á nuestros sentidos colocando una sobre otra; á menudo usamos este método llamado de *sobreposicion* para demostrar por medio de un raciocinio directo ó indirecto la igualdad ó desigualdad de dos figuras.

Repetiremos que la *demostracion positiva es aquella en la que el teorema por demostrar resulta como consecuencia inmediata de otros principios ciertos.* Unas veces de una propiedad general se deduce otra particular ó ménos general, y otras de lo explícito de una proposicion se deduce lo que en ella hay implícito.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Demostracion negativa es la que nos hace ver, que de no ser cierto el principio que trata de demostrarse, resultaria cierto otro principio incompatible con los que hemos demostrado.

En la demostracion por sobreposicion, sabiendo que una parte de una figura puede coincidir con parte de otra figura, y fundándose en teoremas demostrados, se deduce que el resto de las dos figuras debe coincidir.

Para dar á comprender mejor estas definiciones, pondremos un ejemplo de estas diferentes clases de demostracion.

Demostracion directa sin sobreposicion.

TEOREMA.—*El diámetro es la mayor de todas las cuerdas.*

Vamos á demostrar que el diámetro A B [fig. 17] es mayor que la cuerda A D. Si tiramos el radio C D, tendremos que por ser A D línea recta, y A C D quebrada; y por ser la línea recta el camino más corto entre dos puntos, se tiene:

A C D>A D

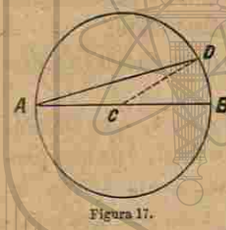


Figura 17.

pero como A C D consta de dos radios, y el diámetro A B es igual tambien á dos radios, se tiene que A C D=A B, luego

A B>A D.

Y como el raciocinio hecho con *A D* puede aplicarse á otra cuerda cualquiera, se infiere la verdad del teorema en toda su generalidad.

Ejemplo de demostracion directa con sobreposicion.

TEOREMA.—*El diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales.*

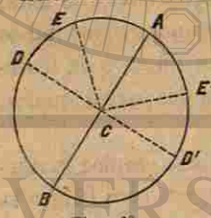


Figura 18.

Si suponemos que la figura 18 se doblara por el diámetro A B quedando fija la parte A E D B y girando al rededor de A B la parte A D' B, es claro que la recta A B es comun á las dos parte en la figura, y en virtud de que todos los radios son iguales, el extremo D' deberá coincidir con algun otro punto como D equidistante de C; el punto E' por la misma razon deberá coincidir con algun otro punto como E, y así sucesivamente debiendo coincidir todos los puntos de la circunferencia que quedan á la derecha del diámetro con los que están á su izquierda, se infiere que estas dos partes determinadas por el diámetro son iguales.

Como se vé en este ejemplo hay una cosa conocida: que la recta A B es comun á las dos partes, cuya igualdad se va á demostrar, y de esto que sabemos y de un principio cierto, que los radios son iguales, se deduce el teorema. Así, pues, es preciso en todos los casos dar el fundamento ó la razon en virtud de la que coincidiendo una parte de dos figuras deberán coincidir todas las demás.

Ejemplo de demostracion negativa con sobreposicion.

TEOREMA.—*El diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales.*

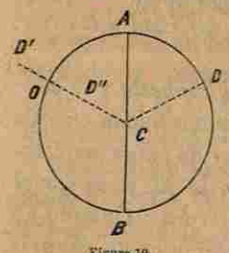


Figura 19.

Si suponemos que las dos partes determinadas por el diámetro son desiguales, al doblar la figura [fig. 19] por A B, el punto D caeria en D' fuera de la circunferencia si la parte de la derecha era la mayor. En este caso tendriamos

C D=C D'

pero C D'>C O

luego C D >C O

esto es, seria preciso que los radios fueran desiguales, lo que no es admisible.

Si suponemos que la parte de la derecha sea la menor, al doblar la figura D caeria dentro del círculo y tendriamos:

por una parte C D=C D"

por otra C D"<C O

luego C D<C O

esto es, que los radios serian desiguales, lo que es imposible.

Luego si la parte A D B no puede ser mayor, ni tampoco menor que la parte A O B, tendrá que ser igual á ella, que es lo que se queria demostrar.

Este ejemplo pone de manifiesto que es preciso completar la demostracion negativa haciendo ver que en cualquiera otro supuesto que no sea el del teorema, forzosamente resulta un absurdo. Si la parte de la derecha no puede ser mayor ni menor que la de la izquierda, tendrá que ser igual á ella, que es lo que establece el teorema.

En geometría, el método de demostracion indirecta, llamado tambien de *reduccion al absurdo*, se usa á menudo para demostrar los teoremas que se llaman *recíprocos*. [374]

374.—DEFINICIONES.—Hay dos vicios de raciocinio que los estudiantes deben evitar en geometría. El uno llamado *peticion de principio, consiste en pretender tomar como fundamento de la demostracion el teorema que debe demostrarse.* Para excusarlo, no hay más que tener presente que el teorema por demostrar debe resultar como consecuencia *de otras* verdades ya conocidas. El otro vicio se llama *círculo vicioso, y consiste en tomar como fundamento de la demostracion un teorema que todavía no se ha demostrado, y que para hacerlo seria necesario apoyarse en el teorema que trata de demostrarse.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Lema es una proposicion fundamental que sirve de preparacion á varios teoremas ó á la resolucion de una série de problemas.

Corolario, es la consecuencia de una proposicion.

Escolio es una observacion relativa á una ó varias proposiciones, con el objeto de explicar sus relaciones, su extension, su utilidad y las restricciones á que deben estar sometidas.

En todo teorema deben distinguirse dos partes: *el supuesto* y la *conclusion*, que es su consecuencia. Por ejemplo, si decimos que *la cuerda que pasa por el centro, ó bien el diámetro, es la mayor de todas las cuerdas; el supuesto* ó hipótesis es que se trata de la *cuerda que pasa por el centro*, y la conclusion es que sea la *mayor de las cuerdas*. Cuando de un teorema se forma otro en el que se toma la *conclusion* como *supuesto*, y éste como conclusion, resulta una proposicion que se llama *recíproca* de la primera. Así el teorema recíproco del que nos ocupamos es que *la mayor de todas las cuerdas es la que pasa por el centro.*

Como algunas veces la conclusion del teorema primitivo conviene á otros casos no comprendidos en el supuesto, resulta que no siempre es cierta la recíproca, y de aquí la necesidad de demostrarla.

Los problemas de geometría que, como los demás que hemos resuelto, tienen por objeto determinar algo desconocido que satisfaga determinadas condiciones, pueden ser relativos á la figura ó relativos á la extension. Los primeros son *gráficos* y los segundos *numéricos*. Es un problema gráfico tirar una tangente á un círculo; y es un problema numérico determinar la longitud del radio de un círculo.

Todo problema consta de resolucion y de demostracion.

ANGULOS.

375.—DEFINICIONES.—*Se llama ángulo la figura formada por dos rectas* A B, A C, [fig. 20], *inclinadas entre sí que concurren en un punto.* Pueden suponerse prolongadas las dos rectas A B y A C, sin que el valor del ángulo cambie. La magnitud de un ángulo depende de la mayor ó menor inclinacion de las rectas que lo forman, pero no de la longitud de éstas. Así, pues, en un ángulo lo que se estima, es la inclinacion de dos rectas.

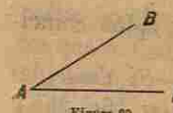


Figura 20.

Cuando no hay más que un solo ángulo en un punto, como en la figura 20, se denomina por la letra A que está en este punto que se llama *vértice;* y las rectas A B y A C se llaman *lados* del ángulo.

Cuando hay varios ángulos en un mismo punto, como en la figura 21, se denominan con sus tres letras; pero teniendo cuidado de nombrar siempre la del vértice en medio de las dos que corresponden al extremo libre de cada uno de los lados. Así se dice el ángulo A C D y el ángulo D C B.

Cuando una recta D C cae sobre otra A B formando con ella dos ángulos D C A y D C B iguales entre sí [fig. 21], se dice que esta recta es *perpendicular*, y los ángulos D C A y D C B se llaman *rectos.*

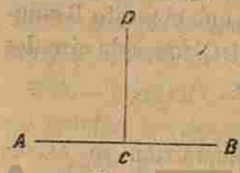


Figura 21.

Todo ángulo E C B [fig. 22], *menor que un recto D C B, se llama agudo; y todo ángulo E C A, mayor que un recto D C A, se llama obtuso.*

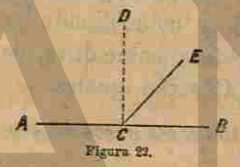


Figura 22.

Cuando dos ángulos como E C B y E C A valen juntos dos ángulos rectos, se dice que son suplementarios.

Se llaman complementarios dos ángulos como E C B y E C D, cuya suma es igual á un ángulo recto.

Se llaman ángulos adyacentes los que forma una recta [fig. 23]. *C D que cae sobre otra A B.* Los ángulos A D C y C D B son adyacentes.



Figura 23.

Se llaman *ángulos opuestos al vértice, los que están formados por dos rectas* [fig. 24] *A B y C D que se cortan en un punto O y tienen la expresada posicion,* como los ángulos A O C y B O D.

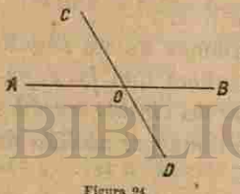


Figura 24.

376.—Para que dos ángulos sean iguales, es necesario que la inclinacion respectiva de las dos rectas que forman cada uno, sea la misma; esto se prueba haciendo coincidir el vértice A [fig. 25] con el A' y el lado A C con el A' C', y si el otro lado A B coincide con A' B' los dos ángulos serán iguales.

Por tanto, siempre que dos ángulos sean iguales, estamos seguros de que si hiciéramos coincidir sus vértices y uno de sus lados, en el otro

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Lema es una proposicion fundamental que sirve de preparacion á varios teoremas ó á la resolucion de una série de problemas.

Corolario, es la consecuencia de una proposicion.

Escolio es una observacion relativa á una ó varias proposiciones, con el objeto de explicar sus relaciones, su extension, su utilidad y las restricciones á que deben estar sometidas.

En todo teorema deben distinguirse dos partes: *el supuesto* y la *conclusion*, que es su consecuencia. Por ejemplo, si decimos que *la cuerda que pasa por el centro, ó bien el diámetro, es la mayor de todas las cuerdas; el supuesto* ó hipótesis es que se trata de la *cuerda que pasa por el centro*, y la conclusion es que sea la *mayor de las cuerdas*. Cuando de un teorema se forma otro en el que se toma la *conclusion* como *supuesto*, y éste como conclusion, resulta una proposicion que se llama *recíproca* de la primera. Así el teorema recíproco del que nos ocupamos es que *la mayor de todas las cuerdas es la que pasa por el centro.*

Como algunas veces la conclusion del teorema primitivo conviene á otros casos no comprendidos en el supuesto, resulta que no siempre es cierta la recíproca, y de aquí la necesidad de demostrarla.

Los problemas de geometría que, como los demás que hemos resuelto, tienen por objeto determinar algo desconocido que satisfaga determinadas condiciones, pueden ser relativos á la figura ó relativos á la extension. Los primeros son *gráficos* y los segundos *numéricos*. Es un problema gráfico tirar una tangente á un círculo; y es un problema numérico determinar la longitud del radio de un círculo.

Todo problema consta de resolucion y de demostracion.

ANGULOS.

375.—DEFINICIONES.—*Se llama ángulo la figura formada por dos rectas* A B, A C, [fig. 20], *inclinadas entre sí que concurren en un punto.* Pueden suponerse prolongadas las dos rectas A B y A C, sin que el valor del ángulo cambie. La magnitud de un ángulo depende de la mayor ó menor inclinacion de las rectas que lo forman, pero no de la longitud de éstas. Así, pues, en un ángulo lo que se estima, es la inclinacion de dos rectas.

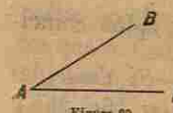


Figura 20.

Cuando no hay más que un solo ángulo en un punto, como en la figura 20, se denomina por la letra A que está en este punto que se llama *vértice;* y las rectas A B y A C se llaman *lados* del ángulo.

Cuando hay varios ángulos en un mismo punto, como en la figura 21, se denominan con sus tres letras; pero teniendo cuidado de nombrar siempre la del vértice en medio de las dos que corresponden al extremo libre de cada uno de los lados. Así se dice el ángulo A C D y el ángulo D C B.

Cuando una recta D C cae sobre otra A B formando con ella dos ángulos D C A y D C B iguales entre sí [fig. 21], se dice que esta recta es *perpendicular*, y los ángulos D C A y D C B se llaman *rectos.*

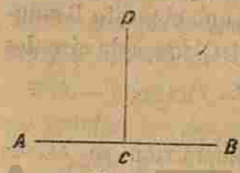


Figura 21.

Todo ángulo E C B [fig. 22], *menor que un recto D C B, se llama agudo; y todo ángulo E C A, mayor que un recto D C A, se llama obtuso.*

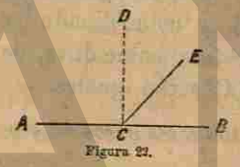


Figura 22.

Cuando dos ángulos como E C B y E C A valen juntos dos ángulos rectos, se dice que son suplementarios.

Se llaman complementarios dos ángulos como E C B y E C D, cuya suma es igual á un ángulo recto.

Se llaman ángulos adyacentes los que forma una recta [fig. 23]. *C D que cae sobre otra A B.* Los ángulos A D C y C D B son adyacentes.



Figura 23.

Se llaman *ángulos opuestos al vértice, los que están formados por dos rectas* [fig. 24] *A B y C D que se cortan en un punto O y tienen la expresada posicion,* como los ángulos A O C y B O D.

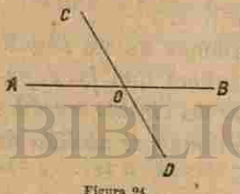


Figura 24.

376.—Para que dos ángulos sean iguales, es necesario que la inclinacion respectiva de las dos rectas que forman cada uno, sea la misma; esto se prueba haciendo coincidir el vértice A [fig. 25] con el A' y el lado A C con el A' C', y si el otro lado A B coincide con A' B' los dos ángulos serán iguales.

Por tanto, siempre que dos ángulos sean iguales, estamos seguros de que si hiciéramos coincidir sus vértices y uno de sus lados, en el otro

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

lado tambien coincidirían; y recíprocamente cuando los lados coincidan los ángulos serán iguales.



Figura 25.

377.—Teorema.—*Si desde los vértices de dos ángulos* [fig. 25] *y con el mismo radio se trazan arcos de círculo B C y B' C', á ángulos iguales corresponden arcos iguales, y recíprocamente.*

Por haber tomado el radio A C=A' C' y porque todas las líneas rectas pueden sobreponerse, si pusiéramos una sobre otra estas rectas, el punto A coincidiría con A' y el C con C'. Por ser iguales los dos ángulos [376], el lado A B tomaria la direccion A' B', y como estas dos rectas tienen igual longitud por ser rádios, resulta que el punto B coincidiría con B'; luego siendo los dos arcos B C y B' C' arcos de círculos iguales y coincidiendo sus extremos, serán iguales.

La recíproca se demostrará como sigue:

Si sobrepusiéramos las rectas A C y A' C', coincidirían sus extremos por haberlas tomado iguales por construccion. Por ser iguales los arcos B C y B' C', el punto B' coincidiría con B, y coincidiendo los dos extremos de la recta B A con los de la B' A' ésta coincidiría, de lo que resulta que los dos ángulos B A C y B' A' C' serán iguales.

378.—Teorema.—*Los ángulos son proporcionales á los arcos del círculo descrito desde su vértice como centro.*

Si desde el vértice C [fig. 26] del ángulo B C A trazamos una circunferencia con el rádio C A, y al lado de este ángulo trazamos otro B C D igual á B C A, resulta que conforme al teorema anterior el arco B D=B A; luego al ángulo D C A doble de B C A corresponde un arco D A doble de B A.

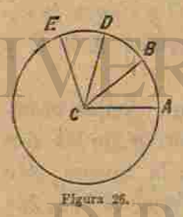


Figura 26.

Si al lado de D C B trazamos otro ángulo igual E C D, tendremos [377] que E D = D B = B A, luego al ángulo E C A que es triple de B C A, corresponde un arco E A triple de B A.

Y como lo mismo demostrariamos de un ángulo cuádruplo, quíntuplo, etc., se infiere que *los ángulos son proporcionales á los arcos del círculo trazados desde su vértice como centro,* y por esta razon se toma por *medida de un ángulo el arco que sus lados abrazan.*

En efecto, de la magnitud del arco depende la inclinacion de los lados, y por tanto el valor del ángulo.

379.—Toda circunferencia de círculo se considera dividida en 360

partes iguales que se llaman grados, cada grado se subdivide en 60 partes que se llaman minutos, y cada minuto se subdivide en 60 segundos. Los grados se indican con un pequeño cero arriba del número que los representa, los minutos con una coma y los segundos con dos comas. Así 25°—30'—18" se lee 25 grados 30 minutos y 18 segundos.

Y como los arcos son la medida de los ángulos, éstos se estiman tambien en grados, minutos y segundos. Así, *un ángulo recto,* cuya medida es un cuadrante, *vale* 90°. *Dos ángulos suplementarios valen juntos* 180°. *Dos ángulos complementarios valen juntos* 90°. *Un ángulo agudo vale ménos de* 90°, *y uno obtuso vale más de* 90°.

Este sistema de division, que es el más generalmente adoptado, se llama *sexagesimal;* pero hay otro llamado *centesimal,* en el que la circunferencia se considera dividida en 400 grados, el grado en 100 minutos y el minuto en 100 segundos.

380.—Teorema.—*En un mismo círculo, ó en círculos iguales á arcos iguales, corresponden cuerdas iguales, y recíprocamente.*

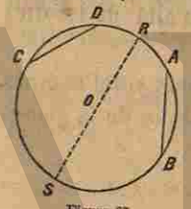


Figura 27.

Sea el arco A B = C D [fig. 27] del mismo círculo, y vamos á demostrar que las cuerdas A B y D C serán iguales. Tomemos el punto R en la mitad del arco D A y tiremos el diámetro R S. Si dobláramos la figura por la recta R S, la semicircunferencia R B S coincidiria con la R C S; [373] por haberse tomado R en el medio de D A, el punto A concidirá con D; y por ser el arco A B = D C el punto B coincidiría con C; y supuesto que los extremos de la cuerda A B coinciden respectivamente con los de la C D resulta que estas dos cuerdas serán iguales.

Recíprocamente si la cuerda A B = C D, haciendo la misma construccion y doblando la figura segun R S resulta que coincidirían los extremos de los arcos, por lo que serán iguales.

Si se tratara de dos círculos iguales comenzariamos por sobreponerlos, y en seguida serian aplicables las demostraciones anteriores.

De este teorema resulta que *dos ángulos serán iguales cuando lo sean las cuerdas de los arcos descritos desde sus vértices con el mismo rádio, y recíprocamente.*

381.—Antes de ocuparnos de la resolucion de algunos problemas diremos que, al tratar de una demostracion, la figura tiene solo por objeto ayudar á la inteligencia del raciocinio que se funda en las relaciones que hay entre el enunciado y el objeto de la demostracion; por cuya razon esas figuras no tienen necesidad de ser trazadas con gran cuidado; no sucediendo otro tanto cuando el objeto es resolver un proble-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ma *gráfico*, en el que se trata de construir figuras que satisfagan determinadas condiciones, cuyo resultado depende de la exactitud con que se tracen las líneas, objeto de la cuestion. En la resolucion de los problemas gráficos importa que el papel esté restirado sobre un plano perfecto, que los instrumentos que se usen estén rectificados, que las líneas sean tan finas como sea posible, y por último, que los puntos tengan la menor extension que se pueda.

En cuanto á los problemas *numéricos*, que tienen por objeto determinar los valores numéricos de los elementos de una figura deduciéndolos de otros, son del resorte de la aritmética; la geometría solo interviene en ellos para hacer conocer las relaciones de extension que ligan los datos con las incógnitas, así como aquellos procedimientos por cuyo medio se determina la relacion de estos últimos con la unidad de su especie. Debe tenerse en cuenta la aproximacion que los instrumentos usados pueden dar para no llevar inútilmente los cálculos más allá de ese grado. Sí, por ejemplo, la escala no indica sinó medios milímetros, será inútil llevar la aproximacion en los cálculos más allá de los diez milímetros.

Además del lápiz, del grafio, de la regla, de la escala y del compás para la resolucion de los problemas gráficos, nos servimos de la *escuadra* y del *trasportador*.



Figura 28.

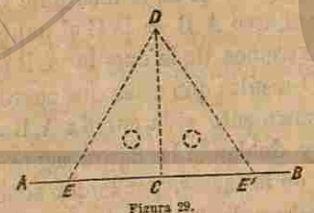


Figura 29.

La *escuadra* [fig. 28] es un triángulo de madera, de metal ó de marfil, en el que uno de sus ángulos A precisamente es recto. Sirve particularmente para trazar líneas perpendiculares y paralelas. Para cerciorarse de que está bien construida, por un punto C [fig. 29] de la recta A B se traza la perpendicular C D aplicando el borde E C de la escuadra contra ella. En seguida se voltea la escuadra aplicando contra el papel la cara que estaba para arriba y quedando el vértice E cerca de B en el punto E', se traza otra perpendicular por el mismo punto C. Si esta segunda perpendicular se confunde con la primera, es prueba de que la escuadra está buena, pues entónces el ángulo D C E será recto.

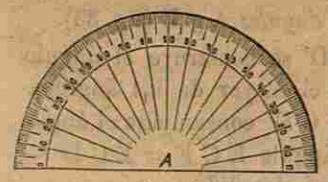


Figura 30.

El trasportador (fig. 30) es un semicírculo de metal ó de cuerno trasparente, en el que está marcado el centro A, y los grados y medios grados. Sirve para medir los ángulos ó para construirlos de determinado valor. Hay dos cosas que rectificar en este instrumento: que el punto marcado A sea el centro del semicírculo, y que los grados sean iguales entre sí. Para cerciorarse de la buena colocacion del centro, basta tomar con el compás la longitud del radio del trasportador y trazar una circunferencia: si en cualquiera posicion pueden hacerse coincidir el centro y la semicircunferencia del trasportador con el centro y circunferencia trazada, el centro del instrumento estará bien fijado. Para averiguar si está bien dividido, se toma con el compás la cuerda, por ejemplo, del arco de 15°, y se va llevando entre las divisiones de 1 y 16°, de 2 y 17°, de 3 y 18°, etc., cuyas distancias deben ser constantemente iguales, supuesto que á arcos iguales corresponden cuerdas iguales.

382.—Problemas de angulos.—I.—*Sobre la recta* A B (fig. 31) *canstruir un ángulo igual al ángulo dado* D.

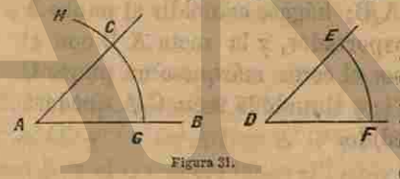


Figura 31.

Desde el vértice D, como centro y con un radio cualquiera, trácese el arco E F; haciendo centro en A y con el mismo radio trácese el arco indefinido G H: tómese la cuerda E F y llévese desde G hasta C: y tirando la recta C A ésta formará un ángulo igual al dado.

El fundamento de esta construccion es que los arcos E F y C G, que miden estos ángulos, son iguales por pertenecer á círculos iguales y tener cuerdas iguales.

II.—*Construir un ángulo igual á la suma de dos ángnlos dados.*

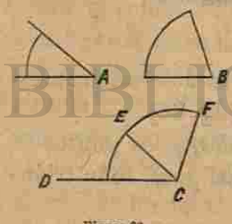


Figura 32.

Sean los ángulos dados A y B. Sobre la recta C D (fig. 32) y conforme á lo explicado en el problema anterior, se construye el ángulo D C E=A. En seguida sobre la recta C E y empleando el mismo método, se construye el ángulo E C F = B. El ángulo F C D será igual á A + B. Así puede construirse un ángulo doble, triple, etc, de otro.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

III.—*Determinar la diferencia entre dos ángulos* A *y* B (fig. 33).

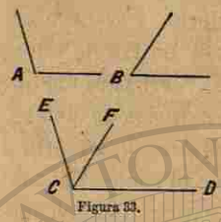


Figura 33.

Sobre la recta C D' se construye el ángulo D' C E = A, que es el mayor de los ángulos. Sobre el mismo lado C D' constrúyase el ángulo D' C F = B. El ángulo E C F = E C D' — D' C F = A — B será el pedido.

IV.—*Determinar el número de grados del ángulo* C A B (fig. 34) *por medio del trasportador.*



Figura 34.

Se colocará el trasportador sobre el ángulo C A B, teniendo cuidado de hacer coincidir el centro del instrumento con el vértice A del ángulo y la línea marcada con 0° y 180° con uno de los lados, con C A por ejemplo. Hecho esto, bastará ver el número de grados que marca el otro lado A B para conocer el valor del ángulo, que en este caso es de 37°—30'. Siempre que sea necesario se prolongarán los lados del ángulo.

V.—*Construir un ángulo de* 35°½ *sirviéndose del trasportador.* (Fig. 35).



Figura 35.

Trácese la recta A B; hágase coincidir el punto A con el centro del trasportador, y la recta A B con el diámetro que pasa por el cero: márquese un punto C en la graduacion 35°½; y tirando la recta C A quedará trazado el ángulo pedido.

Principales casos de igualdad en los triángulos.

383.—Se llama triángulo rectilíneo una figura que determina un espacio cerrado por tres líneas rectas, como A B C (fig. 36).

Las rectas que limitan el triángulo se llaman *lados*, y los puntos en que concurren de dos en dos, se llaman *vértices*. Así pues, todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos.

Para que dos triángulos puedan coincidir en todos sus puntos, y que

por lo mismo sean iguales, se necesita que coincidan respectivamente sus tres vértices, que son los extremos de sus lados.

Consideraremos por ahora tres casos de igualdad de los triángulos.

384.—I.—*Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales* (fig. 36).

$$A\,B = A'\,B',\ A = A' \text{ y } B = B'$$

Demostracion.—Por ser A B = A' B' si sobrepusiéramos estas figuras el lado A B coincidirian con A' B'. Por ser el ángulo A = A' coincidiendo el lado A B con A' B', el lado A C tomaria la misma direccion que A' C'. Por ser el ángulo B = B' coincidiendo el lado A B con A' B', el lado B C tomaria la misma direccion que B' C', y coincidiendo respectivamente los dos lados A C y B C con A' C' y B' C' es claro que el punto C, interseccion de las dos primeras rectas, coincidiria con C' interseccion de las dos últimas. Finalmente, coincidiendo los tres vértices de los dos triángulos resulta que son iguales.

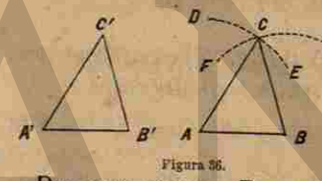


Figura 36.

385.—II.—*Dos triángulos son iguales cuando tienen un ángulo igual formado por lados iguales* (fig. 36).

$$A = A',\ A\,B = A'\,B' \text{ y } A\,C = A'\,C'.$$

Demostracion.—Por ser el ángulo A = A' si sobrepusiéramos las dos figuras, los lados A B y A C tomarian la misma direccion que A' B' y A' C'; y por ser A B = A' B' y A C = A' C', el punto B coincidiria con B' y el C con C'; luego el tercer lado B C coincidiria con B' C' por coincidir sus extremos, y los triángulos serán iguales.

386.—III.—*Dos triángulos serán iguales cuando tengan sus tres lados respectivamente iguales.*

(Fig. 36) $A\,B = A'\,B',\ A\,C = A'\,C' \text{ y } B\,C = B'\,C'$

Demostracion.—Por ser el lado A B = A' B' si sobrepusiéramos las dos figuras, estos lados, lo mismo que sus extremos, coincidirian. Si desde el punto A como centro y con el radio A C trazamos un arco de círculo D E por ser A C = A' C' el punto C' caerá en alguno de los de este arco. Si desde el punto B como centro y con el radio B C trazamos un arco de círculo F G, por ser B C = B' C' el punto C' caerá en alguno de los del expresado arco F G; y debiendo pertenecer á los dos arcos D E y F G el punto C' caerá sobre C, que es la interseccion

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

de los arcos; luego coincidiendo los tres vértices de los dos triángulos resulta que son iguales.

387.—*En triángulos iguales a lados iguales están opuestos ángulos iguales, y recíprocamente.*

Siendo los triángulos iguales podrán sobreponerse coincidiendo los lados y los ángulos, y cuando coincidan los dos triángulos en todos sus puntos, resultará que á los lados iguales quedan opuestos ángulos iguales, y recíprocamente que á los ángulos iguales quedarán opuestos lados iguales.

Estos tres casos de igualdad de los triángulos, y el teorema que acabamos de demostrar, son de muy frecuente uso.

PERPENDICULARES Y OBLICUAS.

388.—*Se llrma perpendicular toda recta* A B (fig. 37) *que forma con otra* D C *dos ángulos* A B C *y* A B D *adyacentes é iguales entre sí.*



Figura 37.

Se llama oblícua una recta F G (fig. 38) *que forma con otra* H L *dos ángulos adyacentes desiguales.*

389.—Teorema.—*Cuando una recta* F G (fig. 38) *cae sobre otra* H L *los ángulos* F G H *y* F G L *que forman, son suplementarios.*



Figura 38.

Demostracion.—Si en el punto G levantamos la perpendicular G O tendremos:

$$F\,G\,H + F\,G\,L = O\,G\,H + O\,G\,L$$

pero por construccion

$$O\,G\,H + O\,G\,L = 2 \text{ rectos.}$$

$$F\,G\,H + F\,G\,L = 2 \text{ rectos.}$$

390.—Teorema.—*La suma de todos los ángulos consecutivos formados de un lado de una recta, es igual á dos rectos.*

Demostracion.—Para demostrar que la suma de los ángulos (fig. 39) A C D, D C E, E C F y F C B valen dos rectos, por el punto C levantaremos la perpendicular C O, y como

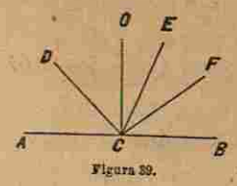


Figura 39.

$$A\,C\,D + D\,C\,E + E\,C\,F + F\,C\,B = A\,C\,O + O\,C\,B$$

y como $A\,C\,O + O\,C\,B = 2$ rectos

se infiere que

$$A\,C\,D + D\,C\,E + E\,C\,F + F\,C\,B = 2 \text{ rectos.}$$

391.—*La suma de todos los ángulos* (fig. 40) *formados al rededor de un punto* C *es igual á cuatro rectos.*

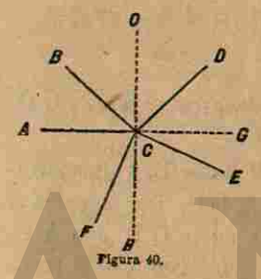


Figura 40.

Si prolongamos el lado A C hasta G, y por el punto C levantamos la perpendicular O C H tendremos que

$$A\,C\,B + B\,C\,D + D\,C\,E + E\,C\,F + F\,C\,A = A\,C\,O + O\,C\,G + G\,C\,H + H\,C\,A$$

y como los cuatro ángulos del segundo miembro son rectos, se infiere que la suma de los ángulos del primer miembro de la ecuacion, valdrán 4 rectos.

392.—*Las bisectrices de los ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.*

Se llama bisectriz la recta que divide un ángulo en dos partes iguales.

Sean los dos ángulos adyacentes [fig. 41) A C B y B C D, y vámos á demostrar que las rectas C E y C F, que dividen en dos partes iguales esos ángulos, son perpendiculares entre sí, esto es, que el ángulo F C E es recto.

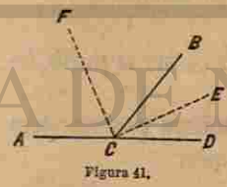


Figura 41.

Por ser adyacentes los ángulos [389] se tiene:

$$A\,C\,B + B\,C\,D = 2 \text{ rectos}$$

tomando la mitad

$$\tfrac{A\,C\,B}{2} + \tfrac{B\,C\,D}{2} = 1 \text{ recto}$$

sustituyendo por $\frac{A\,C\,B}{2}$ su igual F C B y por $\frac{B\,C\,D}{2}$, B C E se tiene

$$F\,C\,B + B\,C\,E = 1 \text{ recto}$$

ó

$$F\,C\,E = 1 \text{ recto}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

de los arcos; luego coincidiendo los tres vértices de los dos triángulos resulta que son iguales.

387.—*En triángulos iguales a lados iguales están opuestos ángulos iguales, y recíprocamente.*

Siendo los triángulos iguales podrán sobreponerse coincidiendo los lados y los ángulos, y cuando coincidan los dos triángulos en todos sus puntos, resultará que á los lados iguales quedan opuestos ángulos iguales, y recíprocamente que á los ángulos iguales quedarán opuestos lados iguales.

Estos tres casos de igualdad de los triángulos, y el teorema que acabamos de demostrar, son de muy frecuente uso.

PERPENDICULARES Y OBLICUAS.

388.—*Se llrma perpendicular toda recta* A B (fig. 37) *que forma con otra* D C *dos ángulos* A B C *y* A B D *adyacentes é iguales entre sí.*



Figura 37.

Se llama oblícua una recta F G (fig. 38) *que forma con otra* H L *dos ángulos adyacentes desiguales.*

389.—Teorema.—*Cuando una recta* F G (fig. 38) *cae sobre otra* H L *los ángulos* F G H *y* F G L *que forman, son suplementarios.*



Figura 38.

Demostracion.—Si en el punto G levantamos la perpendicular G O tendremos:

$$F\,G\,H + F\,G\,L = O\,G\,H + O\,G\,L$$

pero por construccion

$$O\,G\,H + O\,G\,L = 2 \text{ rectos.}$$

$$F\,G\,H + F\,G\,L = 2 \text{ rectos.}$$

390.—Teorema.—*La suma de todos los ángulos consecutivos formados de un lado de una recta, es igual á dos rectos.*

Demostracion.—Para demostrar que la suma de los ángulos (fig. 39) A C D, D C E, E C F y F C B valen dos rectos, por el punto C levantaremos la perpendicular C O, y como

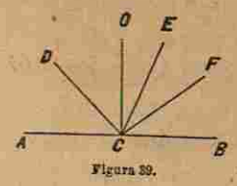


Figura 39.

$$A\,C\,D + D\,C\,E + E\,C\,F + F\,C\,B = A\,C\,O + O\,C\,B$$

y como $A\,C\,O + O\,C\,B = 2$ rectos

se infiere que

$$A\,C\,D + D\,C\,E + E\,C\,F + F\,C\,B = 2 \text{ rectos.}$$

391.—*La suma de todos los ángulos* (fig. 40) *formados al rededor de un punto* C *es igual á cuatro rectos.*

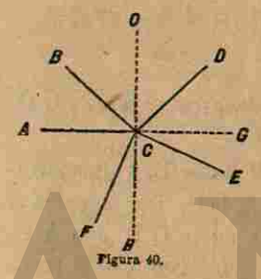


Figura 40.

Si prolongamos el lado A C hasta G, y por el punto C levantamos la perpendicular O C H tendremos que

$$A\,C\,B + B\,C\,D + D\,C\,E + E\,C\,F + F\,C\,A = A\,C\,O + O\,C\,G + G\,C\,H + H\,C\,A$$

y como los cuatro ángulos del segundo miembro son rectos, se infiere que la suma de los ángulos del primer miembro de la ecuacion, valdrán 4 rectos.

392.—*Las bisectrices de los ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.*

Se llama bisectriz la recta que divide un ángulo en dos partes iguales.

Sean los dos ángulos adyacentes [fig. 41) A C B y B C D, y vámos á demostrar que las rectas C E y C F, que dividen en dos partes iguales esos ángulos, son perpendiculares entre sí, esto es, que el ángulo F C E es recto.

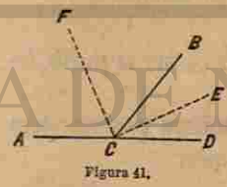


Figura 41.

Por ser adyacentes los ángulos [389] se tiene:

$$A\,C\,B + B\,C\,D = 2 \text{ rectos}$$

tomando la mitad

$$\tfrac{A\,C\,B}{2} + \tfrac{B\,C\,D}{2} = 1 \text{ recto}$$

sustituyendo por $\frac{A\,C\,B}{2}$ su igual F C B y por $\frac{B\,C\,D}{2}$, B C E se tiene

$$F\,C\,B + B\,C\,E = 1 \text{ recto}$$

ó

$$F\,C\,E = 1 \text{ recto}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

393.—*Los ángulos* (fig. 42) D B C y A B E *opuestos al vértice, son iguales.*

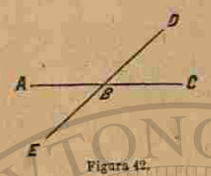


Figura 42.

Tenemos que por ser adyacentes (389) los ángulos

$$D\,B\,C + A\,B\,D = 2 \text{ rectos}$$

por igual razon

$$A\,B\,E + A\,B\,D = 2 \text{ rectos}$$

luego

$$D\,B\,C + A\,B\,D = A\,B\,E + A\,B\,D$$

suprimiendo A B D resulta

$$D\,B\,C = A\,B\,E$$

que es lo que se debia demostrar.

394.—*Cuando una recta* (fig. 43) A B, *es perpendicular á otra* C D, *ésta tambien es perpendicular á la primera* A B.



Figura 43.

Prolonguemos la recta A B hasta E, y demostraremos que siendo A B C = A B D, los ángulos A B C y C B E que forma la recta C D con A E, tambien serán iguales, y en consecuencia la recta C D será perpendicular á A E.

Por lo supuesto del teorema

$$A\,B\,C = A\,B\,D;$$

por opuestos al vértice (393)

$$A\,B\,D = C\,B\,E$$

luego

$$A\,B\,C = C\,B\,E$$

395.—*Desde un punto* A (fig. 44) *de una recta* B C, *no se puede levantar mas de una sola perpendicular.*



Figura 44.

Si supusiéramos que se pudiera levantar otra perpendicular A E, tendriamos:

por el teorema

$$D\,A\,C = 1 \text{ recto}$$

por el supuesto

$$E\,A\,C = 1 \text{ recto}$$

luego

$$D\,A\,C = E\,A\,C$$

pero siendo ésto inadmisible, se infiere que A E no es perpendicular á B C, y que solo podrá serlo en el caso de confundirse con A D.

396.—*Por un punto* A (fig. 45) *situado fuera de una recta* B C, *no se le puede bajar mas de una sola perpendicular* A D.

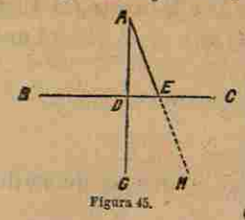


Figura 45.

Si fuera posible bajar otra perpendicular A E, tendriamos prolongando A D y A E que B C seria perpendicular á A G y á A H (394). Si doblárамos la figura por la recta B C, por ser el ángulo A D B = B D G, la recta A D tomaria la direccion de D G y el punto A caeria en alguno de la recta D G; y por suponerse el ángulo A E B = B E H, la recta A E deberia tomar la direccion E H y el punto A caeria en alguno de la recta E H. En consecuencia, si las dos rectas A D y A E pudieran ser perpendiculares á B C, al doblar la figura, el punto A deberia caer al mismo tiempo sobre D G y E H, y no siendo esto posible, á ménos que A D coincida con A E, inferiremos que no se puede bajar desde el punto A mas de una sola perpendicular.

397.—*Cuando dos ángulos* A B C *y* C B D (fig. 46), *tienen la posicion de adyacentes y juntos valen dos rectos, las dos rectas* A B *y* B D *tiradas por el extremo de la línea comun* C B, *serán prolongacion una de la otra.*

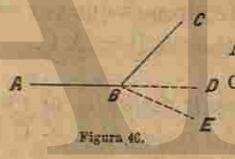


Figura 46.

Si suponemos que B D no sea prolongacion de A B sino que lo fuera B E, tendriamos:

conforme al supuesto del teorema

$$A\,B\,C + C\,B\,D = 2 \text{ rectos.}$$

Por suponer que son adyacentes A B C y C B E

$$A\,B\,C + C\,B\,E = 2 \text{ rectos}$$

de las que resulta

$$A\,B\,C + C\,B\,D = A\,B\,C + C\,B\,E$$

luego

$$C\,B\,D = C\,B\,E$$

lo que no es posible, á ménos que B E y B D coincidan, esto es, cuando B D sea la prolongacion de A B.

398.—*La menor distancia de un punto* A (fig. 47) *á una recta* B C, *es la perpendicular* A D *bajada desde dicho punto.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

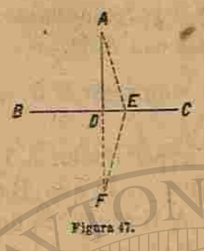


Figura 47.

Demostraremos que la perpendicular A D es más corta que cualquiera otra oblícua A E. Si dobláramos la figura por B C, el punto A caeria en F, y por tener los ángulos B D A y B D F la posicion de adyacentes y ser cada uno de ellos recto, D F será prolongacion de A D (397) esto es, A F será una línea recta, luego:

$$A F < A E F$$

tomando la mitad $A D < A E$. Que es lo que se debia demostrar.

Esta prooiedad hace que la distancia de un punto á una recta se mida siempre por la perpendicular bajada del punto á la recta.

399.—*Las oblícuas* A B *y* A C (fig. 48) *bajadas desde un mismo punto sobre una recta, y que se separan igualmente del pié de la perpendicular serán iguales.*



Figura 48.

Los triángulos A D B y A D C serán iguales (385) por tener el ángulo A D B = A D C por recto, el lado A D comun, y B D = D C por el supuesto, y como en triángulos iguales á ángulos iguales están opuestos lados iguales (387) tendremos que por estar opuestos á los ángulos rectos: A B = A C.

400.—*Si dos puntos* C *y* D (fig. 49) *desigualmente distantes de una recta* A B *se reunen á sus extremos, la suma de las rectas* C A + C B *tiradas del punto mas próximo* C, *será menor que la suma de las* D A + D B *tiradas del mas distante* D.

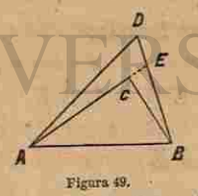


Figura 49.

Para demostrar que C A + C B < D A + D B prolongaremos A C hasta E, y supuesto que la línea recta es el camino más corto entre dos puntos, se tiene:

$$A E < D A + D E$$

y agregando á los dos miembros E B

$$A E + E B < D A + D B \ldots [1]$$

Por otra parte

$$C B < E C + E B$$

y agregando á los dos miembros C A

$$C A + C B < A E + E B \ldots [2]$$

Observando que el primer miembro de la última desigualdad, es menor que A E + E B y que conforme á la (1) esta suma es menor que D A + D B, se infiere que:

$$C A + C B < D A + D B.$$

401.—*Si desde un punto* A (fig. 50) *se bajan varias oblícuas* A B A D, *la que se separe más del pié de la perpendicular* A C, *será la mayor.*

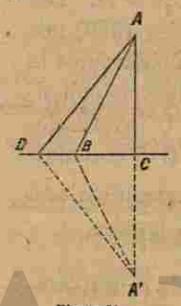


Figura 50.

Si dobláramos la figura por la recta D C y suponemos que el punto A caiga en A', A B tomaria la posicion de A' B, y A D la de A' D.

Teniendo los ángulos A C D y A' C D la posicion de adyacentes y siendo cada uno de ellos recto, la línea C A' será la prolongacion de A C (397) y en consecuencia A A' es una línea recta. Por otra parte, estando B más próximo á la recta A A' que el punto D tendremos que (400)

$$A B + B A' < A D + D A'$$

tomando la mitad

$$A B < A D$$

que es lo que se debia demostrar.

402.—Como si desde un punto se tiran varias líneas á una recta, por una parte la perpendicular es menor que cualquiera oblícua, y por otra solo pueden ser iguales las oblícuas que se separan igualmente del pié de la perpendicular, siendo mayores las que se separan más; se infiere que *desde un punto tomado fuera de una recta, no se le pueden tirar mas que dos rectas iguales.*

403.—*Si por el medio* C (fig. 51) *de una recta* A B *se levanta una perpendicular* C D: 1° *cualquier punto de la perpendicular estará equidistante de los extremos* A y B: 2° *cualquier punto que no pertenezca á la perpendicular, distará desigualmente de los extremos.*

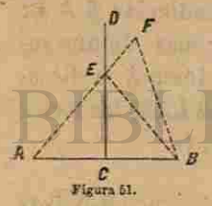


Figura 51.

Demostracion.—1° A E = E B por ser oblícuas, que segun el supuesto, distan igualmente del pié de la perpendicular (399).

2° Vamos á demostrar ahora que un punto F que no pertenece á la perpendicular, dista desigualmente de los extremos. Reuniremos F con A y con B y por el punto E tiremos la recta E B. Tendremos

$$F B < E B + E F$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

sustituyendo por E B, su igual E A resulta

F B < F A.

404.—*Siempre que una recta* A B (fig. 52) *tiene dos puntos* A *y* B *equidistantes de dos puntos* C *y* D *de otra recta, la primera será perpendicular á la segunda, y la dividirá en dos partes iguales.*

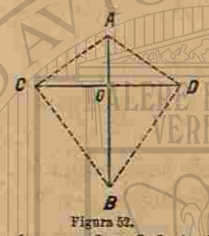


Figura 52.

Fundándonos en que A C = A D y B C = B D, demostraremos que el ángulo A O C=A O D. Los triángulos A B C y A B D son iguales (386) por tener sus tres lados iguales; luego si dobláramos la figura por la línea A B, el punto D deberia coincidir con C, y permaneciendo el punto O invariable, resultaria que los lados del ángulo A O C coincidirán con los del A O D por lo que serán iguales, y A B perpendicular á C D. Además, se ve que A B divide á C D en dos partes iguales.

405.—*Todos los puntos de la bisectriz de un ángulo están equidistantes de los lados del ángulo.*

Sea el ángulo A B C (fig. 53) y vamos á demostrar que cualquier punto E de la recta B D, que lo divide en dos ángulos A B D y D B C iguales, está equidistante de los lados A B y B C del ángulo A B C Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada sobre la recta, si bajamos las perpendiculares E F y E G, debemos probar que estas líneas que miden la distancia de un punto de la bisectriz á los lados del ángulo son iguales.

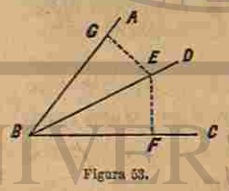


Figura 53.

Si dobláramos la figura por la recta B D el punto E permaneceria fijo, y por ser el ángulo A B D= D B C el lado B C coincidiria con B A y el punto F de la primera recta debeberá hallarse en alguno de los de la recta B A. Por otra parte, la línea E F que es perpendicular á B C despues de doblada la figura, deberá tomar una posicion perpendicular á A B; pero como desde un mismo punto E no se puede bajar mas de una sola perpendicular á una recta (396), resulta que E F tomará la direccion E G, y como el punto F debe encontrarse á la vez sobre las rectas A B y E G tendrá que coincidir con G; luego E F=E G.

406.—*Todo punto* O (fig. 54) *que queda dentro de un ángulo* A B C *y que no pertenece á la bisectriz, está desigualmente distante de los lados del ángulo.*

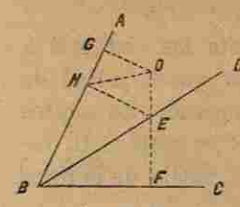


Figura 54.

Las perpendiculares O F y O G son las distancias del punto O á los lados del ángulo, y vamos á probar que O G<O F.

Por el punto E tiremos la perpendicular E H á A B, y unamos O con H.

Tendremos:

O G<O H (398)

O H<O E+E H

pero siendo E H=E F (405)

sustituyendo se tiene O H<OF

luego con más razon O G<O F

407.—PROBLEMAS DE OBLÍCUAS Y PERPENDICULARES.—I.—*Levantar una perpendicular á una recta,* A B (fig. 55) *desde un punto* C *de la misma recta.*

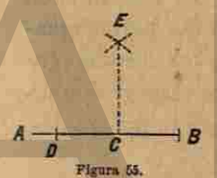


Figura 55.

Resolucion.—Tómense dos puntos B y D equidistantes de C, y haciendo centro primero en B y luego en D con un radio arbitrario pero mayor que C B, trácense dos arcos de círculo, y reuniendo el punto E de interseccion de estos dos arcos con el punto C, la recta C E será la perpendicular; por tener conforme á la construccion dos puntos C y E equidistantes de otros dos D y B de la línea dada (404).

El rádio arbitrario B E debe ser mayor $\frac{BD}{2}$ para que los arcos del círculo puedan cortarse.

II.—*Bajar una perpendicular á una recta,* A B (fig. 56) *desde un punto* C *tomado fuera de ella.*

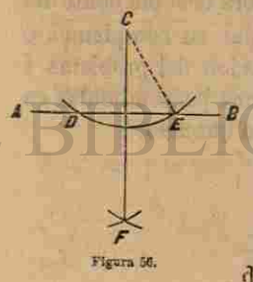


Figura 56.

Haciendo centro en el punto C y con un rádio C D trácese el arco D E que corte la recta dada en dos puntos; hágase centro en cada uno de estos puntos D y E y con un mismo radio describanse dos arcos que se cortarán en el punto F; reuniendo los puntos C y F con una recta C F, esta será la pedida por tener dos puntos C y F, equidistantes de los D y E de la recta dada. (404).

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

III.—*Dividir una recta* A B (fig. 57) *en dos partes iguales.*



Figura 57.

Tómense como centros sucesivamente los extremos A y B de la recta, y con un radio mayor que la mitad de dicha recta trácense dos arcos, y reuniendo los puntos C y D de interseccion de los arcos por la recta C D, esta determinará el punto M que será el medio de la línea A B.

Demostracion.—Estando dos puntos C y D equidistantes de A y de B, si se reunen estos dos puntos resultarán dos triángulos A C D y B C D iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; luego si se doblara la figura por C D permaneciendo fijo el punto M, el punto B coincidiria con A, lo que prueba que las partes A M y B M son iguales.

IV.—*Dividir un ángulo C en dos partes iguales.*



Figura 58.

Desde el vértice C (fig. 58) trácese un arco A B; haciendo centro en A y B descríbanse dos arcos que se cortarán en D, y reuniendo C con D esta recta dividirá en dos partes iguales el ángulo dado. En efecto, los dos triángulos A C D y B C D son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; y por estar opuestos á lados iguales en triángulos iguales, los ángulos A C D y B C D, serán iguales.

Como empleando el mismo procedimiento podrian dividirse en dos partes iguales cada uno de los ángulos A C D y B C D, resulta que así podrá sucesivamente dividirse en 4, 8, 16, etc., partes iguales.

V.—*Determinar el suplemento, y el complemento de un ángulo.*

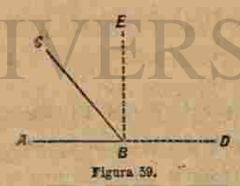


Figura 59.

Sea el ángulo A B C (fig. 59); bastará prolongar uno de sus lados, y conforme al teorema del núm. 389 el ángulo C B D será el suplemento del ángulo dado. Para determinar su complemento haciendo uso de la construccion del problema I de la figura 55 se levantará una perpendicular en el punto B y el ángulo C B E será el complemento buscado.

PARALELAS.

408.—Definicion.—*Se llaman paralelas las rectas que estando en un plano tienen todos sus puntos equidistantes.*

Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada sobre ella, para que dos rectas A B y C D sean paralelas (fig. 60) es necesario que las perpendiculares bajadas de dos puntos cualesquiera E y F sobre C D sean iguales.

409.—Teorema.—*Toda recta* J L (fig. 60) *perpendicular á una de dos paralelas, es tambien perpendicular á la otra.*

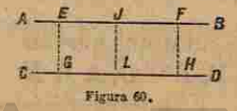


Figura 60.

Supongamos que J L sea perpendicular á C D, y vamos á demostrar que tambien lo será á A B, para lo que necesitaremos inferir que los ángulos L J B y L J A son iguales. Tomemos á distancias iguales de L los puntos H y G, y por ellos levantemos las perpendiculares H F y G E á C D, resultará que E G=F H por medir las distancias de los puntos de las dos paralelas A B y C D. Si dobláramos la figura por J L por ser esta línea perpendicular á C D, la parte L D tomaria la direccion de L C, y como por construccion L H=L G, el punto H coincidirá con G. Como F H y E G son perpendiculares á C D, la recta H F despues de doblada la figura deberia tomar la direccion de G E; y como además H F=G E resulta que el punto F caeria sobre E; y como el punto J ha permanecido fijo, se infiere que el ángulo L J B es igual á L J E que es lo que se debia demostrar.

410.—*Por un punto* A (fig. 61) *no se puede tirar más de una sola paralela á otra recta* B C.

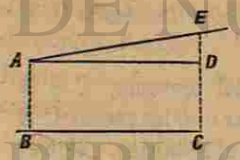


Figura 61.

Siendo A D paralela á B C, tendremos A B=C D. Si suponemos que pudiera tirarse otra paralela desde A, como A E, tendriamos A B=C E, de lo que resultaria C D=E C lo que es imposible, á ménos que A E coincida con A D.

Debemos insistir sobre lo que dijimos en la definicion, y es que las paralelas están en un mismo plano.

411.—*Si cada una de las rectas* A B y C D (fig. 62) *es paralela á una tercera recta* E F; *serán paralelas entre sí.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

III.—*Dividir una recta* A B (fig. 57) *en dos partes iguales.*



Figura 57.

Tómense como centros sucesivamente los extremos A y B de la recta, y con un radio mayor que la mitad de dicha recta trácense dos arcos, y reuniendo los puntos C y D de interseccion de los arcos por la recta C D, esta determinará el punto M que será el medio de la línea A B.

Demostracion.—Estando dos puntos C y D equidistantes de A y de B, si se reunen estos dos puntos resultarán dos triángulos A C D y B C D iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; luego si se doblara la figura por C D permaneciendo fijo el punto M, el punto B coincidiria con A, lo que prueba que las partes A M y B M son iguales.

IV.—*Dividir un ángulo C en dos partes iguales.*



Figura 58.

Desde el vértice C (fig. 58) trácese un arco A B; haciendo centro en A y B descríbanse dos arcos que se cortarán en D, y reuniendo C con D esta recta dividirá en dos partes iguales el ángulo dado. En efecto, los dos triángulos A C D y B C D son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; y por estar opuestos á lados iguales en triángulos iguales, los ángulos A C D y B C D, serán iguales.

Como empleando el mismo procedimiento podrian dividirse en dos partes iguales cada uno de los ángulos A C D y B C D, resulta que así podrá sucesivamente dividirse en 4, 8, 16, etc., partes iguales.

V.—*Determinar el suplemento, y el complemento de un ángulo.*

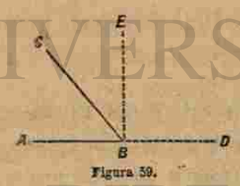


Figura 59.

Sea el ángulo A B C (fig. 59); bastará prolongar uno de sus lados, y conforme al teorema del núm. 389 el ángulo C B D será el suplemento del ángulo dado. Para determinar su complemento haciendo uso de la construccion del problema I de la figura 55 se levantará una perpendicular en el punto B y el ángulo C B E será el complemento buscado.

PARALELAS.

408.—Definicion.—*Se llaman paralelas las rectas que estando en un plano tienen todos sus puntos equidistantes.*

Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada sobre ella, para que dos rectas A B y C D sean paralelas (fig. 60) es necesario que las perpendiculares bajadas de dos puntos cualesquiera E y F sobre C D sean iguales.

409.—Teorema.—*Toda recta* J L (fig. 60) *perpendicular á una de dos paralelas, es tambien perpendicular á la otra.*

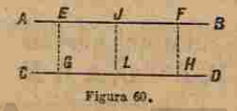


Figura 60.

Supongamos que J L sea perpendicular á C D, y vamos á demostrar que tambien lo será á A B, para lo que necesitaremos inferir que los ángulos L J B y L J A son iguales. Tomemos á distancias iguales de L los puntos H y G, y por ellos levantemos las perpendiculares H F y G E á C D, resultará que E G=F H por medir las distancias de los puntos de las dos paralelas A B y C D. Si dobláramos la figura por J L por ser esta línea perpendicular á C D, la parte L D tomaria la direccion de L C, y como por construccion L H=L G, el punto H coincidirá con G. Como F H y E G son perpendiculares á C D, la recta H F despues de doblada la figura deberia tomar la direccion de G E; y como además H F=G E resulta que el punto F caeria sobre E; y como el punto J ha permanecido fijo, se infiere que el ángulo L J B es igual á L J E que es lo que se debia demostrar.

410.—*Por un punto* A (fig. 61) *no se puede tirar más de una sola paralela á otra recta* B C.

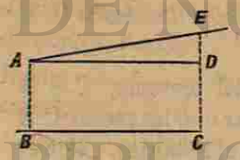


Figura 61.

Siendo A D paralela á B C, tendremos A B=C D. Si suponemos que pudiera tirarse otra paralela desde A, como A E, tendriamos A B=C E, de lo que resultaria C D=E C lo que es imposible, á ménos que A E coincida con A D.

Debemos insistir sobre lo que dijimos en la definicion, y es que las paralelas están en un mismo plano.

411.—*Si cada una de las rectas* A B y C D (fig. 62) *es paralela á una tercera recta* E F; *serán paralelas entre sí.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

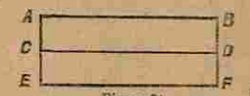


Figura 62.

Por ser A B paralela á E F se tiene

A E=B F

por ser C D paralela á E F

C E=DF

restando esta ecuacion de la anterior, resulta.

A C=B D

luego A B será paralela á C D.

412.—Cuando una recta corta dos paralelas (fig. 63), á la recta A B se le llama *secante* y los ángulos que forma con las paralelas toman las siguientes denominaciones:

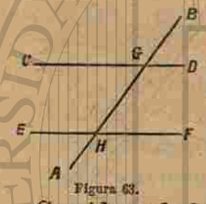


Figura 63.

Se llaman *internos* los cuatro ángulos que quedan dentro de las paralelas, y son: C G H, D G H, E H G y F H G.

Se llaman *externos* los cuatro ángulos que quedan fuera de las paralelas, y son: C G B, B G D, A H E y A H F.

Considerando los ángulos de dos en dos: se llaman *alternos internos*, los internos colocados de diferente lado de la secante como C G H y F H G, ó E H G y D G H: se llaman *alternos externos* los ángulos que están fuera de las paralelas y de diferente lado de la secante, como C G B y A H F, ó B G D y E H A: por último, se llaman *correspondientes* los ángulos colocados del mismo lado de la secante, siendo uno interno y el otro externo, como B G D y B H F, A H F, y A G D, E H A y C G A, E H B y C G B.

413.—Tomaremos como principio fundamental de las propiedades del paralelismo de dos líneas, el siguiente

TEOREMA.—*Siempre que los ángulos* C A B y D B A (fig. 64) *que tienen la posicion de alternos internos, sean iguales, las dos rectas* C E *y* F D *serán paralelas*

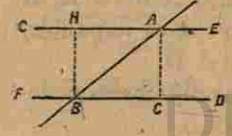


Figura 64.

Conforme á la hipótesis del teorema, C A B =D B A y vamos á demostrar que las rectas C E y F D tienen sus puntos equidistantes. Por el punto A levántese A G perpendicular á C E; y por B levántese B H perpendicular á F D. El ángulo B A G será complemento de C A B, y el ángulo H B A será complemento de D B A; pero siendo

C A B=D B A

se infiere que tambien lo serán sus complementos, luego

B A G=H B A.

Los dos triángulos A B G y A B H serán iguales (384) por tener el lado A B comun adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; y como en triángulos iguales á ángulos iguales están opuestos lados iguales, tendremos:

A G=B H

por opuestos á los ángulos

A B G=B A H

y como A G y B H miden las distancias de dos puntos de las rectas C E y F D, se infiere que serán paralelas por estar equidistantes.

414.—*Siempre que en dos rectas* A B *y* C D (fig. 65) *cortadas por una secante, los ángulos que tienen la posicion de alternos externos sean iguales, estas rectas serán paralelas.*

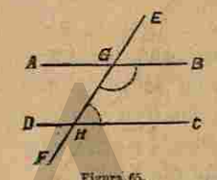


Figura 65.

Conforme á la hipótesis

A G E=F H D

sustituyendo á estos ángulos sus iguales por opuestos al vértice, se tiene

B G H=C H G

pero como estos tienen la posicion de alternos internos, se infiere que las rectas serán paralelas.

415.—*Si los ángulos correspondientes son iguales, las rectas serán paralelas.*

Sean (fig. 65) E G B=E H D

sustituyendo por E G B su opuesto al vértice, se tiene

A G H=E H D

pero siendo estos ángulos alternos internos, las rectas serán paralelas.

416.—*Siempre que los ángulos internos del mismo lado de la secante sean suplementarios, las dos rectas serán paralelas.* (fig. 65).

Sean A G H+C H G=2 rectos

y como

A G H+H G B=2 rectos (389)

igualando los primeros miembros se infiere que

C H G=H G B

pero siendo estos alternos internos, las rectas serán paralelas.

417.—*Siempre que los ángulos externos del mismo lado de la secante sean suplementarios, las rectas serán paralelas.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Sean (fig. 65) A G E+C H F=2 rectos
sustituyendo sus iguales por opuestos al vértice
B G H+D H G=2 rectos
pero como
B G H+A G H=2 rectos (389)
igualando los primeros miembros se infiere que
D H G=A G H
pero siendo estos ángulos alternos internos, las rectas serán paralelas.

418.—Los teoremas recíprocos del fundamental y de los cuatro siguientes á él son tambien ciertos; pero como la demostracion de estas proposiciones recíprocas es muy sencilla, solo daremos la del teorema fundamental.

Teorema.—*Siempre que dos rectas* A B *y* C D (fig. 66) *sean paralelas, los ángulos alternos internos serán iguales.*



Figura 66.

Demostracion.—Si suponemos que los ángulos A F G y F G D, que tienen la posicion de alternos internos, no sean iguales sino que el primero sea mayor que el último, otra recta que pase por F como A' B', será la que tenga la propiedad de formar el ángulo
A' F G=F G D
pero teniendo estos ángulos la posicion de alternos internos conforme al teorema (413) directo, las rectas A' B' y C D serian paralelas, y como por el supuesto A B es tambien paralela á C D, resultaria que por un mismo punto F se podrian tirar dos paralelas, á una misma recta, lo que es imposible; (410) y como el mismo absurdo resultaria si supusiéramos A F G<F G D se tiene, que no pudiendo ser estos ángulos desiguales, tendrá que verificarse que siempre que las rectas sean paralelas los ángulos alternos internos serán iguales.

419.—*Dos ángulos cuyos lados son paralelos y que tienen sus vértices vueltos en el mismo sentido son iguales.*

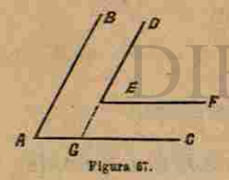


Figura 67.

Si prolongamos el lado D E (fig. 67) hasta G. tendremos:
A=D G C por correspondientes
D G C=D E F por la misma razon
luego
A=D E F.

420.—*Dos ángulos cuyos lados son paralelos y que tienen sus vértices vueltos en sentido contrario, son iguales.*

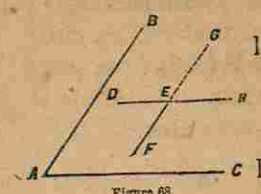


Figura 68.

Sean los ángulos B A C y D E F; (fig. 68) prolongando los lados del último, tendremos que
B A C = G E H (419)
G E H = D E F por opuestos al vértice
luego B A C = D E F.

421.—*Dos ángulos cuyos lados son paralelos y cuyos vértices no están vueltos en el mismo sentido ni en sentido contrario, son suplementarios.*

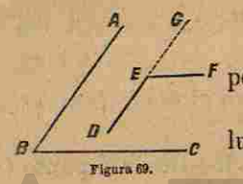


Figura 69.

Si prolongamos el lado D E (fig. 69), tendremos:
D E F + F E G=2 rectos (389)
pero
F E G=A B C (419)
luego
D E F + A B C=2 rectos.

422.—*Dos ángulos cuyos lados son perpendiculares, serán iguales si dichos ángulos son de la misma especie, y serán suplementarios cuando uno sea agudo y el otro obtuso.*

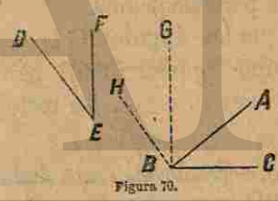


Figura 70.

Sean los ángulos agudos A B C y D E F (fig. 70) en los que D E es perpendicular á A B y F E perpendicular á B C; y vámos á demostrar que son iguales. Por el vértice B tiremos B G paralela á E F y B H paralela á E D, con lo que resultará el ángulo H B G =D E F (419).

Por ser los lados de estos ángulos respectivamente perpendiculares tendremos:
H B A=G B C por rectos
restando G B A de ambos, se tiene
H B G=A B C
pero como
H B G=D E F
resulta que
A B C=D E F.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

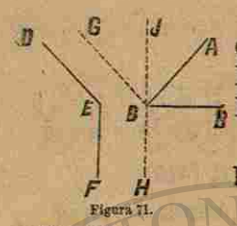


Figura 71.

Si los ángulos son de diferente especie, como en la figura 71, tirando por el vértice B las rectas B G y B H respectivamente paralelas á E D y á E F, tendremos que

G B H=D E F (419)

prolongando B H hasta J

G B H+G B J=2 rectos;

pero como

G B J=A B B'

sustituyendo se tiene:

G B H+ A B B'=2 rectos

luego

D E F + A B B'=2 rectos

que es lo que se debia demostrar.

423.—Problemas de paralelas.—I.—*Por un punto* C *dado fuera de una recta* A B, *tirarle una paralela.*

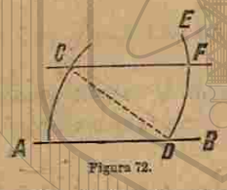


Figura 72.

1ª *Construccion.* (fig. 72).—Desde el punto C como centro y con un radio cualquiera, trácese el arco de círculo D E: hágase en seguida centro en D, y con el mismo radio trácese el arco C A: tómese la cuerda A C y llévese de D á F; tirando la recta C F ésta será la paralela pedida.

En efecto, si se tira la recta C D resulta que los ángulos C D A y D C F son iguales, por tener por medida arcos iguales (380); pero como estos ángulos tienen la posicion de alternos internos, las rectas serán paralelas.

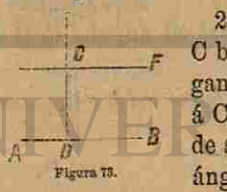


Figura 73.

2ª *Construccion.* (Fig. 73).—Desde el punto dado C bájese la perpendicular C D, y en seguida prolongando D C levántese en C la recta C F perpendicular á C D. La línea C F será la paralela pedida en razon de ser por construccion F C D=C D A y ser estos ángulos alternos internos.

II.—*Por un punto* A (fig. 74) *tomado fuera de una recta* B C *tirar otra que la encuentre bajo un ángulo dado* M.

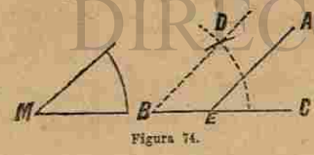


Figura 74.

En un punto cualquiera, B por ejemplo, de la recta B C, constrúyase un ángulo D B C igual á M, y por el punto A tírese la recta A E paralela á B D. Esta recta llenará la condicion del problema, supuesto que el ángulo A E C=B por correspondientes, y B=M por construccion, luego A E C=M.

Estas construcciones, así como las de los problemas de perpendiculares, pueden facilitarse haciendo uso de la escuadra y del trasportador; pero, por regla general, son mucho más exactas las resoluciones que se efectúan por medio del compás.

III.—*Construir en un punto un ángulo igual á otro.*

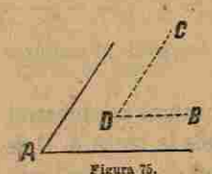


Figura 75.

(Fig. 75). Sean A el ángulo, y D el punto dado. Por el punto D se tirarán las rectas D B y D C paralelas á los lados del ángulo, y estando formados estos ángulos por lados paralelos y teniendo sus vértices en el mismo sentido, serán iguales (419).

Si se prolongara el lado B D más allá de D, esta construccion daria el medio para encontrar el suplemento de un ángulo A.

TRIANGULOS.

424.—Definiciones.—Hemos dicho que se llama *triángulo rectilíneo una figura cerrada por tres líneas rectas.* Se consideran en los triángulos los valores relativos de los lados y de los ángulos.

Triángulo escaleno es el que tiene desiguales sus tres lados.

Triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales; y equilátero es el que tiene sus tres lados iguales.

Se llama *triángulo oblicuángulo al que no está formado por ningun ángulo recto,* se dice que es *obtusángulo cuando uno de los ángulos es obtuso, acutángulo cuando todos los ángulos son agudos; y rectángulo cuando uno de los ángulos es recto.*

En los triángulos rectángulos, el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa, y á los otros dos lados se les denomina catetos.

425.—*En todo triángulo* A B C (fig. 76), *un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

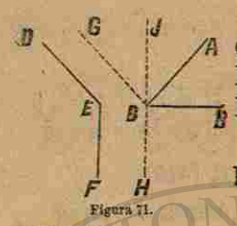


Figura 71.

Si los ángulos son de diferente especie, como en la figura 71, tirando por el vértice B las rectas B G y B H respectivamente paralelas á E D y á E F, tendremos que

G B H=D E F (419)

prolongando B H hasta J

G B H+G B J=2 rectos;

pero como

G B J=A B B'

sustituyendo se tiene:

G B H+ A B B'=2 rectos

luego

D E F + A B B'=2 rectos

que es lo que se debia demostrar.

423.—Problemas de paralelas.—I.—*Por un punto* C *dado fuera de una recta* A B, *tirarle una paralela.*

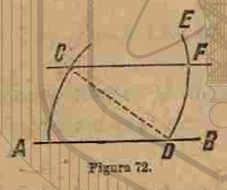


Figura 72.

1ª *Construccion.* (fig. 72).—Desde el punto C como centro y con un radio cualquiera, trácese el arco de círculo D E: hágase en seguida centro en D, y con el mismo radio trácese el arco C A: tómese la cuerda A C y llévese de D á F; tirando la recta C F ésta será la paralela pedida.

En efecto, si se tira la recta C D resulta que los ángulos C D A y D C F son iguales, por tener por medida arcos iguales (380); pero como estos ángulos tienen la posicion de alternos internos, las rectas serán paralelas.

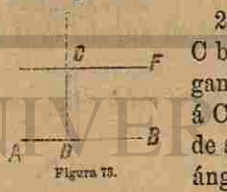


Figura 73.

2ª *Construccion.* (Fig. 73).—Desde el punto dado C bájese la perpendicular C D, y en seguida prolongando D C levántese en C la recta C F perpendicular á C D. La línea C F será la paralela pedida en razon de ser por construccion F C D=C D A y ser estos ángulos alternos internos.

II.—*Por un punto* A (fig. 74) *tomado fuera de una recta* B C *tirar otra que la encuentre bajo un ángulo dado* M.

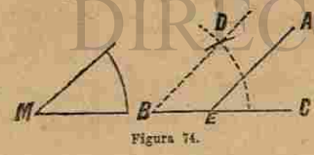


Figura 74.

En un punto cualquiera, B por ejemplo, de la recta B C, constrúyase un ángulo D B C igual á M, y por el punto A tírese la recta A E paralela á B D. Esta recta llenará la condicion del problema, supuesto que el ángulo A E C=B por correspondientes, y B=M por construccion, luego A E C=M.

Estas construcciones, así como las de los problemas de perpendiculares, pueden facilitarse haciendo uso de la escuadra y del trasportador; pero, por regla general, son mucho más exactas las resoluciones que se efectúan por medio del compás.

III.—*Construir en un punto un ángulo igual á otro.*

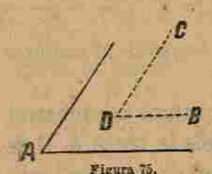


Figura 75.

(Fig. 75). Sean A el ángulo, y D el punto dado. Por el punto D se tirarán las rectas D B y D C paralelas á los lados del ángulo, y estando formados estos ángulos por lados paralelos y teniendo sus vértices en el mismo sentido, serán iguales (419).

Si se prolongara el lado B D más allá de D, esta construccion daria el medio para encontrar el suplemento de un ángulo A.

TRIANGULOS.

424.—Definiciones.—Hemos dicho que se llama *triángulo rectilíneo una figura cerrada por tres líneas rectas.* Se consideran en los triángulos los valores relativos de los lados y de los ángulos.

Triángulo escaleno es el que tiene desiguales sus tres lados.

Triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales; y equilátero es el que tiene sus tres lados iguales.

Se llama *triángulo oblicuángulo al que no está formado por ningun ángulo recto,* se dice que es *obtusángulo cuando uno de los ángulos es obtuso, acutángulo cuando todos los ángulos son agudos; y rectángulo cuando uno de los ángulos es recto.*

En los triángulos rectángulos, el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa, y á los otros dos lados se les denomina catetos.

425.—*En todo triángulo* A B C (fig. 76), *un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

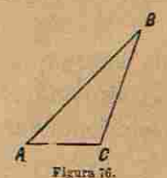


Figura 76.

Siendo la recta A B el camino más corto entre dos puntos, se infiere que A B<A C+C B.

426.—*Un lado cualquiera* A B (fig. 76) *es mayor que la diferencia de los otros dos.*

En virtud del teorema anterior, se tiene:

$$A\,B+A\,C>B\,C$$

despejando á

$$A\,B>B\,C-A\,C$$

427.—*En todo triángulo isósceles son iguales los ángulos opuestos á los lados iguales.*



Figura 77.

En la figura 77 sea A B=A C, y vamos á demostrar que B=C. Desde el vértice A tiremos la recta A D de modo que divida el ángulo B A C en dos partes iguales, y tendremos que los triángulos B A D y D C A serán iguales por tener un ángulo igual B A D=D A C por construccion, formado por lados iguales, A D, que es comun; y A B=A C por lados del triángulo isósceles. Siendo los triángulos iguales, los ángulos opuestos al lado comun A D serán iguales (387), luego B=C.

De la igualdad de los triángulos se infiere ademas que B D=D C y que A D C=A D B, luego.

La bisectriz del ángulo desigual de un triángulo isósceles: 1° *divide el lado opuesto en dos partes iguales, y* 2° *es perpendicular á este lado.*

Supuesto que en un triángulo á los lados iguales están opuestos ángulos iguales, se infiere que *todo triángulo equilátero será equiángulo y recíprocamente.*

428.—*La recta que une el vértice de un triángulo isósceles al medio del lado opuesto, es perpendicular á este lado.*

Los dos triángulos A D B y A D C tendrán A D comun, A B=A C por lados del triángulo isósceles, y B D=D C por el supuesto; luego los triángulos serán iguales (386), y siéndolo se tendrá que el ángulo A D B=A D C.

429.—*Si dos ángulos* A *y* B *de un triángulo* A C B (fig. 78) *son iguales entre sí, los lados opuestos* B C *y* A C, *tambien serán iguales.*

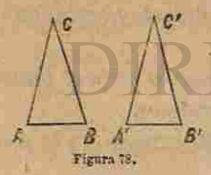


Figura 78.

Construyamos otro triángulo A' B' C' igual al primero, y en el que las letras acentuadas indican las mismas partes de las que no lo están. Siendo A=B=B'=A' si sobrepusiéramos los triángulos haciendo coincidir el lado A' B' con A B poniendo B' sobre A y A' sobre B, resultaria que por ser iguales los ángulos B' C' coincidiria con A C y A' C' con B C, pero por construccion B' C'=B C y A' C'=A C, luego A C=B C que es lo que debia demostrarse.

430.—*En todo triángulo al mayor ángulo está opuesto el mayor lado.*

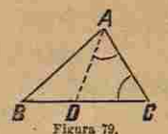


Figura 79.

Supongamos el ángulo B A C [fig. 79] mayor que C y vamos á demostrar que B C>A B.

Construyamos el ángulo D A C=C; el triángulo A D C será isósceles y se tiene

$$A\,D=D\,C$$

Por otra parte

$$A\,D+B\,D>A\,B$$

sustituyendo

$$D\,C+B\,D \text{ ó } B\,C>A\,B$$

que es lo que se debia demostrar.

431.—Recíprocamente *en todo triángulo* [fig. 79] *al mayor lado está opuesto el mayor ángulo.*

Si siendo B C>A B el ángulo A no fuera mayor que C, tendria que ser igual ó menor; pero no puede ser igual, porque entónces (429) B C seria igual á A B; ni puede ser menor, porque conforme al teorema directo [430] se tendria B C<A B, lo que es contrario al supuesto luego si el ángulo A no puede ser igual ni menor que C, resulta que será mayor, que es lo que teniamos que demostrar.

432.—*Si en dos triángulos A B C y A' B' C'* [fig. 80] *un ángulo A es mayor que otro A', y ambos ángulos están formados por lados respectivamente iguales, A C=A' C' y B A=B' A', el lado B C opuesto al mayor ángulo será mayor que B' C' opuesto al menor ángulo.*

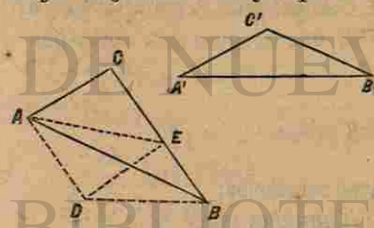


Figura 80.

Demostracion.—Si sobre el lado A B=A' B' construimos el triángulo A D B igual á A' B' C' y en seguida dividimos por mitad el ángulo D A C con la recta A E, en razon de ser C A B>B A D esta recta caerá dentro del ángulo mayor C A B. Reuniendo E D resultará el triángulo A E D igual á C A E por tener el ángulo C A E=E A D por construccion, formado por lados iguales [385] A E comun y A C=A D, luego

$$C\,E=E\,D$$

agregando E B se tiene

$$C\,B=E\,D+E\,B$$

pero

$$E\,D+E\,B>D\,B$$

luego

$$C\,B>D\,B \text{ ó que su igual } C'\,B'$$

que es lo que se debia demostrar.

Recíprocamente si B C>B' C' deberá ser el ángulo C A B>C' A' B'

En efecto, no puede ser C A B=C' A' B' porque entónces los triángulos serian iguales [385], y siéndolo resultaria B C=B' C' contra el supuesto.

Tampoco puede ser C A B<C' A' B'; porque conforme al teorema directo que acabamos de demostrar se tendrá B' C'>B C, lo que tambien es contra el supuesto.

Luego si C A B no puede ser igual ni menor que C' A' B' tendrá que ser mayor, que es lo que trataba de demostrarse.

433.—*La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos.*

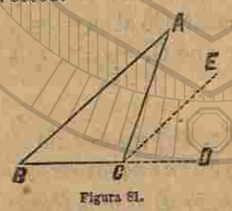


Figura 81.

Prolongado el lado B C [fig. 81] hasta D y tirando por el punto C la recta C E paralela á A B, tendremos que en virtud del teorema del número 390

$$A\,C\,B+A\,C\,E+E\,C\,D=2 \text{ rectos.}$$

Sustituyendo en esta ecuacion por A C E su igual A por alternos internos, y en lugar de E C D el ángulo B, que es igual por correspondiente, resulta

$$A\,C\,B+A+B=2 \text{ rectos.}$$

434.—De aquí se infieren los siguientes corolarios:

1° *El ángulo exterior* A C D *de un triángulo es igual á la suma de los dos interiores opuestos.*

Porque

$$A\,C\,D=A\,C\,E+E\,C\,D$$

sustituyendo

$$A\,C\,D=A+B$$

2° *El ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los opuestos.*

3° *Todo ángulo de un triángulo es suplemento de la suma de los otros dos.*

4° *Si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo, tambien será igual el tercer ángulo del primer triángulo al tercero del otro.*

435.—*Si desde un punto* D [fig. 82] *tomado en el interior de un triángulo se tiran rectas,* D B *y* D C *á las extremidades de un lado, el ángulo formado* B D C *será mayor que el ángulo* A *del triángulo opuesto á ese lado.*



Figura 82.

Considerando el triángulo A D C, conforme al corolario segundo del párrafo anterior, se tiene:

$$E\,D\,C>D\,A\,C$$

en el triángulo A D B

$$E\,D\,B>D\,A\,B$$

sumando estas desigualdades

$$B\,D\,C>B\,A\,C$$

436.—*Un triángulo no puede tener á la vez dos ángulos obtusos, ni dos ángulos rectos, ni uno recto y otro obtuso.*

Porque en cualquiera de estos casos la suma de sus tres ángulos valdria más de dos ángulos rectos.

437.—*Los ángulos agudos de todo triángulo rectángulo son complementarios.*

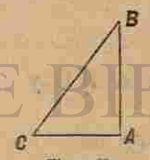


Figura 83.

En el triángulo A B C [fig. 83] rectángulo en A tenemos [433]

$$A+B+C=2 \text{ rectos}$$

de donde

$$B+C=2 \text{ rectos}-A$$

luego

$$B+C=1 \text{ recto.}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

438.—*Si desde un punto tomado sobre un lado de un ángulo se baja una perpendicular al otro lado, ésta caerá dentro del ángulo cuando sea agudo, y caerá fuera cuando sea obtuso.*



Figura 84.

Sea [fig. 84] el caso en que el ángulo A B C es agudo. Si la perpendicular bajada desde A no cayera dentro del ángulo, sino en el punto D, resultaria el triángulo A D B con el ángulo D recto y A B D obtuso, lo que es imposible [433].



Figura 85.

Sea [fig. 85] el ángulo E F G obtuso. Si la perpendicular E H pudiera caer dentro del ángulo, nos resultaria el triángulo E F H con el ángulo H recto, y F obtuso, lo que es un absurdo.

439.—De aquí se infiere que *la perpendicular bajada desde el vértice de un ángulo de un triángulo sobre el lado opuesto, caerá dentro del triángulo cuando los ángulos adyacentes* [fig. 86] *al lado sean ayudos, y caerá fuera cuando* [fig. 87] *uno de los ángulos sea obtuso.*



Figura 86.

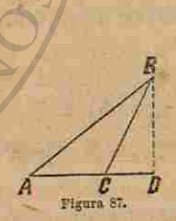


Figura 87.

440.—Hemos visto (384, 385 y 386) y demostrado que *dos triángulos son iguales:* 1° *cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales:* 2° *cuando tienen un ángulo igual formado por lados iguales:* 3° *cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales; y ahora agregaremos el siguiente caso:*

4° *Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos.*

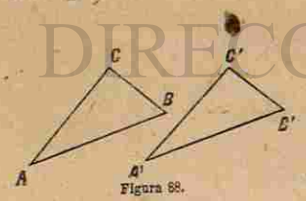


Figura 88.

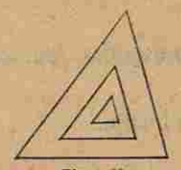
Sean [fig. 88] los triángulos A B C y A' B' C' que tienen

A=A', B=B' y B C=B' C'

sumando las dos primeras ecuaciones se tiene que

A + B=A' + B'

luego C que es suplemento de A + B, será igual á C' suplemento de A' + B' (434 3°). De esto se infiere que los triángulos serán iguales por tener un lado igual, B C=B' C' adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, B=B' y C=C'.


Figura 89.

441.—Como habrá podido observarse en los cuatro casos de igualdad de los triángulos, siempre entra como elemento uno de los lados, pues dos triángulos no son iguales cuando tienen sus tres ángulos iguales, como puede observarse en la figura 89 con los triángulos cuyos lados son paralelos.

442.—*Dos triángulos rectángulos son iguales:* 1° *cuando tienen iguales las hipotenusas* y *uno de los ángulos agudos:* 2° *cuando tienen iguales un cateto y uno de los ángulos agudos: y* 3° *cuando tienen iguales la hipotenusa y uno de los catetos.*

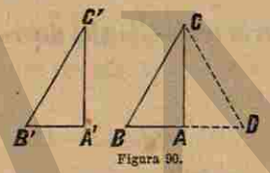


Figura 90.

Por ser los triángulos rectángulos, tendrán forzosamente el ángulo recto igual, así es que en el 1° y 2° caso los triángulos serán iguales por tener dos ángulos y un lado respectivamente iguales.

Para demostrar el tercer caso, sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 90) que tienen B C=B' C' y A C=A' C'.

Si sobre A C construimos el triángulo C A D igual C' A' B', tendremos que por tener los ángulos C A B y C A D la posicion de adyacentes y valer juntos dos rectos (397) la recta A D será prolongacion de B A, y como las dos oblícuas B C y C D son iguales, se separarán igualmente del pié de la perpendicular C A (399) luego B A=A D.

Así, pues, el triángulo A B C será igual á A C D por tener A C comun, A B=A D y B C=C D; pero siendo A C D igual á A' C' B' por construccion, se infiere que el triángulo A B C será igual á A' B' C'.

443.—PROBLEMAS DE TRIÁNGULOS.—I.—*Dados dos ángulos de un triángulo determinar el tercero.*

Sea A=29° 15′, y B=75° 38′ y vamos á determinar á C.

Tenemos (433)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$A + B + C = 180°$$

despejando á

$$C = 180° - (A + B)$$

sustituyendo

$$C = 180° - (29° 15' + 75° 38')$$

lo que da

$$C = 75° 7'$$

II.—*Conocido en un triángulo isósceles uno de los ángulos iguales determinar el del vértice.*

Sea A=B el ángulo conocido, y C el ángulo que se busca.

Tendremos

$$A + B + C = 180°$$

por ser A=B

$$2A + C = 180°$$

de donde

$$C = 180° - 2A.$$

III.—*Dado el ángulo C del vértice de un triángulo isósceles determinar los de la base.*

Despejando A en la última ecuacion, se tiene

$$A = 90° - \frac{C}{2}$$

Si se conocen los valores numéricos, bastará sustituirlos en estas ecuaciones.

IV.—*Dado un ángulo C de un triángulo y los dos lados a y b que lo forman* (fig. 91) *construir el triángulo.*

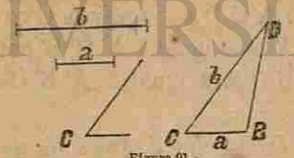


Figura 91.

Sobre la recta C B=a se construirá el ángulo C igual al dado y sobre el lado C D indefinido se tomará la parte C D=b; reuniendo el punto D con B, se tendrá el triángulo D B C que satisface las condiciones del problema.

El ángulo dado C debe ser menor que 180°.

V.—*Dado un lado a* (fig. 92) *y los dos ángulos adyacentes, construir un triángulo.*

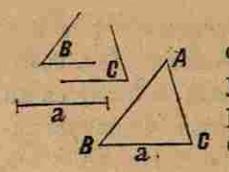


Figura 92.

Tómese B C=a; en cada uno de sus extremos constrúyanse los ángulos B y C iguales á los dados, y prolongando las rectas que los forman hasta su punto de interseccion A, se tendrá el triángulo pedido.

Para que el problema sea posible, se necesita tener B + C < 180°.

VI.—*Construir un triángulo conocidos sus tres lados a, b y c* (fig. 93).

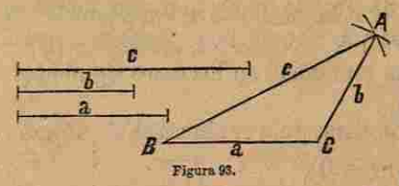


Figura 93.

Tómese B C=a y haciendo centro en B con un radio igual á c, trácese un arco de círculo, en seguida hágase centro en C y con un radio igual á b, trácese otro arco de círculo, y reuniendo el punto A de interseccion de los arcos con B y C, se tendrá el triángulo pedido.

Para que el problema sea posible, es necesario que el mayor de los lados sea menor que la suma de los otros dos.

VII.—*Construir un triángulo, dados dos ángulos A y B, y un lado a opuesto á uno de ellos.*

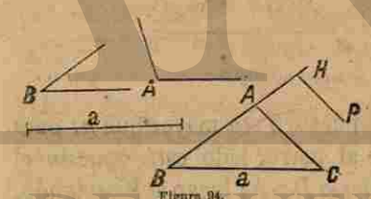


Figura 94.

Sea (fig. 94) a el lado opuesto al ángulo A. Tómese B C=a; en el punto B constrúyase el ángulo C B H =B; en un punto cualquiera de la recta B H constrúyase el ángulo H =A, y por el punto C tírese la recta C A paralela á H P. El triángulo B A C será el pedido.

Para que el problema sea posible, debe tenerse A + B < 180°.

Los problemas IV, V, VI y VII que corresponden á los cuatro casos de igualdad de los triángulos, no admiten más que una sola resolucion.

VIII.—*Construir un triángulo, dados dos lados y un ángulo opuesto á uno de ellos.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

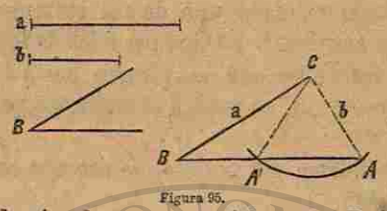


Figura 95.

Suponemos conocidos a y b y el ángulo B opuesto á *b* (fig. 95).

Tómese la recta B C=a; en un extremo constrúyase el ángulo dado B, y haciendo centro en C y con un radio igual á *b*, trácese un arco de círculo que cortará la recta B A en dos puntos A y A'; reuniendo C con A y con A', resulta que hay dos triángulos que satisfacen el problema: A B C y A' C B.

Cuando se conocen dos lados, y un ángulo opuesto á uno de ellos, por regla general hay dos triángulos que resuelven el problema; pero la cuestion no admitirá más que una resolucion en los casos siguientes:

1° Cuando el ángulo dado B sea obtuso; pues entónces el otro ángulo será forzosamente agudo (fig. 96) (436).



Figura 96.

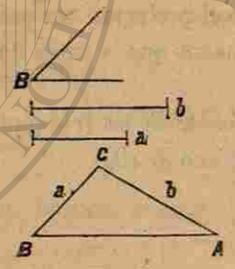


Figura 97.

2° Cuando siendo B agudo, el lado opuesto *b* sea mayor que *a;* pues entónces conforme al principio de que al mayor lado está opuesto el mayor ángulo, siendo b>a, deberá tenerse B>A; luego si B es agudo, tendrá que serlo A (fig. 97).

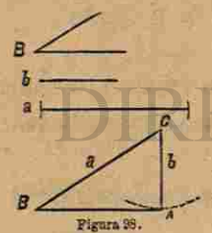


Figura 98.

3° Cuando siendo B agudo el arco no corta á la recta B A, sino que solo la toca en un punto. En este caso (fig. 98) el ángulo A será recto.

4° Cuando B sea recto, porque entónces A tendrá que ser agudo (436).

Por último, el problema será imposible cuando el lado dado *b* es menor que la perpendicular C A (fig. 98).

IX.—*Construir un triángulo isósceles, dado el ángulo C del vértice* (fig. 99) *y la base c.*

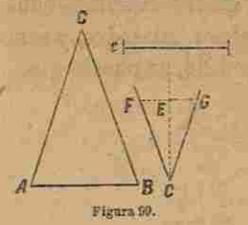


Figura 99.

Tómese la recta A B=c; dividase el ángulo C por la mitad con la línea C E; en un punto cualquiera E de esta recta, levántese la perpendicular F G, y construyendo en A y B ángulos iguales á F ó á G, se tendrá el triángulo A B C pedido.

X.—*Construir un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa* a (fig. 100) *y un ángulo agudo B.*

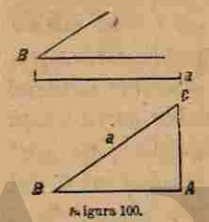


Figura 100.

Tómese la recta B C=a; en el punto B constrúyase un ángulo igual á B, y bajando desde C una perpendicular á la recta indefinida B A, se tendrá el triángulo B A C pedido.

XI.—*Construir un triángulo rectángulo, dado un cateto* b (fig. 101) *y el ángulo adyacente C.*

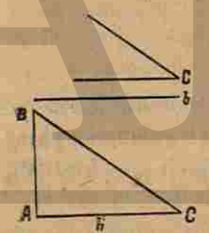


Figura 101.

Tómese C A=b; en el punto C constrúyase un ángulo igual al dado, y prolongando C A levántese en el punto A la perpendicular A B. El triángulo pedido será C B A.

XII.—*Determinar un ángulo igual á la suma de otros dos A y B, cuando esta suma es menor que dos rectos.*

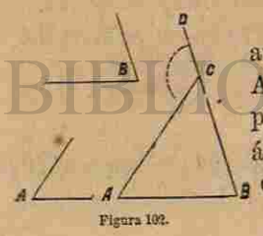


Figura 102.

Sobre los extremos de una recta de longitud arbitraria A B (fig. 102) constrúyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los dados; complétese el triángulo A B C, y prolongando B C, el ángulo pedido será A C D; pues por ser externo del triángulo es igual á B+A (434).

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

XIII.—*Dados dos ángulos A y B* (fig. 102) *cuya suma es menor que dos ángulos rectos, construir un ángulo igual á su suplemento.*

Tómese una recta A B de longitud arbitraria; en sus extremos constrúyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los dados, y completando el triángulo, el ángulo A C B será el pedido, supuesto que

$$A+B+A\,C\,B=180°$$

despejando á

$$A\,C\,B=180°-(A+B).$$

En todos los problemas que hemos resuelto, podrán darse valores numéricos á los datos, debiendo emplearse en este caso la escala y el trasportador ademas del compás para su resolucion.

CUADRILATERO.

444.—*Se llama cuadrilátero una figura cerrada por cuatro líneas rectas* [fig. 103]. En los cuadriláteros se distinguen las siguientes figuras.

Se llama trapecio un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos [fig. 104].

Paralelógramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos (fig. 105).

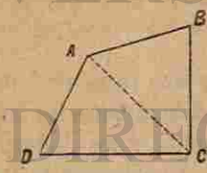


Figura 103.



Figura 104.



Figura 105.

Rombo es un paralelógramo que tiene los lados iguales entre sí (fig. 106) *y los ángulos diferentes.*

Rectángulo es un paralelógramo cuyos ángulos todos son rectos [fig. 107] *y los lados desiguales.*

Cuadrado es un paralelógramo que tiene iguales sus cuatro lados y sus cuatro ángulos [fig. 108].

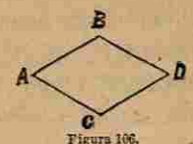


Figura 106.

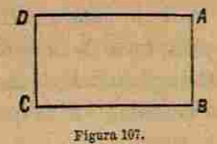


Figura 107.

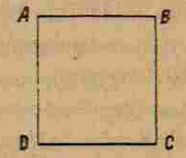


Figura 108.

Para que dos cuadriláteros sean iguales, es necesario que tengan iguales sus lados y sus ángulos, y que los ángulos iguales estén formados respectivamente por los lados iguales. En general, para probar que dos cuadriláteros son iguales, es preciso demostrar que sobreponiéndolos, coincidirian todos los extremos de los lados que los forman. Para construir un cuadrilátero, es indispensable conocer tres lados y dos ángulos, ó dos lados y tres ángulos; pero como los casos de igualdad de los cuadriláteros son algo complicados, generalmente lo que se hace es descomponerlos en dos triángulos, tanto para tratar de su igualdad como para construirlos conociendo algunos de sus elementos.

Las diagonales de un cuadrilátero generalmente son desiguales pero cada diagonal A C [fig. 103] es menor que la suma de los lados A D+D C ó que A B+B C con los que forma un triángulo, y mayor que su diferencia [426].

445.—*La suma de los ángulos de un cuadrilátero, es igual á cuatro rectos.*

Tirando la diagonal A C [fig. 103] el cuadrilátero quedará dividido en dos triángulos. Como la suma de los ángulos del cuadrilátero A+B+C+D es igual á la de los ángulos de que están formados los dos triángulos, y coma la suma de los ángulos de cada triángulo vale dos rectos [433], resulta que los del cuadrilátero valdrán cuatro rectos.

446.—Las propiedades de los cuadriláteros son comunes á los paralelógramos, de los cuales pasamos á ocuparnos.

Dos paralelógramos son iguales cuando tienen un ángulo igual (fig. 109) *A=A' formado por lados respectivamente iguales, A B=A' B' y A C=A' C'.*

Por ser el ángulo A=A' si sobrepusiéramos las figuras haciendo coincidir los vértices de estos ángulos y el lado A C con A C', el lado A B

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

XIII.—*Dados dos ángulos A y B* (fig. 102) *cuya suma es menor que dos ángulos rectos, construir un ángulo igual á su suplemento.*

Tómese una recta A B de longitud arbitraria; en sus extremos constrúyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los dados, y completando el triángulo, el ángulo A C B será el pedido, supuesto que

$$A+B+A\,C\,B=180°$$

despejando á

$$A\,C\,B=180°-(A+B).$$

En todos los problemas que hemos resuelto, podrán darse valores numéricos á los datos, debiendo emplearse en este caso la escala y el trasportador ademas del compás para su resolucion.

CUADRILATERO.

444.—*Se llama cuadrilátero una figura cerrada por cuatro líneas rectas* [fig. 103]. En los cuadriláteros se distinguen las siguientes figuras.

Se llama trapecio un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos [fig. 104].

Paralelógramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos (fig. 105).

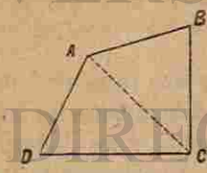


Figura 103.



Figura 104.



Figura 105.

Rombo es un paralelógramo que tiene los lados iguales entre sí (fig. 106) *y los ángulos diferentes.*

Rectángulo es un paralelógramo cuyos ángulos todos son rectos [fig. 107] *y los lados desiguales.*

Cuadrado es un paralelógramo que tiene iguales sus cuatro lados y sus cuatro ángulos [fig. 108].

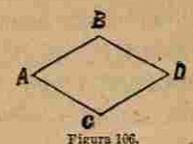


Figura 106.

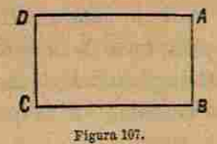


Figura 107.

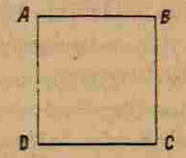


Figura 108.

Para que dos cuadriláteros sean iguales, es necesario que tengan iguales sus lados y sus ángulos, y que los ángulos iguales estén formados respectivamente por los lados iguales. En general, para probar que dos cuadriláteros son iguales, es preciso demostrar que sobreponiéndolos, coincidirian todos los extremos de los lados que los forman. Para construir un cuadrilátero, es indispensable conocer tres lados y dos ángulos, ó dos lados y tres ángulos; pero como los casos de igualdad de los cuadriláteros son algo complicados, generalmente lo que se hace es descomponerlos en dos triángulos, tanto para tratar de su igualdad como para construirlos conociendo algunos de sus elementos.

Las diagonales de un cuadrilátero generalmente son desiguales pero cada diagonal A C [fig. 103] es menor que la suma de los lados A D+D C ó que A B+B C con los que forma un triángulo, y mayor que su diferencia [426].

445.—*La suma de los ángulos de un cuadrilátero, es igual á cuatro rectos.*

Tirando la diagonal A C [fig. 103] el cuadrilátero quedará dividido en dos triángulos. Como la suma de los ángulos del cuadrilátero A+B+C+D es igual á la de los ángulos de que están formados los dos triángulos, y coma la suma de los ángulos de cada triángulo vale dos rectos [433], resulta que los del cuadrilátero valdrán cuatro rectos.

446.—Las propiedades de los cuadriláteros son comunes á los paralelógramos, de los cuales pasamos á ocuparnos.

Dos paralelógramos son iguales cuando tienen un ángulo igual (fig. 109) *A=A' formado por lados respectivamente iguales, A B=A' B' y A C=A' C'.*

Por ser el ángulo A=A' si sobrepusiéramos las figuras haciendo coincidir los vértices de estos ángulos y el lado A C con A C', el lado A B

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

tomaria la direccion A' B': por ser A C=A' C', el extremo C coincidiria con C': por ser A B=A' B', el punto B coincidiria con B'. Ahora bien: como por un punto no puede tirarse más de una paralela á otra recta, resulta que debiendo ser C D paralela á A B, cuya recta ha coincidido con A' B', tendrá que coincidir con C' D'; y por igual razon habiendo coincidido B con B', la paralela B D tendrá que coincidir con B' D', y en consecuencia, el punto de interseccion D coincidirá con D'; luego basta que dos paralelógramos tengan un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales, para que sobreponiéndolos coincidan sus cuatro vértices.



Figura 109.

447.—*En todo paralelógramo los ángulos opuestos son iguales.*

El ángulo C (fig. 109) y el ángulo B, que son opuestos, serán iguales por estar formados por lados paralelos y tener sus vértices vueltos en sentido contrario [420], y por la misma razon A será igual á D.

448.—Para facilitar á los alumnos las demostraciones de los siguientes teoremas, anticiparemos la marcha que en ellas vamos á seguir: 1° buscaremos los triángulos formados por las líneas que son objeto del teorema: 2° demostraremos qoe estos triángulos son iguales por estar comprendidos en uno de los cuatro casos de igualdad [440], y 3° fundándonos en que en triángulos iguales á ángulos iguales, están opuestos lados iguales y recíprocamente [387] deduciremos la conclusion del teorema.

449.—*En todo paralelógramo los lados opuestos son iguales.*

Tirando la diagonal A C [fig. 110] resultarán los triángulos A C B y A C D, que son iguales [384] por tener el lado A C comun, A C B= D A C y B A C=A C D, por ser la figura paralelógramo y tener la posicion de alternos internos. Siendo los triángulos iguales, los lados opuestos á ángulos iguales serán iguales, luego A B=D C y B C=D A, que es lo que se debia demostrar.

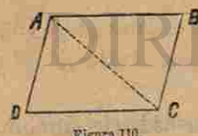


Figura 110.

450.—*Si dos lados de un cuadrilátero son iguales y paralelos, la figura sera paralelógramo.*

Sean [fig. 110] A D y B C iguales y paralelos, y vamos á demostrar que los otros dos lados A B y D C serán tambien paralelos.

Tirando la diagonal A C, el triángulo A C B será igual á A C D [385], por tener el ángulo

A C B=C A D, por alternos internos, formados por lados respectivamente iguales, A C comun y B C=A D. Siendo los triángulos iguales, á los lados B C y A D estarán opuestos ángulos iguales, B A C= A C D; pero como éstos tienen la posicion de alternos internos, se infiere que serán paralelos los lados A B y C D.

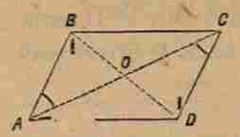


Figura 111.

451.—*Las diagonales de un paralelógramo se cortan en partes mútuamente iguales.*

De que los lados opuestos son iguales y paralelos, vamos á inferir [fig 111] que B O=O D y A O=O C. Los triángulos A O B y D O C son iguales [384] por tener el lado A B=D C adyacente á los ángulos O A B=O C D y O B A=O D C. Se tiene A B=D C por lados opuestos de paralelógramo, y los ángulos indicados son iguales por alternos internos. Siendo los triángulos iguales por ser lados opuestos á ángulos iguales, resulta que B O=O D y A O=O C.

452.—Las recíprocas de las cuatro últimas proposiciones son ciertas, y pueden demostrarse por reduccion al absurdo, ó de un modo semejante al empleado para demostrar las directas.

Así, pues, un cuadrilátero será paralelógramo: 1° *siempre que sean iguales los ángulos ó los lados opuestos:* 2° *siempre que dos lados opuestos sean iguales y paralelos;* y 3° *cuando las diagonales se corten en partes mútuamente iguales.*

453.—*La diagonal mayor de un paralelógramo está opuesta al mayor ángulo* [fig. 111].

Sea A C>B D, y vamos á demostrar que el ángulo A D C>B C D. Si consideramos los triángulos A C D y B D C, desde luego advertimos que los ángulos A D C y B C D están formados por el lado D C comun y A D=B C; luego conforme al teorema recíproco demostrado en el número 432, debe ser el ángulo A D C>B C D por estar opuesto el ángulo A D C al lado A C, que es mayor que B D.

454.—Siendo *el rombo un paralelógramo cuyos cuatro lados son iguales entre sí,* todas las propiedades de los paralelógramos son comunes á los rombos, resultando además de la igualdad de los lados, que:

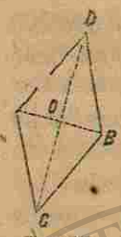


Figura 112.

En todo rombo las diagonales son perpendiculares entre sí.

Tirando las diagonales A B y C D [fig. 112], resultan los triángulos A O D y B O D que son iguales [386] por tener O D comun, A D=B D por lados del rombo, y A O=O B por partes de la diagonal (451). Siendo iguales los triángulos, los ángulos opuestos á A D y B D serán iguales, luego A O D=D O B, y por tanto D C será perpendicular á A B.

455.—Como *el rectángulo es un paralelógramo cuyos cuatro ángulos son rectos*, naturalmente participa de todas las propiedades del paralelógramo; pero además, demostraremos que:

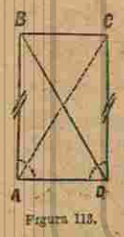


Figura 113.

Las diagonales de un rectángulo son iguales.

Los triángulos rectángulos (fig. 113) A D C y D A B son iguales (385) por tener el ángulo A D C=D A B formado por A D, que es comun, y D C=A B como lados opuestos de paralelógramo. Siendo iguales estos triángulos, sus hipotenusas tambien lo serán, y se tendrá que A C=D B, que es lo que se debia demostrar.

456.—Siendo el *cuadrado un paralelógramo* (fig. 108) *cuyos lados y ángulos son iguales*, es una figura que tiene las propiedades del cuadrilátero, del paralelógramo, del rombo y del rectángulo.

457.—En resúmen en el *cuadrilátero* la suma de los 4 ángulos vale 4 rectos, sus lados, sus ángulos y sus diagonales son desiguales, así como las partes en que se cortan estas últimas.

En el *paralelógramo* los lados opuestos son paralelos, los ángulos y los lados opuestos son iguales; las diagonales son desiguales pero las partes en que se cortan son mútuamente iguales.

El *rombo*, además de las propiedades del paralelógramo, tiene la de que todos sus lados son iguales, y la de que las diagonales se cortan en ángulo recto.

El *rectángulo* tiene las propiedades del paralelógramo, y además, son iguales sus diagonales y ángulos.

El *cuadrado* tiene iguales los lados, los ángulos, las diagonales, las partes de éstas y los ángulos que forman.

Las recíprocas de todas las proposiciones establecidas desde el número 453, son ciertas y pueden demostrarse siguiendo el mismo método que para las directas ó por absurdo.

458.—Hemos dicho que *trapecio es un cuadrilátero, en el que solo dos de sus lados son paralelos.* Generalmente se llaman bases los lados paralelos.

TEOREMA.—*La recta E F* (fig. 114) *que une los medios de los lados, no paralelos de un trapecio, es paralela á las bases.*

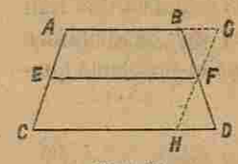


Figura 114.

Tenemos A B paralela á C D, A E=E C y B F=F D, y vamos á demostrar que E F es paralela á A B y á C D. Por el punto F tiremos H G paralela á A C, de lo que resultará que siendo A G H C paralelógramo G H=C A (449).

Los triángulos B F G y F D H son iguales (384) por tener B F=F D adyacente á los ángulos B F G=D F H por opuestos al vértice y F B G=F D H por alternos internos. De la igualdad de los triángulos, resulta F G=F H, ó F G=$\frac{GH}{2}=\frac{CA}{2}$; luego F G=E A, y como además de ser iguales estas rectas son paralelas, conforme á lo demostrado en el número 450, la figura A E F G será paralelógramo, por lo que E F será paralela á A B y (411) á C D.

459.—*La recta E F* (fig. 114) *tirada á distancias iguales de las bases, es igual á su semisuma.*

Tenemos

$$A\,B=A\,G-B\,G=E\,F-B\,G$$

$$C\,D=C\,H+H\,D=E\,F+B\,G$$

sumando estas ecuaciones

$$A\,B+C\,D=2\,E\,F$$

Despejando á

$$E\,F=\frac{A\,B+C\,D}{2}$$

que es lo que se debia demostrar.

460.—PROBLEMAS DE CUADRILÁTEROS.—I.—*Construir un cuadrilátero, dada una diagonal* d *y la magnitud y órden de los cuatro lados* a, b, c *y* e (fig. 115).

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

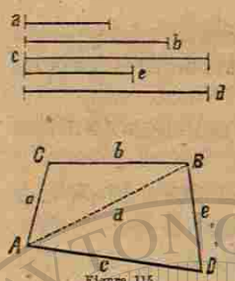


Figura 115.

Tómese A B=d, y haciendo centro en sus extremos y con los rádios a y b, c y e, trácense los arcos de círculo que se cortarán en C y en D. Reuniendo estos puntos con A y con B, se tendrá el cuadrilátero pedido. Debemos hacer notar que es preciso conocer el órden en que han de quedar colocados los lados del cuadrilátero respecto á la diagonal, para que el problema quede bien determinado.



Figura 116.

II.—*Construir un cuadrilátero en el que se conoce un lado* a *y los dos ángulos y lados adyacentes: A y B,* b *y* c (fig. 116).

Sobre A B=a constrúyanse los ángulos A y B respectivamente iguales á los lados. Tómese A C=b y B D=c, y reuniendo los extremos C y D se tendrá el cuadrilátero pedido.

III.—*Construir un paralelógramo, dados dos lados* a, b *y el ángulo C que forman* [fig. 117].

Tómese C D=a, constrúyase en el extremo C un ángulo igual al dado; tómese B C=b, y tirando por los puntos B y D paralelas á los lados D C y B C, se tendrá el paralelógramo pedido.

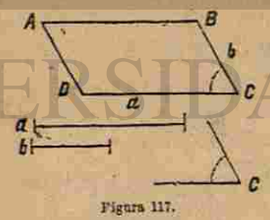


Figura 117.

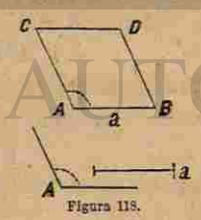


Figura 118.

IV.—*Construir un rombo, dados un lado* a *y un ángulo A* [fig. 118].

Sobre A B=a, constrúyase el ángulo A: tómese A C=A B y por los puntos B y C tírense las rectas B D y C D paralelas á los lados opuestos. A B D C será el rombo pedido.

V.—*Construir un rombo, conocidas sus dos diagonales* a *y* b (fig. 119)

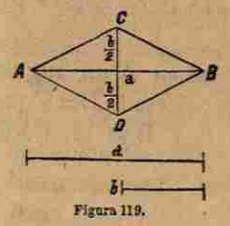


Figura 119.

Tómese A B=a; levántese por su medio una perpendicular llevando la mitad de b hacia arriba hasta C, y la otra mitad hácia abajo hasta D, y reuniendo estos puntos con A y con B, se tendrá el rombo pedido.

VI.—*Construir un rectángulo dados dos lados* a *y* b (fig. 120).

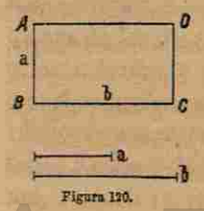


Figura 120.

Tómese A B=a, prolónguese esta línea y levántese por B la perpendicular B C=b, y tirando por C y por A las paralelas C D y A D á los lados opuestos, se tendrá el rectángulo pedido.

VII.—*Construir un rectángulo, dado un lado y una diagonal.*

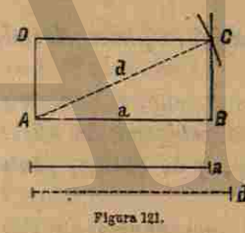


Figura 121.

Sean *a* el lado conocido y *d* la diagonal (fig. 121). Tómese A B=a, en el punto B constrúyase un ángulo recto, y haciendo centro en A y con un radio igual á d, trácese un arco de círculo, y por el punto C, donde corta á la perpendicular tírese una recta paralela á A B, y por A otra paralela á B C, con lo que quedará formado el rectángulo A B C D.

VIII.—*Construir un cuadrado conociendo uno de sus lados* a (figura 122).



Figura 122.

Tómese A B=a, levántense las perpendiculares A C y B D tambien iguales á a, y reuniendo C y D se tendrá el cuadrado pedido.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

IX.—*Construir un trapecio, conocidas las dos bases* b *y* b' *uno de los lados* a *y el ángulo A que este lado forma con una de las bases* b [figura 123].

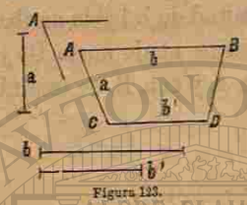


Figura 123.

Tómese A B=b; constrúyase en A un ángulo igual al lado; tómese A C=a: tírese C D=b' paralela á A B, y reuniendo B y D se tendrá el trapecio pedido.

POLIGONOS.

461.—Definiciones.—Se llama *polígono toda figura plana cerrada por más de cuatro líneas rectas.*

Si el polígono tiene *cinco* lados, se le llama *pentágono;* si tiene *seis, exágono;* si tiene *siete, heptágono;* si es de *ocho, octágono;* de *nueve, eneágono;* de *diez, decágono;* de *doce, dodecágono,* y de *quince, pentedecágono.*

Los polígonos pueden ser *convexos* ó *cóncavos.* Son *convexos* aquellos que tienen todos sus ángulos *salientes* (fig. 124), y *cóncavos* los que tienen uno ó varios ángulos *entrantes* (fig. 125).

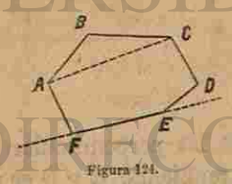


Figura 124.

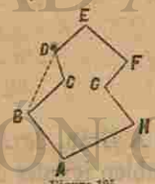


Figura 125.

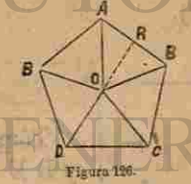


Figura 126.

Polígonos *regulares son los que tienen iguales sus lados y sus ángulos, é irregulares los que los tienen desiguales.*

Se llama *diagonal* la recta como A C [fig. 124] que va de un vértice á otro; *perímetro es la línea quebrada formada por la reunion de todos los lados que cierran la figura.*

En los polígonos regulares [fig. 126] se llama *radio oblícuo la recta que va del punto O llamado centro, á uno de los vértices.* El punto O se denomina centro por estar á igual distancia de todos los ángulos. Se llama *apotema ó radio recto la línea que va del centro á la mitad de un lado.*

En lo que sigue, solo consideraremos los polígonos *convexos;* éstos se distinguen de los *cóncavos* en que no tienen ángulos entrantes; en que los vértices de los ángulos están colocados en distintas regiones de cualquiera de las diagonales que se tire, esto es, unos como B (fig. 124), estarán arriba, y otros abajo de la diagonal A C como F, E, etc.; y en que si se prolonga cualquiera de los lados, F E por ejemplo, todos los vértices quedan en la misma region, la superior en el caso que tratamos. En los polígonos cóncavos (fig. 125) hay siempre alguna diagonal, como B D, respecto de la que todos los ángulos quedan en la misma region; y hay tambien algun lado, como C D, respecto del que prolongándolo vienen á quedar unos vértices de un lado y otros del contrario.

462.—En los polígonos regulares se llama ángulo del centro (figura 126) el formado por dos radios oblícuos O A y O B que son contiguos.

La suma de todos los ángulos del centro vale cuatro rectos [391] y como más adelante veremos que todos los triángulos A O B, B O C, C O D, etc., son iguales, resulta que cada uno de los ángulos del centro vale cuatro rectos divididos por el número de lados.

463.—*La suma de todos los ángulos interiores de un polígono, vale tantas veces dos ángulos rectos, como lados tiene ménos dos.*

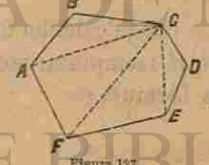


Figura 127.

[Fig. 127]. Si desde uno cualquiera de sus vértices, C por ejemplo, se tiran diagonales, como no pueden tirarse á los dos vértices B y D contiguos, pues se confundirian con los lados C B y C D, resulta que el *polígono quedará dividido en tantos triángulos como lados tiene ménos dos.*

Por otra parte, la suma de los ángulos interiores del polígono, es igual á la de los ángulos de los triángulos en que se ha dividido el polígono; y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, y hay tantos triángulos como lados tiene el polígono ménos dos; resulta que

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
ALERE FLAMMAM VERITATIS
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

los ángulos interiores del polígono valen tantas veces dos rectos como lados tiene ménos dos.

Si se designa por S la suma de los ángulos interiores de un polígono y por n el número de sus lados, conforme al teorema que acabamos de demostrar, se tiene:

$$S = 2\,r\,[n-2]$$

ó

$$S = 2\,r\,n - 4\,r$$

r representa un ángulo recto ó 90° en estas fórmulas.

464.—*Si se prolongan en la misma direccion todos los lados de un polígono convexo A, B, C, D....* (fig. 128) *la suma de los ángulos exteriores, cualquiera que sea el número de lados, es igual á cuatro rectos.*



Figura 128.

La suma de los dos ángulos formados en el vértice A, de los que uno es exterior y otro interior del polígono, valen juntos dos rectos [389], esto es, B A G + B A F=2 rectos; igualmente los ángulos exterior é interior del vértice B, esto es, C B H + C B A=2 rectos; otro tanto sucede con los ángulos formados en C, en D, en E y en F. Así, pues, la suma total de los ángulos exteriores é interiores de un polígono, vale tantas veces dos rectos como vértices ó lados hay. Si representamos por e la suma de los ángulos exteriores, y por i la de los interiores, tendremos:

$$e + i = n.\ 2 \text{ rectos}$$

despejando á

$$e = n.\ 2 \text{ rectos} - i$$

pero la suma de los ángulos interiores i = 2 rectos $[n-2]$; (463) luego sustituyendo

$$e = n.\ 2 \text{ rectos} - 2 \text{ rectos}\ [n-2]$$

$$e = n.\ 2 \text{ rectos} - n.\ 2 \text{ rectos} + 4 \text{ rectos.}$$

de donde

$$e = 4 \text{ rectos,}$$

que es lo que se debia demostrar.

465.—Por medio de la fórmula del número 463, se puede calcular lo que vale el ángulo de un polígono regular; pues bastará reemplazar por n el número de lados del polígono, y por r, 90°. La fórmula es:

$$S = 2\,r\,[n-2]$$

Para el triángulo, siendo $n = 3$ $\quad S = 180°$

$$\text{de donde un ángulo} = \frac{180°}{3} = 60°$$

Para el cuadrado $S = 180° \times 2 = 360°$

$$\text{un ángulo} = \frac{360°}{4} = 90°$$

Para el pentágono $S = 180° \times 3 = 540°$

$$\text{un ángulo} = \frac{540°}{5} = 108°$$

y como en general $A = \frac{2\,r\,(n-2)}{n} = 2 \text{ rectos} - \frac{4 \text{ rectos}}{n}$, desde que $n > 4$, el término $\frac{4 \text{ rectos}}{n}$ es menor que un recto, resulta que los ángulos de un polígono regular de más de cuatro lados, forzosamente son obtusos.

466.—Para que dos polígonos sean iguales, es preciso que tengan iguales sus lados y los ángulos adyacentes á cada lado dispuestos en el mismo órden. Cuando se descomponen en triángulos, bien sea por medio de diagonales ó por rectas tiradas desde un punto interior, dos polígonos serán iguales cuando estén compuestos del mismo número de triángulos iguales, y dispuestos ó reunidos de un modo semejante; pues entónces podrá probarse que si se sobrepusieran los dos polígonos, coincidirian en todos sus puntos, por ser iguales los triángulos de que están formados.

467.—Problemas de polígonos.—I.—*Determinar la suma de todos los ángulos de un polígono de 7 lados, y de otro de* 11.

La fórmula correspondiente es $S = 2\,r\,(n-2)$

Sustituyendo para el heptágono $S = 2.90° \times 5 = 900°$

Id. para el polígono de 11 lados $S = 2.90° \times 9 = 1620°$

II.—*Determinar lo que vale un ángulo del polígono regular de* 6 *y del de* 8 *lados.*

Determinaremos primero lo que vale la suma de todos los ángulos, y dividiéndola por el número de lados obtendremos el valor de un solo ángulo.

Llamándolo A, tendremos:

$$A = \frac{S}{n} = \frac{2\,r\,(n-2)}{n}$$

Para el exágono sustituyendo $A = \frac{180° \times 4}{6} = 120°$

Para el octágono ,, $A = \frac{180° \times 6}{8} = 135°$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

III.—*Determinar el valor de un ángulo externo de un polígono regular de 5 lados.*

La suma de todos los ángulos externos vale 4 rectos (464), ó 360°, y como estos ángulos son iguales, uno valdrá $\frac{360}{5}=72°$

IV.—*Construir un polígono igual á otro dado, A B C D E F* (figura 129).



Figura 129.

A este fin, desde uno cualquiera de los vértices, A, por ejemplo, se tiran diagonales á todos los demás, con lo que quedará dividido en triángulos. Tómese A' B'= A B, y como se conocen los tres lados del triángulo A B C, se construirá el triángulo igual A' B' C'. Sobre A' C' se construirá un triángulo A' C' D' igual á A C D, cuyos tres lados se conocen, y así sucesivamente se construirán los demás triángulos hasta completar el polígono A' B' C' D' E' F', que será igual al dado por estar formado de triángulos iguales dispuestos en el mismo órden.

V.—*Construir un polígono regular de seis lados, conocida la longitud de uno de los lados:* a (fig. 130).



Figura 130.

Comenzaremos por determinar el valor de uno de los ángulos por la fórmula

$$A=\frac{S}{n}=\frac{2\,r\,(n-2)}{n}=\frac{180°\times 4}{6}=120°$$

En seguida tomaremos A B=a; en sus dos extremos construiremos ángulos de 120° por medio del trasportador; tomaremos A C y B D iguales á a; en C y D construiremos ángulos de 120°; tomaremos C F y D E iguales á a; y tirando F E tendremos el exágono regular pedido. E F debe como comprobacion resultar igual á a.

CIRCUNFERENCIA DEL CIRCULO.

Líneas rectas consideradas en el círculo.

468.—Hemos dicho que *se llama circunferencia de círculo una curva cerrada cuyos puntos todos están en un plano á igual distancia del centro*; y que *círculo es la porcion de superficie comprendida dentro de la circunferencia.*

En el número 369 igualmente hemos dado las definiciones de *radio, diámetro, arco, cuerda, sector, segmento, sagita y cuadrante;* por lo que ahora solo repetiremos que *se llama secante una recta A B, que cortando la circunferencia en dos puntos* [fig. 131], *tiene parte dentro y parte fuera del círculo;* y que se *entiende por tangente una recta que solo toca a la circunferencia, en un punto M como D H.*

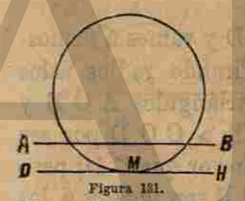


Figura 131.

469.—*Dos círculos descritos con el mismo radio son iguales;* porque si se sobrepusieran haciendo coincidir los centros, por ser iguales los radios, todos los puntos de una de las circunferencias coincidirian con los de la otra.

Así, pues, para probar que dos círculos coinciden al sobreponerlos, bastará demostrar que coinciden los centros y un punto de cada una de las circunferencias.

Para que dos arcos coincidan en todos sus puntos, bastará igualmente que puedan coincidir los centros de los círculos á que pertenecen, y sus puntos extremos.

De la definicion de circunferencia resulta que *todos los radios de un mismo círculo son iguales,* y como todo diámetro es igual á dos radios, es claro que *todos los diámetros de un mismo círculo ó de círculos iguales, son iguales.*

Ya demostramos en el número 373, que *el diámetro es la mayor de todas las cuerdas, y que divide la circunferencia en dos partes iguales.*

De esto resulta que *toda cuerda que no es diámetro subtende dos arcos desiguales;* pero cuando no se expresa lo contrario, se entiende que se trata del arco menor de los dos que subtende la cuerda.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEON
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

III.—*Determinar el valor de un ángulo externo de un polígono regular de 5 lados.*

La suma de todos los ángulos externos vale 4 rectos (464), ó 360°, y como estos ángulos son iguales, uno valdrá $\frac{360}{5}=72°$

IV.—*Construir un polígono igual á otro dado, A B C D E F* (figura 129).



Figura 129.

A este fin, desde uno cualquiera de los vértices, A, por ejemplo, se tiran diagonales á todos los demás, con lo que quedará dividido en triángulos. Tómese A' B'= A B, y como se conocen los tres lados del triángulo A B C, se construirá el triángulo igual A' B' C'. Sobre A' C' se construirá un triángulo A' C' D' igual á A C D, cuyos tres lados se conocen, y así sucesivamente se construirán los demás triángulos hasta completar el polígono A' B' C' D' E' F', que será igual al dado por estar formado de triángulos iguales dispuestos en el mismo órden.

V.—*Construir un polígono regular de seis lados, conocida la longitud de uno de los lados:* a (fig. 130).



Figura 130.

Comenzaremos por determinar el valor de uno de los ángulos por la fórmula

$$A=\frac{S}{n}=\frac{2\,r\,(n-2)}{n}=\frac{180°\times 4}{6}=120°$$

En seguida tomaremos A B=a; en sus dos extremos construiremos ángulos de 120° por medio del trasportador; tomaremos A C y B D iguales á a; en C y D construiremos ángulos de 120°; tomaremos C F y D E iguales á a; y tirando F E tendremos el exágono regular pedido. E F debe como comprobacion resultar igual á a.

CIRCUNFERENCIA DEL CIRCULO.

Líneas rectas consideradas en el círculo.

468.—Hemos dicho que *se llama circunferencia de círculo una curva cerrada cuyos puntos todos están en un plano á igual distancia del centro*; y que *círculo es la porcion de superficie comprendida dentro de la circunferencia.*

En el número 369 igualmente hemos dado las definiciones de *radio, diámetro, arco, cuerda, sector, segmento, sagita y cuadrante;* por lo que ahora solo repetiremos que *se llama secante una recta A B, que cortando la circunferencia en dos puntos* [fig. 131], *tiene parte dentro y parte fuera del círculo;* y que se *entiende por tangente una recta que solo toca a la circunferencia, en un punto M como D H.*

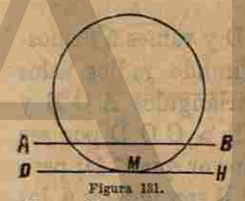


Figura 131.

469.—*Dos círculos descritos con el mismo radio son iguales;* porque si se sobrepusieran haciendo coincidir los centros, por ser iguales los radios, todos los puntos de una de las circunferencias coincidirian con los de la otra.

Así, pues, para probar que dos círculos coinciden al sobreponerlos, bastará demostrar que coinciden los centros y un punto de cada una de las circunferencias.

Para que dos arcos coincidan en todos sus puntos, bastará igualmente que puedan coincidir los centros de los círculos á que pertenecen, y sus puntos extremos.

De la definicion de circunferencia resulta que *todos los radios de un mismo círculo son iguales,* y como todo diámetro es igual á dos radios, es claro que *todos los diámetros de un mismo círculo ó de círculos iguales, son iguales.*

Ya demostramos en el número 373, que *el diámetro es la mayor de todas las cuerdas, y que divide la circunferencia en dos partes iguales.*

De esto resulta que *toda cuerda que no es diámetro subtende dos arcos desiguales;* pero cuando no se expresa lo contrario, se entiende que se trata del arco menor de los dos que subtende la cuerda.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEON
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

470.—*Una recta A B* [fig. 132] *no puede cortar la circunferencia del círculo en más de dos puntos.*



Figura 132.

Si la recta A B pudiera cortar ó tocar á la circunferencia en tres ó más puntos, tirando desde el centro rectas como O D, O E, todas estas rectas serian radios, y por tanto iguales; pero esto no es posible, porque como hemos demostrado en el número 402, desde un punto O no se pueden tirar á una línea B A, más que dos rectas iguales, que son las oblícuas que se separan igualmente del pié de la perpendicular.

471.—En el número 380 demostramos que en un mismo círculo ó en círculos iguales á arcos iguales, corresponden cuerdas iguales y recíprocamente, y ahora demostraremos el siguiente

TEOREMA.—*En un mismo círculo, ó en círculos iguales al arco mayor corresponde la cuerda mayor y recíprocamente, con tal que los arcos sean menores que una semicircunferencia.*



Figura 133.

Sea figura 133 el arco A B > C D y vamos á demostrar que la cuerda A B > C D. Tirando radios á los puntos A, B, C y D, resultan dos triángulos A O B y O C D, en los que el ángulo A O B > C O D por ser el arco A B, medida del primero, mayor que C D; pero los lados que forman el ángulo A O B son iguales á los que forman el ángulo C O D, luego conforme al teorema del número 432, tendremos el lado A B > C D, que es lo que se debia demostrar. Si los círculos fueran iguales, bastaria comenzar por sobreponerlos, y en seguida se daria la anterior demostracion.

472.—*Dos cuerdas iguales de un mismo círculo están equidistantes del centro.*

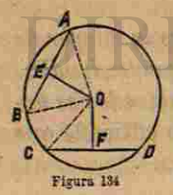


Figura 134

Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada del punto á la recta, siendo A B=C D [fig. 134], tendremos que demostrar que O E, perpendicular á A B, será igual á O F, perpendicular á C D. Tirando O B y O C resultan dos triángulos O B E y O C F, que serán iguales [442—3°] por

ser rectángulos y tener iguales las hipotenusas por radios y el cateto B E=C F, por ser mitades de cuerdas iguales A B=C D (427).

Siendo los triángulos iguales, se infiere que el lado O E será igual á O F.

473.—*De dos cuerdas desiguales la mayor está más cerca del centro.*

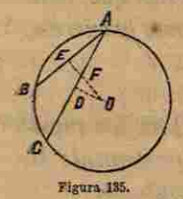


Figura 135.

Figura 135. Sea A C > A B, y vamos á probar que O D, perpendicular á A C, es menor que O F, perpendicular á A B. Tenemos que por ser la cuerda A B < A C el arco A B será menor que A C y la cuerda A B quedará dentro del arco A B C. Además O D < O E, porque la perpendicular es menor que cualquiera oblícua; y como O E < O F se infiere que O D < O F. Recíprocamente la cuerda ménos distante del centro será la mayor, supuesto que no puede ser igual ni menor que la que dista más.

474.—*De todas las cuerdas tiradas desde un punto interior A, del círculo, la mayor es la B C* (fig. 136) *que pasa por el centro, y la menor la D E, perpendicular al diámetro.*

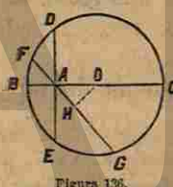


Figura 136.

B C es mayor que cualquiera otra cuerda, porque el diámetro es la mayor de todas las cuerdas. Ahora, para demostrar que D E es menor que otra cualquiera como F G, bajemos O H, perpendicular á F G y tendremos que siendo O H perpendicular y O A oblícua con respecto á F G O H < A O; luego por estar más cerca del centro F G que D E (473) será: F G > D E.

475.—*Toda recta C D* (fig. 137), *perpendicular á la mitad de una cuerda A B, pasará por el centro del círculo y por el medio del arco que la cuerda subtende*

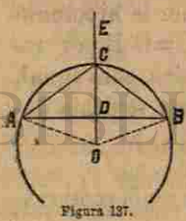


Figura 137.

Siendo por el supuesto C D perpendicular á la mitad de A B, debe pasar por todos los puntos equidistantes de A y de B (403—1°) y como el centro es uno de ellos, resulta que forzosamente pasará por el centro. El punto C, donde la misma perpendicular corta la circunferencia por igual razon estará equidistante de A y de B; luego la cuerda A C=C B y siendo iguales las cuerdas lo serán los arcos que cada una de ellas subtende.

476.—Supuesto que dos puntos fijan la posicion de una recta, y que *la mitad de la cuerda, el centro y el medio del arco están en la misma recta, resulta que siempre que una recta pase por dos de estos puntos, forzosamente pasará por el tercero.*

477.—Como desde un punto no se puede bajar más que una sola perpendicular á una recta (396), de lo que precede resulta que *toda perpendicular bajada del centro ó del medio de un arco sobre la cuerda, caerá en la mitad de dicha cuerda.*

478.—*El radio tirado al punto de contacto A* (fig. 138) *de la circunferencia con la tangente es perpendicular á esta; y recíprocamente la tangente será perpendicular al radio tirado al punto de contacto.*

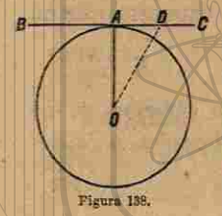


Figura 138.

Siendo B C tangente al círculo, no lo tocará más que en un solo punto A; luego si desde el centro tiramos varias rectas á la línea B C, cualquiera otra, como O D, que no sea el radio O A, deberá tener parte dentro y parte fuera de la circunferencia, por lo que A O < O D; y como (398) la perpendicular es la menor distancia de un punto á una recta, se infiere que el radio O A será perpendicular á la tangente.

La recíproca de esta proposicion está fundada en el teorema del número 394.

479.—*Si desde un punto A exterior á un círculo se tiran dos tangentes, las porciones de estas A B y A C* (fig. 139) *comprendidas entre el punto comun A y los de contacto serán iguales.*

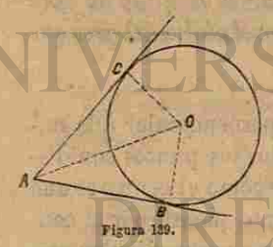


Figura 139.

Tirando la recta O A y los radios O C y O B, resultarán dos triángulos A O B y A O C, que serán iguales (442—3°) por ser rectángulos, uno en B y otro en C (478); por tener la hipotenusa A O comun, y un cateto O C=O B por radios; luego el tercer lado tambien será igual, esto es, A B=A C, que es lo que se debia demostrar.

480.—*Los arcos A B y C D* (fig. 140) *de un mismo círculo comprendidos entre paralelas son iguales.*

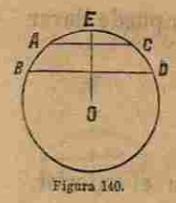


Figura 140.

Si desde el centro O tiramos una recta O E perpendicular á la cuerda B D, lo será tambien á A C [409] por ser ambas paralelas. Además esta perpendicular bajada desde el centro pasará por la mitad de la cuerda y por el medio del arco que cada una subtende [477 y 476], luego

$$B\,E = E\,D$$

y

$$A\,E = E\,C$$

restando la segunda ecuacion de la primera, se tiene

$$A\,B = C\,D$$

que es lo que se debia demostrar.

481.—*Los arcos A B y B C* [fig. 141] *comprendidos entre una cuerda y una tangente que le es paralela, son iguales.*

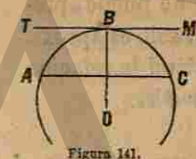


Figura 141.

Si desde el centro tiramos el radio O B, este será perpendicular á la tangente [478] y á la cuerda, por ser estas paralelas. Además, por ser perpendicular el radio á la cuerda [476] tendremos A B=B C.

482.—Problemas de líneas en el círculo.—I.—*Dados dos arcos de un mismo círculo ó de círculos iguales, determinar la relacion numérica de sus longitudes.*

No pudiendo hacerse con el compás la sobreposicion de los arcos, como lo hemos hecho [363] con las rectas, la supliremos con la de las cuerdas que siendo iguales corresponden á arcos iguales [fig 142]. Llevaremos la cuerda del arco menor C D, dos veces sobre A B, de A á E; y el arco A E estará compuesto de dos partes iguales á C D y una resta, por lo que

$$A\,B = 2\,C\,D + E\,B$$

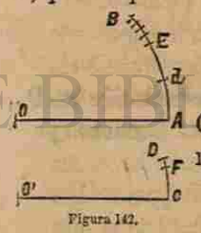


Figura 142.

Se tomará la cuerda de la resta E B para llevarla de C á F sobre C D. Efectuado esto una vez, queda por resta el arco F D, de donde

$$C\,D = E\,B + F\,D$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Finalmente, como la cuerda de la segunda resta F D se puede llevar cuatro veces sobre la anterior E B, se tendrá:

$$E\,B = 4\,F\,D$$

Sustituyendo este valor en el penúltimo, y luego ese en el anterior, etc., se tiene sucesivamente:

$$E\,B = 4\,F\,D,\quad C\,D = 5\,F\,D,\quad A\,B = 14\,F\,D.$$

La comun medida de los arcos A B y C D es F D que, segun se ha visto, está contenida 14 veces en el primero y 5 en el segundo.

Cuando se encuentra una resta que está contenida un número cabal de veces en la anterior, la operacion queda concluida y los arcos serán *conmensurables;* pero si despues de llevar una resta sobre otra una ó más veces, se llega á obtener una, que por ser muy pequeña, ó no influye en el resultado práctico de la cuestion propuesta, ó no puede apreciarse por los sentidos, se desprecia, y la relacion hallada solo es aproximada. Cuando no hay números que expresen con exactitud la relacion de la longitud de los arcos, se dice que son *inconmensurables.*

II.—*Sobre una recta dada A B* [fig. 143] *como diámetro, trazar un círculo.*



Figura 143.

Haciendo centro en los extremos de la recta, y con un rádio A E mayor que su mitad se describen arcos que se corten arriba y abajo de ella en los puntos E y F: la recta que pasa por estos puntos determina en O la mitad de A B [404]. Haciendo centro en O y con el rádio O B, se trazará el círculo pedido.

III.—*Dado el punto D* [fig. 144] *interior de un círculo, determinar la menor cuerda que por él pueda tirarse.*

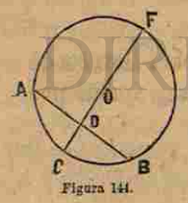


Figura 144.

Tirando por D el diámetro C F, y levantando en D una perpendicular al diámetro, se tendrá la cuerda pedida [474].

IV.—*Dividir un arco de círculo A B* (fig. 145) *en dos partes iguales.*

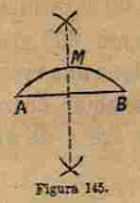


Figura 145.

Tírese la cuerda A B, y levantando por su medio una perpendicular, ésta determinará en M la mitad del arco dado (475).

Del mismo modo se dividirá A M en otras dos partes iguales, y así se concibe cómo puede dividirse un arco no solo en 2, sino tambien 4, 8, etc., partes iguales.

V.—*Dado el arco A B, determinar otro igual desde el punto D* (figura 146).

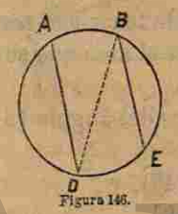


Figura 146.

Tomando la cuerda A B, se llevará de D á E, y el arco D E será el pedido.

Puede resolverse el problema tambien tirando la línea A D y por B una paralela que determinará el punto E del arco D E = A B (480).

ANGULOS EN EL CIRCULO.

483.—Ya hemos visto (378) que por ser proporcionales las magnitudes de los ángulos cuyos vértices están en el centro de un círculo, á las de los arcos que sus lados abrazan, se toman estos arcos como medida de los ángulos; pero para esto es necesario que el vértice esté en el centro del círculo. Vamos á ocuparnos ahora de determinar la relacion que existe entre la medida de un ángulo cuyo vértice está en cualquier punto de un círculo con la del ángulo del centro; repitiendo que la unidad de medida adoptada tanto para los arcos como para los

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ángulos, es la trescientos sesentava parte de la circunferencia, llamada grado, el cual se subdivide en 60 minutos y el minuto en 60 segundos, y como una circunferencia grande ó pequeña tiene siempre 360 grados, resulta que esta unidad no es absoluta, es decir, no tiene una magnitud fija, sino relativa, y por esto sirve para estimar la relacion de inclinacion entre dos líneas, ó la de magnitud entre dos arcos de un mismo círculo ó de círculos iguales.

484.—*El ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco que sus lados abrazan.* A esta clase de ángulos se les llama inscritos.

Tres son las posiciones que el ángulo inscrito puede tener con respecto al ángulo en el centro, cuya medida natural es el arco que sus lados abrazan:

1° Puede quedar el centro sobre uno de los dos lados del ángulo (figura 147).

2° Puede quedar el centro dentro del ángulo (fig. 148), y

3° Puede quedar el centro fuera del ángulo [fig. 149].

Figura 147.

Consideraremos 1° el ángulo A B C (fig. 147) en el que el centro O queda sobre el lado B A. Tirando el radio O C resultará el triángulo C O B isósceles, en el que el ángulo inscrito B es igual á C, y el ángulo externo del triángulo

$$A\,O\,C = B + C = 2\,B \quad (434)$$

de donde despejando:

$$B = \frac{A\,O\,C}{2}$$

pero teniendo A O C por medida A C, la del ángulo inscrito B será $\frac{A\,C}{2}$, que es lo que se tenia que demostrar.



Figura 148.

En el 2° caso, cuando el centro está dentro del ángulo A B C [fig. 148], se tiene, tirando el diámetro B D, que

$$A\,B\,C = A\,B\,D + D\,B\,C$$

pero acabamos de ver que la medida de A B D es $\frac{A\,D}{2}$ y la de D B C es $\frac{D\,C}{2}$; luego la medida de A B C será $\frac{A\,D}{2} + \frac{D\,C}{2} = \frac{C\,A}{2}$



Figura 149.

3° Sea el caso en que el centro esté fuera del ángulo A B C [fig. 149]. Tirando el diámetro B D se tiene

$$A\,B\,C = A\,B\,D - C\,B\,D$$

pero conforme al primer caso, la medida de A B D es $\frac{A\,D}{2}$, y la de C B D es $\frac{C\,D}{2}$; luego la medida de A B C será $\frac{A\,D}{2} - \frac{C\,D}{2} = \frac{A\,C}{2}$

Así pues, en cualquier caso la medida del ángulo inscrito es la mitad del arco que sus lados abrazan.

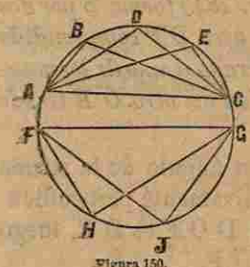


Figura 150.

485.—De aquí se infiere: 1° *que todos los ángulos,* como [fig. 150] *B, D y E, que tienen sus vértices sobre la circunferencia y que abrazan el mismo arco, serán iguales* por tener la misma medida; y 2°, *que todo ángulo inscrito,* como *H ó J, cuyos lados rematan en las extremidades de un diámetro, es recto,* supuesto que tiene por medida la mitad de una semicircunferencia.

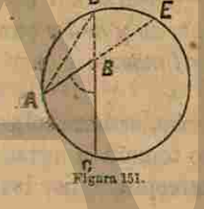


Figura 151.

486.—*El ángulo A B C* [fig. 151] *cuyo vértice está dentro de la circunferencia, pero no en el centro, tiene por medida la mitad de la suma de los arcos A C y D E, que comprenden sus lados prolongados.*

Al ángulo A B C se le llama *excéntrico.*

Tirando la cuerda A D se forma el triángulo A B D en el que [434] el ángulo externo

$$A\,B\,C = D + A$$

pero como la medida de D es $\frac{A\,C}{2}$ y la de A es $\frac{D\,E}{2}$, se tiene que la medida de A B C será $\frac{A\,C}{2} + \frac{D\,E}{2}$

487.—*El ángulo A B C* [fig. 152] *formado por dos secantes, tiene por medida la semidiferencia de los arcos A C y D E que sus lados abrazan.*

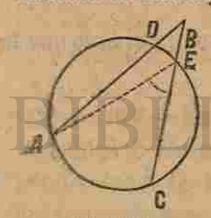


Figura 152.

Tirando la cuerda A E resulta el triángulo A E B en el que el ángulo externo [434]

$$A\,E\,C = B + A$$

despejando á $B = A\,E\,C - A$

pero siendo [484] la medida de A E C, $\frac{A\,C}{2}$ y la de A, $\frac{D\,E}{2}$, resulta que la medida de B será $\frac{A\,C}{2} - \frac{D\,E}{2}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

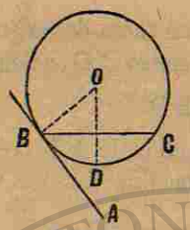


Figura 153.

488.—*El ángulo A B C (fig. 153) formado por tangente y cuerda tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtende.*

Tirando el radio O B, perpendicular á la tangente, y el O D perpendicular á la cuerda, resulta un ángulo B O D=A B C; [422] pero siendo la medida de B O D, B D=$\frac{B C}{2}$ [475], la medida de A B C será tambien $\frac{B C}{2}$

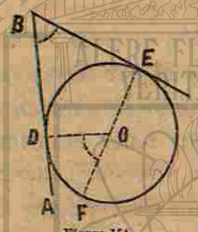


Figura 154.

489.—*El ángulo A B C (fig. 154) formado por dos tangentes, tiene por medida el arco D F comprendido entre uno de los radios D O, tirado á uno de los puntos de contacto, y la prolongacion del otro O E tirado al otro punto de contacto.*

El ángulo B=D O F por ser ángulo de la misma especie cuyos lados son respectivamente perpendiculares; [422] pero la medida de D O F es D F, luego la del ángulo B será tambien D F.

490.—Problemas de medidas de ángulos.—I.—*Determinar con el trasportador el valor del ángulo inscrito, del excéntrico y de los que están formados respectivamente por dos secantes, por tangente y cuerda, y por dos tangentes.*

Para saber el número de grados de un ángulo *inscrito*, se hará coincidir el centro del trasportador con el del círculo, y se tomará la mitad del número de grados que correspondan al arco interceptado por los lados del ángulo [484].

En un ángulo *excéntrico* se prolongarán sus lados, y determinando con el trasportador el valor de los dos arcos interceptados, se tomará la mitad de la suma [486].

En el ángulo *formado por dos secantes* se medirán con el trasportador los dos arcos interceptados y se tomará la mitad de su diferencia [487]

En el ángulo *formado por tangente y cuerda* se medirá el arco que la cuerda subtende y se tomará su mitad [488].

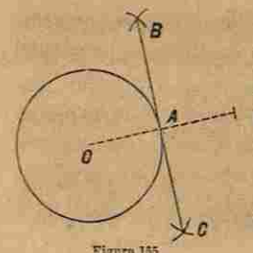


Figura 155.

En el ángulo *formado por dos tangentes*, se tirarán radios á los puntos de contacto, se prolongará uno de ellos, y el arco comprendido entre un radio y la prolongacion del otro, será el valor del ángulo de las dos tangentes [489].

II.—*Levantar una tangente á un círculo en un punto A dado en la circunferencia* (fig. 155).

Tírese el radio O A, y despues de prolongarlo levántese en A la perpendicular B C, la cual será la tangente pedida.

III.—*Tirar una tangente á un círculo desde un punto P tomado fuera de él* (fig. 156).

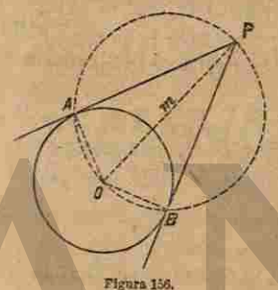


Figura 156.

Reúnase el punto P con el centro O del círculo: divídase por mitad la recta P O y haciendo centro en *m* con el radio P *m* trácese una circunferencia: reuniendo P con A y con B, se tendrán las tangentes pedidas.

La recta P A será tangente del círculo O porque tirando el radio A O, el ángulo P A O que tiene su vértice en la circunferencia del círculo *m* y que abraza el diámetro P O es recto (485 y 478). Otro tanto sucede con P B, por lo que se ve que este problema admite dos resoluciones.

IV.—*Describir sobre una recta dada A B* (fig. 157) *un arco de círculo capaz de un ángulo dado* a.

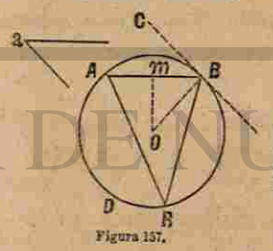


Figura 157.

Se entiende por arco de círculo capaz de un ángulo, aquel en que los ángulos inscritos cuyos lados rematan sobre la cuerda A B son iguales al ángulo dado a.

Resolucion.—En uno de los extremos de la recta A B, constrúyase un ángulo A B C=a; prolónguese C B, y en el punto B levántese la perpendicular B O: en el medio *m* de A B levántese la perpendicular *m* O y haciendo centro en O con el radio O B trácese una circunferencia, de la que el arco A D B será el pedido.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

DEMOSTRACION.—En efecto, cualquier ángulo inscrito en ese arco, como R. tendrá por medida el arco $\frac{AB}{2}$ (484); pero como el ángulo A B C tambien tiene por medida $\frac{AB}{2}$ (488) resulta que cualquier ángulo inscrito que abrace la cuerda A B, será igual á A B C, el cual por construccion es igual al ángulo dado a.

V.—*Levantar una perpendicular á una recta A R por uno de sus extremos A* [fig. 158], *cuando solo puede prolongarse en la direccion del otro extremo R.*



Figura 158.

Fuera de la recta A R y entre sus dos extremos tómese el punto C: haciendo centro en él, con el radio C A trácese una circunferencia que pasará por A y cortará la recta A R en un punto R; tirando el diámetro R D y reuniendo el punto D con el extremo A, se tendrá la recta D A, que será la perpendicular pedida, por ser el ángulo D A R inscrito, y abrazar un diámetro [485—2°].

VI.—*Desde un punto A dado fuera de una recta B D, que solo puede prolongarse en la direccion de uno de sus extremos, bajarle una perpendicular* [fig. 159].



Figura 159.

Réunase A con D; divídase por la mitad la recta A D: haciendo centro en O, y con el radio O A trácese una circunferencia; reúnase el punto A con el de interseccion B, y B A será la perpendicular pedida [485—2°].

POLIGONOS EN EL CIRCULO.

491.—Se llaman *polígonos inscritos, aquellos cuyos ángulos todos están sobre la circunferencia de un círculo; y polígonos circunscritos son aquellos cuyos lados son tangentes del círculo.*

En los polígonos inscritos (fig. 162) los lados quedan dentro del círculo y forman las cuerdas; en los polígonos circunscritos (fig. 163) los vértices quedan fuera del círculo y los lados son tangentes.

492.—*Todo triángulo puede inscribirse á un círculo.*

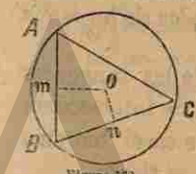


Figura 160.

Sea el triángulo A B C (fig. 160). Si por el punto *m* medio del lado A B se levanta la perpendicular *m* O, todos los puntos de esta perpendicular estarán equidistantes de los extremos A y B [403—1°]. Si por el medio *n* del lado B C se levanta la perpendicular *n* O, todos sus puntos estarán equidistantes de los extremos B y C; así es que el punto de interseccion O de las dos perpendiculares, estará equidistante de los tres vértices del triángulo; luego si hacemos centro en O y trazamos un círculo con el radio O A=O B=O C, los vértices del triángulo quedarán sobre la circunferencia, y el triángulo resultará inscrito.

493.—*Todo triángulo puede circunscribirse á un círculo.*

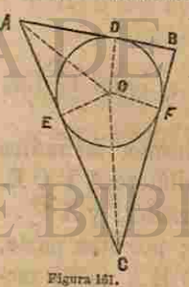


Figura 161.

Sea el triángulo A B C (fig. 161). Si dividimos en dos partes iguales el ángulo A con la recta A O, todos sus puntos gozarán de la propiedad de estar equidistantes de los lados A B y A C [405]; esto es, las perpendiculares bajadas desde uno de sus puntos sobre los lados A B y A C serán iguales. Si con la recta C O dividimos en dos partes iguales el ángulo C, todos los puntos de la bisectriz C O estarán equidistantes de los lados C A y C B; así es que el punto O de interseccion de las dos disectrices estará equidistante de los tres lados luego si desde O como centro y tomando por radio la

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

perpendicular O D=O E=O F, trazamos un círculo; éste tocará á los tres lados del triángulo en D, E y F, y resultará circunscrito el triángulo.

494.—*En todo cuadrilátero inscrito, la suma de los ángulos opuestos es igual á dos rectos* (fig. 162).



Figura 162.

Si consideramos los dos ángulos opuestos B y D, tendremos que la medida de B es

$$B = \frac{A\,D\,C}{2}$$

la de D es

$$D = \frac{A\,B\,C}{2}$$

sumando se tiene

$$B + D = \frac{A\,D\,C\,B}{2}$$

pero como la mitad de toda la circunferencia es igual á 180°, la suma de B y de D valdrá dos rectos.

495.—*En todo cuadrilátero circunscrito, la suma de dos de los lados opuestos es igual á la suma de los otros dos* (fig. 163).

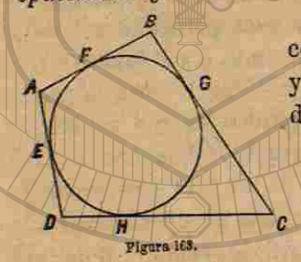


Figura 163.

Si consideramos las partes de las tangentes comprendidas entre los puntos de interseccion y los de contacto, fundándonos en el teorema demostrado en el número 479, se tiene:

$$A\,E = A\,F$$
$$E\,D = D\,H$$
$$B\,G = B\,F$$
$$G\,C = C\,H$$

sumando ordenadamente estas igualdades resulta

$$A\,D + B\,C = A\,B + D\,C$$

que es lo que se debia demostrar.

496.—*El lado del cuadrado circunscrito al círculo es igual al diámetro.*

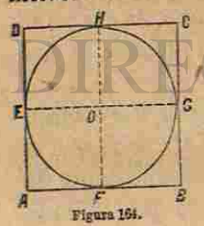


Figura 164.

Si desde el centro O (fig. 164) tiramos los radios O E, O F, y consideramos el cuadrilátero A F O E, tendremos: que O F = O E por radios, y A F = A E (479) por partes de tangentes; por otra parte, siendo los ángulos A, O F A y O E A (478) rectos, el ángulo E O F tambien lo será, de lo que resulta que A F O E es un cuadrado, y por tanto,

A F = E O y A E = O F. Como lo mismo podria demostrarse de los cuadrados O F B G, O G C H y O H D E, cada uno de los lados del cuadrado será igual á dos rádios, supuesto que cada una de sus partes A F y F B es igual á un radio, E O y O G.

De aquí se infiere que el perímetro del cuadrado circunscrito es igual á ocho radios.

497.—*El lado del exágono regular inscrito, es igual al radio.*

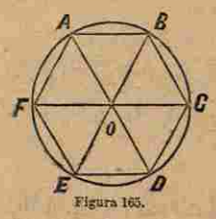


Figura 165.

(Figura 165). Por ser el polígono regular (461) los lados A B, B C, C D, etc., serán iguales entre sí; siendo iguales estas cuerdas, lo serán los arcos que subtenden, y como los arcos A B, B C, C D, etc., son las medidas de los ángulos A O B, B O C, C O D, etc., formados en el centro, se infiere que estos seis ángulos son iguales entre sí. Todos estos ángulos formados al rededor de un punto O valen cuatro ángulos rectos ó 360°, luego uno de ellos valdrá $\frac{360°}{6}$ Así A O B=60°

Considerando el triángulo A O B, tendremos que, siendo A O=O B por radios, los ángulos opuestos O B A y O A B serán iguales, y valiendo la suma de los tres ángulos dos rectos, se tiene

$$A\,O\,B + O\,B\,A + O\,A\,B = 180°$$

sustituyendo $60° + 2.\,O\,B\,A = 180°$

De donde $O\,B\,A = O\,A\,B = 60°$

Por ser los tres ángulos iguales y estar opuestos á ángulos iguales lados iguales, el triángulo A O B será equilátero, y el lado A B del exágono inscrito será igual á A O, que es el radio del círculo.

De aquí se infiere que el perímetro del exágono regular inscrito, es igual á seis radios.

498.—Como la circunferencia del círculo es menor que el perímetro del polígono circunscrito, y mayor que el perímetro del polígono inscrito, resulta que llamando C la circunferencia del círculo, r el radio, y considerando el cuadrado circunscrito y el exágono inscrito,

se tiene $C < 8\,r$ (496)

y $C > 6\,r$ (497)

luego *la circunferencia del círculo es menor que ocho veces el radio, y mayor que seis.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Dividiendo por 2 r los dos miembros de las desigualdades anteriores, se tiene

$$\frac{C}{2r} < 4$$

$$\frac{C}{2r} > 3$$

luego *la razon de la circunferencia al diámetro es mayor que* 3 *y menor que* 4. Generalmente se representa la razon $\frac{c}{2r}$ por π, y se tiene $\pi = 3{,}141592$, como veremos más adelante

499.—*Todo polígono regular se puede inscribir al círculo* (fig. 166).



Figura 166.

Dividiendo en dos partes iguales cada uno de los ángulos del polígono, con las rectas A O, B O, C O, etc., para probar que el polígono se puede inscribir á un círculo, nos bastará demostrar: primero *que estas rectas son iguales entre sí*, y segundo *que concurren en un mismo punto* O.

1° Todos los triángulos A O B, B O C, C O D, etc., formados por cada uno de los lados del polígono y dos de las bisectrices de los ángulos, son iguales, por tener un lado igual adyacente á dos ángulos iguales (384). Comparando, por ejemplo, los triángulos A O B y C O D, se tiene: A B=C D por lados de polígono regular, O C D=O A B y O D C=O B A por ser mitades de ángulos iguales, luego O D=O B y O C=A O, por estar opuestos estos lados á ángulos iguales en triángulos iguales (387). Además, por ser isósceles los triángulos, todas esas rectas serán iguales entre sí.

2° Las bisectrices concurrirán en el mismo punto, porque si dos de ellas concurrieran en O y otras dos en i, se infiriria que en los triángulos iguales A i B y B O C á los ángulos iguales O C B=i A B, estarian opuestos lados desiguales O B>i B, lo que es inadmisible.

Luego si desde el punto O de interseccion de las bisectrices como centro, y con el radio O A=O B=O C, etc., se traza una circunferencia, esta pasará por todos los vértices A, B, C, D, etc., del polígono.

500.—*Todo polígono regular A B C D E* (fig. 167) *puede circunscribirse al círculo.*

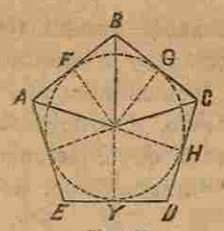


Figura 167.

Si desde el punto O, donde concurren los radios oblícuos (499), bajamos perpendiculares á los lados, nos bastará demostrar que todos los radios rectos O F, O G, O H, etc., son iguales para probar que el polígono puede circunscribirse.

Los triángulos A O F y O G C son iguales (442—3°) por ser rectángulos y tener iguales las hipotenusas A O=O C por radios oblícuos de polígono regular (499), y un cateto A F=G C por mitades de los lados iguales del polígono. A F es la mitad de A B, porque teniendo la perpendicular O F el punto O equidistante de los extremos A y B, cualquiera otro punto F tambien lo estará (403—1°)

Siendo iguales los dos triángulos rectángulos, el otro cateto O F será igual á O G.

Del mismo modo se demostraria que O G=O H y O H=O Y, etc., luego si desde O como centro se traza un círculo con el radio O F, la circunferencia tocará los lados del polígono en F, G, H, Y, etc.

501.—Problemas de polígonos en el círculo.—I.—*Inscribir un triángulo en un círculo* (fig. 168).

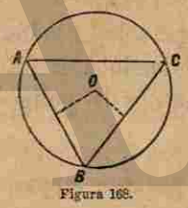


Figura 168.

Levantando perpendiculares por la mitad de los lados A B y B C, haciendo centro en el punto O de interseccion de las perpendiculares, y trazando con el radio O A una circunferencia, quedará resuelto el problema [492].

II.—*Circunscribir un triángulo á un círculo* (fig. 169).

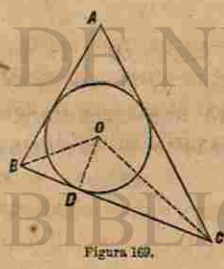


Figura 169.

Divídanse por mitad los ángulos B y C y haciendo centro en el punto de interseccion O de as bisectrices y con un radio igual á la perpendicular O D bajada desde O á uno de los lados, trácese una circunferencia, con lo que quedará resuelto el problema (493).

III.—*Inscribir en un círculo polígonos regulares de* 4, 8, 16, 32, *etc., lados.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN © DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

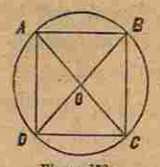


Figura 170.

Para inscribir en el círculo un cuadrado, bastará tirar un diámetro cualquiera A C (fig. 170) y levantar otro B D perpendicular al primero; reuniendo los puntos A, B, C y D, se tendrá el cuadrado. Los ángulos serán rectos por tener sus vértices en la circunferencia y abrazar un diámetro, y los lados son iguales por ser hipotenusas de triángulos iguales.

Para inscribir el polígono de 8 lados, bastará dividir por mitad cada uno de los arcos A B, B C, etc., y tirar las cuerdas respectivas. Volviendo á dividir los arcos que resulten en dos partes iguales, se tendrán los vértices del polígono de 16 lados, y así sucesivamente se obtendrán los de 32, 64, etc., lados.

IV.—*Inscribir en un círculo un polígono regular de* 3, 6, 12, 24, *etc., lados.*

En cuanto al exágono regular, siendo el lado igual al radio, bastará llevar sobre la circunferencia cuerdas de una longitud igual al radio, para tener un exágono inscrito (497). Para inscribir un triángulo se tirarán cuerdas que abracen los vértices no contiguos del exágono.

Para determinar los puntos de los vértices del polígono de 12 lados, se dividirán por la mitad los arcos del exágono; y volviendo á dividir estos de nuevo, en dos partes iguales, se tendrán los puntos del polígono de 24 lados.

V,—*Inscribir á un exágono regular un círculo.*



Figura 171.

(Figura 171). Levántese por el medio de A B una perpendicular G O, y por el medio de B C otra H O, y describiendo desde O como centro una circunferencia con el radio O G, se tendrá resuelto el problema (500).

VI.—*Hacer pasar por tres puntos A, B y C que no están en línea recta, una circunferencia de círculo.*

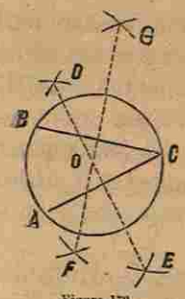


Figura 172.

(Figura 172). Tírense las rectas A C y B C por el medio de cada una de ellas, levántense las perpendiculares E D y F G, y si desde el punto de interseccion O, como centro, se traza una circunferencia con el radio O A, esta pasará por los tres puntos dados; porque todos los puntos de la perpendiculor E D están equidistantes de A y de C (403—1°), y los puntos de G F lo están de C y de B; luego el punto O que pertenece á ambas perpendiculares, estará equidistante de A, B y C.

VII.—*Dado un círculo, determinar su centro.*

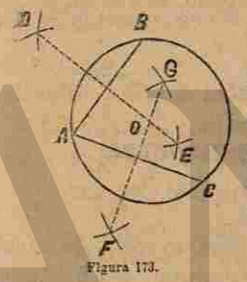


Figura 173.

Desde un punto A de la circunferencia (fig. 173) se tiran dos rectas A B y A C: se levantan por sus mitades las perpendiculares D E y F G, y el punto O de interseccion de estas perpendiculares será el centro del círculo, por estar equidistantes de A, B y C (403—1°).

VIII.—*Encontrar el centro de un arco de círculo A B.*

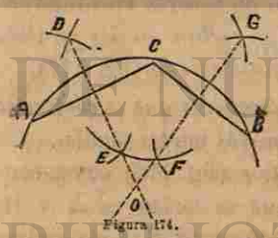


Figura 174.

(Figura 174). Tírense dos cuerdas A C y C B formando un ángulo: levántense perpendiculares por sus mitades, y el punto O de interseccion de las perpendiculares, será el centro del arco.

IX.—*Sobre una recta A B construir un arco de círculo capaz del ángulo dado* m.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

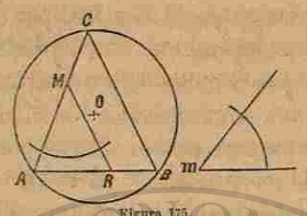


Figura 175.

Tírese la recta A C que forme con A B un ángulo cualquiera: en un punto M de esta recta constrúyase un ángulo A M R $= m$, y por el punto B tírese una recta B C paralela á M R. Haciendo pasar un círculo por los tres puntos A B y C se tendrá el arco de círculo capaz del ángulo dado m.

En efecto, el ángulo A C B, cuyo vértice está sobre la circunferencia, es igual á A M R por correspondientes; pero A M R$=m$ por construccion, luego cualquier ángulo inscrito, cuyos lados pasen por los extremos de A B, será igual á m.

INTERSECCION Y CONTACTO DE LOS CIRCULOS.

502.—Hemos visto (492) que por tres puntos que no están en línea recta siempre puede hacerse pasar un círculo, y como una vez fijado el centro y el radio queda determinada la posicion del círculo, resulta: 1° que por tres puntos no puede hacerse pasar más de un solo círculo: 2° que dos circunferencias que tienen tres puntos comunes, se confunden en todas sus partes: y 3° que dos circunferencias distintas pueden cortarse en dos puntos, tener un punto comun, ó no tocarse en ninguno.

Se llaman secantes dos circunferencias que se cortan en dos puntos, (fig. 176) *y tangentes las que solo tienen un punto comun* (fig. 177).

503.—*La línea de los centros de dos circunferencias que se cortan es perpendicular á la cuerda comun y la divide en dos partes iguales.*

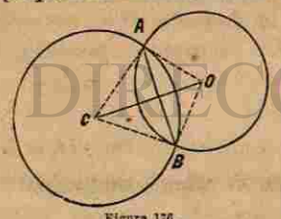


Figura 176.

Sean los dos círculos (fig. 176) cuyos centros son O y C, y que se cortan en A y B. Tirando la cuerda comun A B y los radios O A, O B, C A y C B, se tiene que la línea de los centros O C tiene el punto O equidistante de los extremos A y B de la cuerda y el punto C, centro del círculo mayor, tambien

está equidistante de A y de B; luego conforme á lo demostrado en el número 404, la línea de los centros será perpendicular á la cuerda comun y la dividirá en dos partes iguales.

504.—*Cuando dos circunferencias no tienen más que un punto comun, este pertenece á la línea de los centros.*

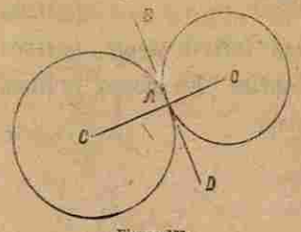


Figura 177.

Teniendo las dos circunferencias un solo punto comun A (fig. 177) si se tira una tangente B D á uno de los círculos por el punto de contacto tambien lo será al otro, y tirando los radios O A y C A tendremos (478) que el ángulo B A O será recto lo mismo que B A C; pero teniendo estos ángulos la posicion de adyacentes y valiendo juntos dos rectos, las líneas A O y A C formarán una sola recta (397), de lo que resulta que A estará en la línea C O.

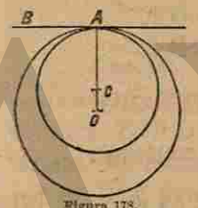


Figura 178.

Si los dos círculos se tocan interiormente (fig. 178), como no puede levantarse desde un mismo punto A más que una sola perpendicular á la tangente comun A B, los dos radios A O y A C tendrán que confundirse y el punto A quedará en la prolongacion de O C que es la línea de los centros.

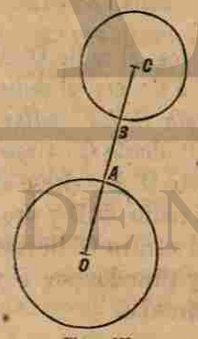


Figura 179.

505.—Dos círculos situados en un plano pueden tener cinco posiciones relativas diferentes: primero, estar uno fuera de otro, (fig. 179); segundo, ser tangentes exteriormente (fig. 177); tercero, ser secantes (fig. 176); cuarto, ser tangentes interiormente (fig. 178), y quinto estar uno dentro del otro (fig. 180).

En estos casos la línea de los centros goza de las siguientes propiedades.

[Fig. 179]. 1° *Cuando los dos círculos son exteriores, la línea de los centros es mayor que la suma de los radios,* supuesto que O C se compone de los dos radios, más la parte A B.

[Fig. 177]. 2° *Cuando los dos círculos se tocan exteriormente, la línea de los centros es igual á la suma de los radios,* pues pasando por el punto A de contacto se tiene O C = O A + A C.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

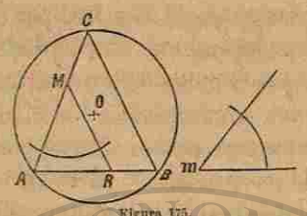


Figura 175.

Tírese la recta A C que forme con A B un ángulo cualquiera: en un punto M de esta recta constrúyase un ángulo A M R $= m$, y por el punto B tírese una recta B C paralela á M R. Haciendo pasar un círculo por los tres puntos A B y C se tendrá el arco de círculo capaz del ángulo dado m.

En efecto, el ángulo A C B, cuyo vértice está sobre la circunferencia, es igual á A M R por correspondientes; pero A M R$=m$ por construccion, luego cualquier ángulo inscrito, cuyos lados pasen por los extremos de A B, será igual á m.

INTERSECCION Y CONTACTO DE LOS CIRCULOS.

502.—Hemos visto (492) que por tres puntos que no están en línea recta siempre puede hacerse pasar un círculo, y como una vez fijado el centro y el radio queda determinada la posicion del círculo, resulta: 1° que por tres puntos no puede hacerse pasar más de un solo círculo: 2° que dos circunferencias que tienen tres puntos comunes, se confunden en todas sus partes: y 3° que dos circunferencias distintas pueden cortarse en dos puntos, tener un punto comun, ó no tocarse en ninguno.

Se llaman secantes dos circunferencias que se cortan en dos puntos, (fig. 176) *y tangentes las que solo tienen un punto comun* (fig. 177).

503.—*La línea de los centros de dos circunferencias que se cortan es perpendicular á la cuerda comun y la divide en dos partes iguales.*

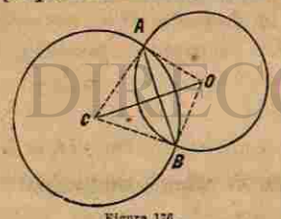


Figura 176.

Sean los dos círculos (fig. 176) cuyos centros son O y C, y que se cortan en A y B. Tirando la cuerda comun A B y los radios O A, O B, C A y C B, se tiene que la línea de los centros O C tiene el punto O equidistante de los extremos A y B de la cuerda y el punto C, centro del círculo mayor, tambien

está equidistante de A y de B; luego conforme á lo demostrado en el número 404, la línea de los centros será perpendicular á la cuerda comun y la dividirá en dos partes iguales.

504.—*Cuando dos circunferencias no tienen más que un punto comun, este pertenece á la línea de los centros.*

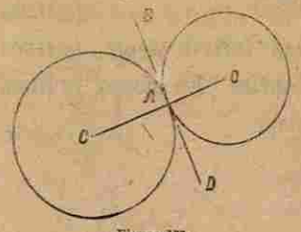


Figura 177.

Teniendo las dos circunferencias un solo punto comun A (fig. 177) si se tira una tangente B D á uno de los círculos por el punto de contacto tambien lo será al otro, y tirando los radios O A y C A tendremos (478) que el ángulo B A O será recto lo mismo que B A C; pero teniendo estos ángulos la posicion de adyacentes y valiendo juntos dos rectos, las líneas A O y A C formarán una sola recta (397), de lo que resulta que A estará en la línea C O.

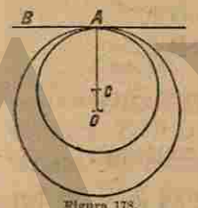


Figura 178.

Si los dos círculos se tocan interiormente (fig. 178), como no puede levantarse desde un mismo punto A más que una sola perpendicular á la tangente comun A B, los dos radios A O y A C tendrán que confundirse y el punto A quedará en la prolongacion de O C que es la línea de los centros.

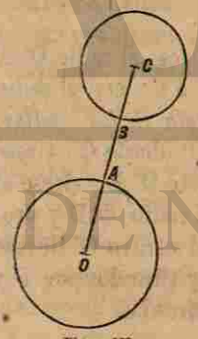


Figura 179.

505.—Dos círculos situados en un plano pueden tener cinco posiciones relativas diferentes: primero, estar uno fuera de otro, (fig. 179); segundo, ser tangentes exteriormente (fig. 177); tercero, ser secantes (fig. 176); cuarto, ser tangentes interiormente (fig. 178), y quinto estar uno dentro del otro (fig. 180).

En estos casos la línea de los centros goza de las siguientes propiedades.

[Fig. 179]. 1° *Cuando los dos círculos son exteriores, la línea de los centros es mayor que la suma de los radios,* supuesto que O C se compone de los dos radios, más la parte A B.

[Fig. 177]. 2° *Cuando los dos círculos se tocan exteriormente, la línea de los centros es igual á la suma de los radios,* pues pasando por el punto A de contacto se tiene O C = O A + A C.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

[Fig. 176]. 3° *Cuando los círculos se cortan, la línea de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.* En efecto, considerando el triángulo C A O se tiene:

$$O\,C < C\,A + O\,A \quad (425)$$

y

$$O\,C > C\,A - O\,A \quad (426)$$

(Fig. 178). 4° *Cuando dos círculos se tocan interiormente, la línea de los centros es igual á la diferencia de los radios.* En efecto, la línea de los centros prolongada pasa por A, y se tiene

$$O\,C = A\,O - A\,C$$



Figura 180.

(Fig. 180). 5° *Cuando uno de los círculos está dentro del otro, la línea de los centros es menor que la diferencia de los radios.* En este caso se tiene

$$O\,C + C\,B + B\,A = O\,A$$

de donde

$$O\,C = O\,A - C\,B - B\,A$$

luego

$$O\,C < O\,A - C\,B$$

Las recíprocas de estas proposiciones tambien son ciertas.

506.—Problemas de dos círculos.—I.—*Tirar una tangente exterior comun á dos círculos dados* (fig. 181).

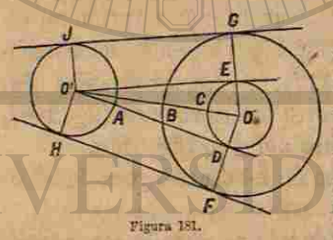


Figura 181.

Construccion.—Llévese el radio O' A del círculo menor de B á C; con el radio O C *igual á la diferencia de los radios*, trácese el círculo E C D; desde O', tírese á este círculos la tangente O' D; tírese al punto de contacto D el radio O D y prolónguese hasta F; por el centro O' llévese O' H paralela á O F; y tirando por F y H una recta, ésta será la tangente comun á los dos círculos.

Demostracion.—Para que F H sea tangente á los dos círculos, es preciso que sea perpendicular á los radios O F y O' H en los puntos de contacto, y para demostrarlo bastará probar que la figura O' D F H es un rectángulo. Tenemos que por ser O' H igual y paralela á D F, el cuadrilátero O' D F H será paralelógramo (450); pero este paralelógramo es rectángulo por ser O' D perpendicular á O F, y por ser O' H paralela á esta recta.

El problema admite dos resoluciones, pues por una construccion idéntica puede tirarse la tangente G J en la parte superior de los dos círculos.

II.—*Tirar una tangente interior comun á dos círculos dados* (figura 182).

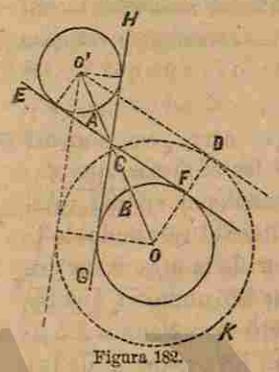


Figura 182.

Construccion.—Llévese el radio O' A del círculo menor de B á C: con un radio O C *igual á la suma de los radios*, trácece el círculo C K D: desde O' tírese la tangente O' D á este círculo: llévese al punto de contacto el radio O D: por O' tírese el radio O' E paralelo á O D, y reuniendo E con F se tendrá la tangente pedida.

Demostracion.—Siendo F D igual y paralela á E O' (450), el cuadrilátero E O' D F será paralelógramo; pero habiéndose tirado O' D tangente al círculo, el ángulo O' D F será recto lo mismo que E O' D por ser O' E paralela á F D, luego E O' D F será un rectángulo, y siendo E F perpendicular á los radios O' E y O F será tangente á los círculos dados.

El problema admite dos resoluciones, pues por una construccion idéntica puede tirarse la tangente G H.

LINEAS PROPORCIONALES.

507.—Las magnitudes A y B son proporcionales á otras dos C y D cuando se puede establecer entre sus razones la siguiente igualdad:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Unas veces las letras A, B, C y D representan las magnitudes mismas, sean líneas, ángulos, arcos, superficies, eec.: pero otras, y es lo más general, expresan la relacion que existe entre cada una de ellas á la unidad de su especie, y bien sean cantidades ó números sus *razones* y *proporciones* gozan de las propiedades que ya quedan demostradas en aritmética y en álgebra. Las voces *proporcion, antecedente, término medio proporcional*, etc., significan en geometría lo mismo que en las otras partes de las matemáticas.

Cuando se indique el producto de una línea por otra, generalmente deberá entenderse que se trata del producto de los números, que expresan las relaciones entre estas líneas y otra tomada por unidad. Así si a y b representan dos rectas, $a + b$ podrá indicar el resultado de la operacion mecánica de poner una á continuacion de la otra estas dos líneas, ó el valor numérico que resulta de sumar los números que representan las magnitudes de las rectas a y b; pero si se tiene $a\,b$ ó a^2 etc., estos productos, por regla general, indicarán los productos de los números que representan las magnitudes de las líneas.

508.—*Si dos rectas A F, y G M, situadas en un plano* (fig. 183) *están cortadas por un número cualquiera de paralelas A G, B H, C Y, etc., tiradas por puntos tomados á distancias iguales sobre la primera, las partes G H, H Y, Y K, etc., determinadas sobre la segunda recta, serán iguales entre sí.*

Fundándonos en que son paralelas las rectas, é iguales las partes A B, B C, C D, etc., demostrarémos que tambien serán iguales las partes G H, H Y, Y K, etc.

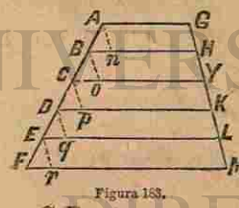


Figura 183.

Por los puntos A, B, C, etc., tiremos las rectas An, Bo, Cp, etc., paralelas á G M, por lo que serán paralelas entre sí, y resultarán los triángulos A B n, B C o, C D p, etc., iguales entre sí por tener un lado igual adyacente á ángulos iguales (384). Los lados iguales son A B=B C =C D, etc., por construccion. Los ángulos adyacentes respectivamente iguales, son: B A n=C B o=D C p, etc., y A B n=B C o=C D p, etc., por correspondientes. Por la igualdad de los triángulos se tiene:

$$A\,n = B\,o = C\,p = D\,q, \text{ etc.}$$

pero como las figuras A n G H, B o Y H, C p K Y etc., son paralelógramos, los lados opuestos serán iguales, esto es,

$$A\,n = G\,H,\ B\,o = H\,Y,\ C\,p = K\,Y \text{ etc.}$$

pero como los primeros miembros de estas ecuaciones son iguales entre sí, se infiere que lo serán los segundos, esto es,

$$G\,H = H\,Y = K\,Y \text{ etc.}$$

que es lo que se tenia que demostrar.

509.—*Dos rectas cualesquiera A B y C D* (fig. 184) *colocadas en un plano, son cortadas en partes proporcionales por tres paralelas A C, E F y B D.*

Las magnitudes E A y E B podrán ser conmensurables ó inconmensurables.

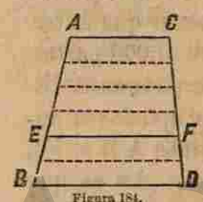


Figura 184.

1° Si las distancias E A y E B son *conmensurables*, y suponemos por ejemplo, que dividiendo E B en dos partes, una de éstas puede llevarse cuatro veces de E á A, y nos imaginamos que por los puntos de division se tiran rectas paralelas entre sí, conforme al teorema del párrafo que antecede, el lado C D quedará dividido en partes iguales, de las que dos corresponderán á la parte F D y cuatro á la C F. Por tanto, si representamos por m la magnitud de una de las partes del lado A B y por m' las del lado C D, tendremos:

$$E\,B : E\,A :: 2m : 4m$$

y

$$F\,D : F\,C :: 2m'' : 4m'$$

de donde $E\,B : E\,A :: F\,D : F\,C$, que es lo que se debia demostrar.

2° En el caso de que A B y B C (fig. 185) sean *inconmensurables*, el teorema es igualmente cierto. Supongamos que dividiendo A B en tres partes iguales y llevando una de éstas cuatro veces sobre B C quede la resta i C, la que forzosamente será menor que una de las partes. Tirando paralelas por los puntos de division, resultará dividida E D en tres partes, y E F en cuatro, más una resta F n.

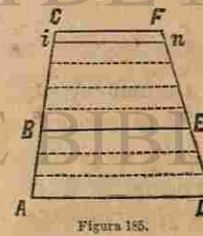


Figura 185.

Si consideramos las porciones conmensurables A B, B i, E D y E n

tendremos A B : B i :: E D : E n

sustituyendo por B i su igual B C—i C, y por E n su valor E F—F n, se tiene:

$$A\,B : B\,C - i\,C :: E\,D : E\,F - F\,n$$

multiplicando entre sí extremos y medios

$$AB \times EF - AB \times Fn = BC \times ED - ED \times iC$$

trasladando $AB \times EF - BC \times ED = AB \times Fn - ED \times iC$

Establecida esta ecuacion, vamos á demostrar que $AB \times EF$ no puede ser desigual á $BC \times ED$. Si lo fuera, habria entre estos productos, cuyos factores son todos constantes, una diferencia d fija é independiente de la magnitud arbitraria de las partes en que se dividieran AC y FD. En el supuesto de que pudieran ser desiguales, se tendria

$$AB \times EF - BC \times ED = d$$

y por lo mismo $AB \times Fn - ED \times iC = d$

en la que por construccion $Fn < \frac{1}{3} ED$ é $iC < \frac{1}{3} AB$

Ahora bien: si en lugar de dividir AB en tres partes iguales, la dividimos en treinta y llevamos estas partes sobre BC y tiramos paralelas, el valor de las restas iC y Fn será una fraccion menor que ántes, y mucho menor aún si dividiéramos AB en 300 ó en 3,000 partes. Así, pues, las restas son cantidades variables cuyo valor podremos disminuir á nuestro arbitrio á medida que el número de divisiones aumente, sucediendo otro tanto con cada uno de los términos $AB \times Fn$ y $ED \times iC$, en los que entra una fraccion como factor. Así es, que siendo d constante, por expresar la diferencia entre las cantidades fijas $AB \times EF$ y $BC \times ED$; en la ecuacion

$$AB \times Fn - ED \times iC = d$$

pudiendo ser $Fn < \frac{AB}{3}$, $Fn < \frac{AB}{30}$, $Fn < \frac{AB}{3000}$ etc.

tendriamos $AB \times Fn < \frac{AB^2}{3}$, $AB \times Fn < \frac{AB^2}{30}$, $AB \times Fn < \frac{AB^2}{3000}$ etc.

y aumentando el número de divisiones llegaría á tenerse

$$AB \times Fn < d;$$

pero como nunca puede ser el minuendo menor que la resta, tampoco podremos suponer desiguales los productos $AB \times EF$ y $BC \times ED$, y si son iguales resultará la proporcion

$$AB : BC :: ED : EF$$

que es lo que se debia demostrar.

510.—*Si desde un punto D* (fig. 186) *tomado sobre un lado de un triángulo, se tira una recta D E paralela á otro lado A C, se verificarán tres cosas:* 1ª *los lados A B y B C quedarán cortados en partes proporcionales:* 2ª *los lados serán proporcionales á sus partes: y* 3ª *el lado A B del triángulo total es con su base A C, como el del parcial B D es con la suya D E.*

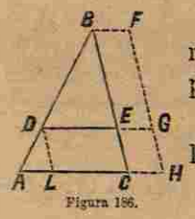


Figura 186.

Para demostrar la primera propiedad, tírese BF paralela á AC, prolónguese este lado y la recta DE, y por el punto F tírese FH paralela al lado BC.

Las rectas AB y FH quedarán cortadas en partes proporcionales por las tres paralelas (509) y se tiene

$$BD : DA :: FG : GH$$

pero por lados opuestos de paralelógramos $FG = BE$, y $GH = EC$ sustituyendo se tiene

$$BD : DA :: BE : EC \ldots . (1)$$

que es la primera parte del teorema.

Para demostrar la segunda, componiendo en la última proporcion, se tiene:

$$BD + DA : DA :: BE + EC : EC$$

Alternando medios y sustituyendo

$$BA : BC :: DA : EC$$

Alternando medios en la proporcion (1) resulta que las partes son proporcionales entre sí, esto es,

$$BD : BE :: DA : EC$$

luego $$BA : BC :: BD : BE$$

Para demostrar la tercera propiedad tiraremos por el punto D una paralela DL al lado BC, y considerando que los lados totales AB y AC son proporcionales á sus partes BD y LC, se tiene:

$$AB : AC :: BD : LC$$

pero como $LC = DE$ por lados opuestos de paralelógramo, sustituyendo, resulta:

$$AB : AC :: BD : DE$$

511.—*Recíprocamente, siempre que una recta D E* (fig. 187) *corte los lados de un triángulo en partes proporcionales, será paralela á la base A C.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

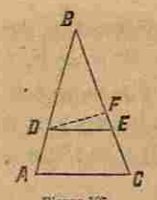


Figura 187.

Si suponemos que D E no sea paralela al lado A C, tendrá que serlo otra recta que pase arriba ó abajo de E, como D F, y entónces en virtud de la hipótesis del teorema, se tiene:

$$AB : BC :: AD : CE$$

y por suponerse D F paralela á la base, se tendria (510–2°)

$$AB : BC :: AD : CF$$

pero siendo iguales los tres primeros términos de estas proporciones, no es posible que los cuartos sean desiguales; luego no se puede admitir que otra recta diferente de D E, sea paralela al lado A C.

512.—Problemas de lineas proporcionales.—I.—*Dividir una línea A B* (fig. 188) *en un número dado de partes iguales.*



Figura 188.

Supongamos que se quiere dividir en cinco partes iguales.

1ª Construccion.—En uno de los extremos B de la recta se construye un ángulo; sobre la recta B D de longitud indefinida se llevan cinco partes iguales comenzando desde B, de B á c, de c á e, etc.: se une el punto D, donde llega la última division, con el extremo A de la recta, y tirando paralelas por los otros puntos de division g, f, e y c, estas paralelas dividirán la recta A B en cinco partes iguales.

El fundamento de esta construccion es el teorema del número 508.

2ª Construccion.—Con el fin de evitar la necesidad de tirar muchas paralelas, se emplea el siguiente procedimiento (fig. 189):

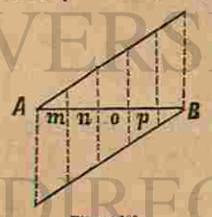


Figura 189.

En los dos extremos de la recta dada se tiran dos paralelas de longitud indefinida: sobre cada una de ellas y partiendo de los puntos A y B, se llevan cinco partes iguales, y uniendo respectivamente los puntos de division de ambas paralelas por rectas, estas dividirán A B en los puntos m, n, o y p en 5 partes iguales. Como las rectas que determinan estas divisiones son paralelas, por lados opuestos de paralelógramos, el fundamento de esta construccion es el mismo que el de la anterior.

II.—*Dividir una recta A B* (fig. 190) *en partes proporcionales á las de otra recta C D.*

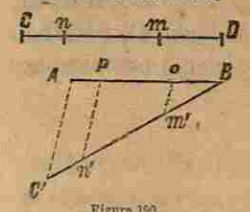


Figura 190.

En el extremo B se construye un ángulo cualquiera. Sobre la recta B C', se llevan las partes B m', m' n', y n' C' iguales respectivamente á las de la recta D C: se unen los puntos C' y A y se tiran paralelas á A C' por los puntos n' y m'. Estas paralelas dividirán á A B en p y en o en partes proporcionales á las de C D (509).

III.—*Construir una cuarta proporcional á tres líneas dadas,* m, n *y* p (fig. 191).

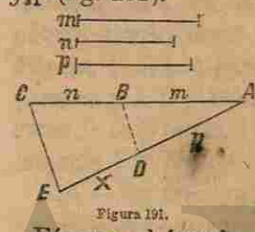


Figura 191.

Supongamos que los términos de la proporcion han de estar en este órden:

$$m : n :: p : x$$

Fórmese el ángulo A y sobre uno de sus lados llévense las magnitudes que forman la primera razon, A B=m, y B C=n. Sobre el otro lado del ángulo llévese A D=p.

Tírese la recta B D y por C una paralela, la parte E D será la cuarta proporcional pedida.

En efecto (510) se tiene

$$AB : BC :: AD : DE$$

sustituyendo

$$m : n :: p : DE$$

luego D E es la cuarta proporcional buscada.

IV.—*Construir una tercera proporcional á dos líneas dadas* m *y* n (fig. 192).

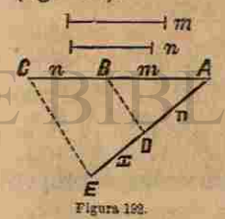


Figura 192.

Como se sabe, se llama tercera proporcional de dos cantidades, el cuarto término de una proporcion contínua. Si suponemos que el órden de los términos de la proporcion ha de ser el siguiente:

$$m : n :: n : x$$

la construccion será idéntica á la del problema an-

terior. Formando un ángulo A se llevarán sobre uno de sus lados magnitudes iguales á los términos de la primera razon: A B=m y B C=n. Sobre el otro lado se tomará A D=n. Se reunirá B con D, y tirando C E paralela á B D, la D E será la tercera proporcional pedida; pues (510) se tiene:

$$A B : B C :: A D : D E$$

y sustituyendo

$$m : n :: n : D E$$

luego

$$D E = x$$

SEMEJANZA DE FIGURAS.

513.—*Se llaman figuras semejantes las que tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados homólogos proporcionales.*

En general *se entiende por lados homólogos, los que están adyacentes á ángulos iguales.* En los triángulos, como la suma de los tres ángulos vale dos rectos, los lados de los triángulos que están adyacentes á ángulos iguales, forzosamente quedarán opuestos á ángulos iguales. Por esta causa, *en los triángulos los lados homólogos están opuestos á ángulos iguales.*

514.—*Una recta D E* (fig. 193) *paralela á uno de los lados B C de un triángulo, determina otro triángulo semejante al primero.*



Figura 193.

Los dos triángulos A B C y A D E tienen comun el ángulo A; B=A E D y C=A D E por correspondientes.

Ademas (510—2°)

$$A B : A E :: A C : A D$$

y (510—3°)

$$A B : A E :: B C : E D$$

luego

$$A B : A E :: A C : A D :: B C : E D$$

así es, que teniendo los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales, los triángulos serán semejantes.

515.—*Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.*

Sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 194) que tienen los ángulos

$$A = A' \text{ y } B = B'$$

siendo estos dos ángulos iguales (434—4°) el tercero tambien lo será y se tendrá C=C'

Si sobre B A se lleva una parte B D=B' A' y sobre B C se toma B E=B' C' y se tira D E, se tendrá el triángulo B D E igual á B' A' C' (385) por ser el ángulo B=B' formado por lados respectivamente iguales. Por la igualdad de los triángulos, B D E=A' y por hipótesis A=A', luego B D E=A; como estos ángulos son correspondientes, D E será paralela al lado A C (415). Ahora bien: siendo D E paralela á A C (514) el triángulo B D E será semejante á A B C; pero como B D E es igual á A' B' C', se infiere que este triángulo será semejante á A B C.

516.—*Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, formado por lados proporcionales.*

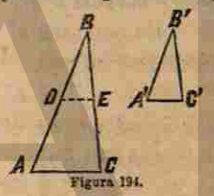


Figura 194.

Sea el ángulo B=B' (fig. 194) y

$$A B : A' B' :: B C : B' C'.$$

Si pusiéramos el triángulo A' B' C' sobre A B C, haciendo coincidir el ángulo B' con B, por ser iguales estos ángulos, el lado B' A', tomaria la direccion de B A, y B' C' tomaria la de B C; reuniendo los puntos D y E en que suponemos que caen A' y C' se tendrá el triángulo B D E igual á A' B' C' por tener un ángulo igual formado por lados iguales (385). Como por el supuesto se tiene

$$A B : A' B' :: B C : B' C'$$

sustituyendo sus iguales, resulta

$$A B : B D :: B C : B E$$

luego la recta D E que corta en partes proporcionales los lados del triángulo, será paralela al lado A C (511) y por tanto los triángulos A B C y B D E serán semejantes por ser equiángulos, pero como B D E es igual á A' B' C', este triángulo tambien será semejante á A B C.

517.—*Dos triángulos serán semejantes cuando tengan sus tres lados respectivamente proporcionales.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

terior. Formando un ángulo A se llevarán sobre uno de sus lados magnitudes iguales á los términos de la primera razon: A B=m y B C=n. Sobre el otro lado se tomará A D=n. Se reunirá B con D, y tirando C E paralela á B D, la D E será la tercera proporcional pedida; pues (510) se tiene:

$$A B : B C :: A D : D E$$

y sustituyendo

$$m : n :: n : D E$$

luego

$$D E = x$$

SEMEJANZA DE FIGURAS.

513.—*Se llaman figuras semejantes las que tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados homólogos proporcionales.*

En general *se entiende por lados homólogos, los que están adyacentes á ángulos iguales.* En los triángulos, como la suma de los tres ángulos vale dos rectos, los lados de los triángulos que están adyacentes á ángulos iguales, forzosamente quedarán opuestos á ángulos iguales. Por esta causa, *en los triángulos los lados homólogos están opuestos á ángulos iguales.*

514.—*Una recta D E* (fig. 193) *paralela á uno de los lados B C de un triángulo, determina otro triángulo semejante al primero.*



Figura 193.

Los dos triángulos A B C y A D E tienen comun el ángulo A; B=A E D y C=A D E por correspondientes.

Ademas (510—2°)

$$A B : A E :: A C : A D$$

y (510—3°)

$$A B : A E :: B C : E D$$

luego

$$A B : A E :: A C : A D :: B C : E D$$

así es, que teniendo los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales, los triángulos serán semejantes.

515.—*Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.*

Sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 194) que tienen los ángulos

$$A = A' \text{ y } B = B'$$

siendo estos dos ángulos iguales (434—4°) el tercero tambien lo será y se tendrá C=C'

Si sobre B A se lleva una parte B D=B' A' y sobre B C se toma B E=B' C' y se tira D E, se tendrá el triángulo B D E igual á B' A' C' (385) por ser el ángulo B=B' formado por lados respectivamente iguales. Por la igualdad de los triángulos, B D E=A' y por hipótesis A=A', luego B D E=A; como estos ángulos son correspondientes, D E será paralela al lado A C (415). Ahora bien: siendo D E paralela á A C (514) el triángulo B D E será semejante á A B C; pero como B D E es igual á A' B' C', se infiere que este triángulo será semejante á A B C.

516.—*Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, formado por lados proporcionales.*

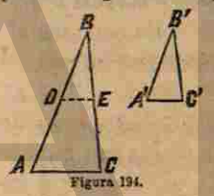


Figura 194.

Sea el ángulo B=B' (fig. 194) y

$$A B : A' B' :: B C : B' C'.$$

Si pusiéramos el triángulo A' B' C' sobre A B C, haciendo coincidir el ángulo B' con B, por ser iguales estos ángulos, el lado B' A', tomaria la direccion de B A, y B' C' tomaria la de B C; reuniendo los puntos D y E en que suponemos que caen A' y C' se tendrá el triángulo B D E igual á A' B' C' por tener un ángulo igual formado por lados iguales (385). Como por el supuesto se tiene

$$A B : A' B' :: B C : B' C'$$

sustituyendo sus iguales, resulta

$$A B : B D :: B C : B E$$

luego la recta D E que corta en partes proporcionales los lados del triángulo, será paralela al lado A C (511) y por tanto los triángulos A B C y B D E serán semejantes por ser equiángulos, pero como B D E es igual á A' B' C', este triángulo tambien será semejante á A B C.

517.—*Dos triángulos serán semejantes cuando tengan sus tres lados respectivamente proporcionales.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

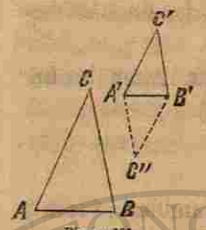


Figura 195.

Sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 195) en los que se tiene A B : A' B' :: B C : B' C' :: A C : A' C', y vamos á demostrar que son equiángulos. Para esto sobre el lado A' B' construyamos un ángulo B' A' C"=A y A' B' C"=B, con lo que resultará el triángulo A' B' C" semejante á A B C (515) por lo que se tendrá:

A B : A' B' :: B C : B' C" :: A C : A' C"

pero conforme al supuesto

A B : A' B' :: B C : B' C' :: A C : A' C'

por ser en estas dos séries de razones los antecedentes iguales, los consecuentes tambien lo serán; y se tendrá en los triángulos A' B' C' y A' B' C"

A' B' comun, B' C"=B' C' y A' C"=A' C'

por lo que el triángulo A' B' C" será igual á A' B' C' (386); pero como el primero es semejante á A B C, tambien A' B' C' lo será.

518.—En resúmen, *los triángulos son semejantes:* 1° *cuando tienen dos ángulos iguales:* 2° *cuando tienen un ángulo igual formado por lados proporcionales:* 3° *cuando tienen sus tres lados respectivamente proporcionales:* 4° *cuando tienen sus lados paralelos,* pues estónces serán equiángulos: *y* 5° *cuando tienen sus tres lados respectivamente perpendiculares,* tambien por ser equiángulos (422).

Repetiremos que *en los triángulos semejantes, los lados homólogos son los opuestos á ángulos iguales; y en el* 5° *caso los lados perpendiculares son los homólogos.*

519.—*Dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.*



Figura 196.

Sean dos polígonos regulares de 6 lados [fig. 196.] Por ser regular cada polígono, serán iguales entre sí los lados y los ángulos. La suma de los ángulos interiores del polígono A B C.... F vale 4 veces 2 rectos, y cada ángulo $\frac{4}{6}$ de ángulo recto. Otro tanto sucederá en el polígono A' B' C' D' E' F' en el que cada ángulo tambien valdrá $\frac{4}{6}$ de ángulo recto; luego los dos polígonos tendrán sus ángulos iguales. Para probar que los lados son proporcionales, basta observar que A B=B C=C D, etc., y que

A' B'=B' C'=C' D' etc,

luego dividiendo ordenadamente estas ecuaciones:

A B : A' B' :: B C : B' C' :: C D : C' D'....

520.—*Dos polígonos semejantes A B C D E,* a b c d e *pueden descomponerse en triángulos semejantes* [fig. 197].

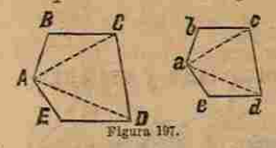


Figura 197.

Si desde uno de los vértices, A, por ejemplo, se tiran diagonales, los polígonos quedarán divididos en triángulos que, vamos á demostrar, serán semejantes.

El triángulo A B C es semejante á a b c, porque por ser los polígonos semejantes, el ángulo B=b y los lados que lo forman serán proporcionales, esto es, A B : a b :: B C : b c (516).

Los triángulos A C D y a c d serán semejantes por tener el ángulo A C D=a c d formado por lados proporcionales.

En efecto, B C D=b c d por ángulos del polígono.
B C A=b c a por ángulos de los triángulos semejantes á A B C y a b c.

Restando las ecuaciones A C D=a c d.

En razon de ser los polígonos semejantes
se tiene: B C : b c :: C D : c d
y por serlo los triángulos B C : b c :: A C : a c
luego C D : c d :: A C : a c

Del mismo modo se demostraria que son semejantes los triángulos A D E y a d e.

521.—*Recíprocamente dos polígonos compuestos de triángulos semejantes, dispuestos de la misma manera son semejantes.*

En efecto, (fig. 197), por ser semejantes los triángulos A B C y a b c, el ángulo B=b y A B: a b :: B C : b c.

Además el ángulo B C A=b c a.

Por ser semejantes los triángulos A C D y a c d serán iguales los ángulos A C D=a c d.

sumando estas ecuaciones se tiene:

B C D=b c d.

Por la semejanza de los triángulos se tiene.

B C : b c :: A C : a c
y A C : a c :: C D : c d
luego B C : b c :: C D : c d

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

De una manera análoga se demostraria que el ángulo C D E=c d e, que E=e y que

C D : c d :: E D : e d :: E A : e a.

Así es que los polígonos tienen sus lados proporcionales y sus ángulos iguales.

522.—*Si desde uno de los vértices de un polígono A se tiran diagonales y por un punto b de uno de los lados se tiran paralelas b c, c d y d e á los otros lados, el polígono A b c d e que resulte, será semejante al primero* (fig. 198).

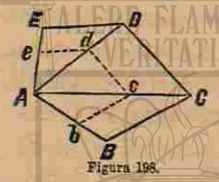


Figura 198.

La razon de esto es que el nuevo polígono A b c d e resultará formado por triángulos semejantes y dispuestos de la misma manera. (521) Los triángulos son semejantes por ser equiángulos.

523.—*Los perímetros de dos polígonos semejantes, son proporcionales á sus lados, ó á sus líneas homólogas.*

Por ser semejantes los polígonos, se tiene (fig. 197).

A B : a b :: B C : b c :: C D : c d :: D E : d e :: E A : e a

y fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente tendremos:

A B+B C+C D etc. : a b+b c+c d etc. :: A B : a b

llamando *P* el perímetro de un polígono y *p* el del otro, y sustituyendo:

P : p :: A B : a b.

En virtud de la semejanza de los triángulos se tiene:

A B : a b :: A C : a c

luego P : p :: A C : a c

lo que se ha demostrado respecto á esta diagonal podria demostrarse de cualquiera otra línea que tuviese una posicion semejante ú homóloga en ámbos polígonos.

524.—PROBLEMAS DE SEMEJANZAS DE FIGURAS.—I.—*Sobre la recta d construir un triángulo semejante á A B C.*

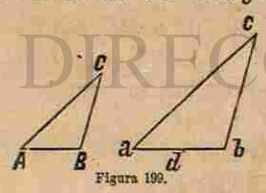


Figura 199.

(Fig. 199). Es preciso saber á qué lado del triángulo conocido debe ser homóloga la recta dada. Suponiendo que lo sea de A B, en sus dos extremos se construirán los ángulos a=A y b=B, y prolongando los lados se tendrá el triángulo pedido a b c (515).

II. *Sobre una recta dada h construir un polígono semejante á otro A B C D E.*

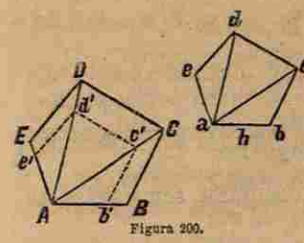


Figura 200.

(Fig. 200). Sabiendo que h debe ser el lado homólogo de A B, se tirarán las diagonales A C, A D, y sobre h se construirá el triángulo a b c semejante á A B C. En seguida sobre a c, como homólogo de A C, se construirá el triángulo a c d semejante á A C D; y por último, sobre a d, como homólogo de A D, se construirá el triángulo a d e semejante á A E D.

Tambien puede resolverse el problema llevando el lado h sobre su homólogo A B de A á b', tirar por este punto la paralela b' c' á B C. en c' tirar c' d' paralela á C D, y por d' tirar d' e' paralela á D E. Así quedaria formado el polígono A b' c' d' e' semejante á A B C D E. En seguida sobre h se construiria el polígono a b c d e igual á A b' c' d' e'.

El arte de levantar planos consiste en construir sobre el papel figuras semejantes á las de un terreno dado, para lo cual comunmente lo que se hace es descomponer en triángulos la figura cuya extension se trata de determinar, y dibujar en el papel, sujetándose á una escala dada, triángulos semejantes á los del terreno.

LINEAS PROPORCIONALES EN LOS TRIANGULOS.

525.—*Varias rectas A B, A C, A D y A E que parten de un mismo punto A son cortadas en partes proporcionales por dos paralelas B E y F G.*

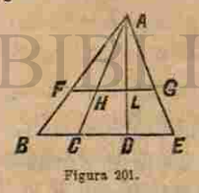


Figura 201.

Comparando los lados homólogos de los triángulos A B C y A F H; A C D y A H L; A D E y A L G que son semejantes por ser equiángulos, se tiene:

A B : A F :: A C : A H
A C : A H :: A D : A L
A D : A L :: A E : A G

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

De una manera análoga se demostraria que el ángulo C D E=c d e, que E=e y que

C D : c d :: E D : e d :: E A : e a.

Así es que los polígonos tienen sus lados proporcionales y sus ángulos iguales.

522.—*Si desde uno de los vértices de un polígono A se tiran diagonales y por un punto b de uno de los lados se tiran paralelas b c, c d y d e á los otros lados, el polígono A b c d e que resulte, será semejante al primero* (fig. 198).

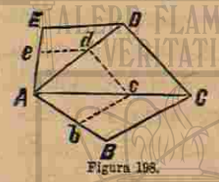


Figura 198.

La razon de esto es que el nuevo polígono A b c d e resultará formado por triángulos semejantes y dispuestos de la misma manera. (521) Los triángulos son semejantes por ser equiángulos.

523.—*Los perímetros de dos polígonos semejantes, son proporcionales á sus lados, ó á sus líneas homólogas.*

Por ser semejantes los polígonos, se tiene (fig. 197).

A B : a b :: B C : b c :: C D : c d :: D E : d e :: E A : e a

y fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente tendremos:

A B+B C+C D etc. : a b+b c+c d etc. :: A B : a b

llamando *P* el perímetro de un polígono y *p* el del otro, y sustituyendo:

P : p :: A B : a b.

En virtud de la semejanza de los triángulos se tiene:

A B : a b :: A C : a c

luego P : p :: A C : a c

lo que se ha demostrado respecto á esta diagonal podria demostrarse de cualquiera otra línea que tuviese una posicion semejante ú homóloga en ámbos polígonos.

524.—PROBLEMAS DE SEMEJANZAS DE FIGURAS.—I.—*Sobre la recta d construir un triángulo semejante á A B C.*

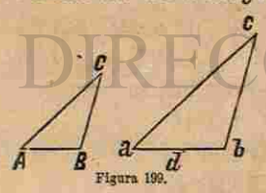


Figura 199.

(Fig. 199). Es preciso saber á qué lado del triángulo conocido debe ser homóloga la recta dada. Suponiendo que lo sea de A B, en sus dos extremos se construirán los ángulos a=A y b=B, y prolongando los lados se tendrá el triángulo pedido a b c (515).

II. *Sobre una recta dada h construir un polígono semejante á otro A B C D E.*

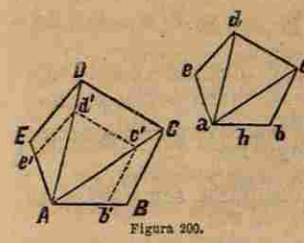


Figura 200.

(Fig. 200). Sabiendo que h debe ser el lado homólogo de A B, se tirarán las diagonales A C, A D, y sobre h se construirá el triángulo a b c semejante á A B C. En seguida sobre a c, como homólogo de A C, se construirá el triángulo a c d semejante á A C D; y por último, sobre a d, como homólogo de A D, se construirá el triángulo a d e semejante á A E D.

Tambien puede resolverse el problema llevando el lado h sobre su homólogo A B de A á b', tirar por este punto la paralela b' c' á B C. en c' tirar c' d' paralela á C D, y por d' tirar d' e' paralela á D E. Así quedaria formado el polígono A b' c' d' e' semejante á A B C D E. En seguida sobre h se construiria el polígono a b c d e igual á A b' c' d' e'.

El arte de levantar planos consiste en construir sobre el papel figuras semejantes á las de un terreno dado, para lo cual comunmente lo que se hace es descomponer en triángulos la figura cuya extension se trata de determinar, y dibujar en el papel, sujetándose á una escala dada, triángulos semejantes á los del terreno.

LINEAS PROPORCIONALES EN LOS TRIANGULOS.

525.—*Varias rectas A B, A C, A D y A E que parten de un mismo punto A son cortadas en partes proporcionales por dos paralelas B E y F G.*

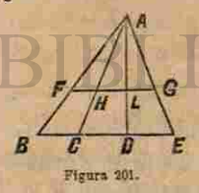


Figura 201.

Comparando los lados homólogos de los triángulos A B C y A F H; A C D y A H L; A D E y A L G que son semejantes por ser equiángulos, se tiene:

A B : A F :: A C : A H
A C : A H :: A D : A L
A D : A L :: A E : A G

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

y como la última razon de cada proporcion es la primera de la siguiente, se tiene:

$$AB : AF :: AC : AH :: AD : AL :: AE : AG$$

que es lo que se tenia que demostrar.

526.—*Dos paralelas F G y B E quedan cortadas en partes proporcionales por varias rectas A B, A C, etc., que concurren en un punto A.* (Fig. 201).

Comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes, se tiene:

$$AC : AH :: BC : FH$$
$$AC : AH :: CD : HL$$
luego $$BC : FH :: CD : HL \qquad (1)$$
$$AD : AL :: CD : HL$$
$$AD : AL :: DE : LG$$
luego $$CD : HL :: DE : LG \qquad (2)$$

comparando las proporciones (1) y (2) se tiene por último:

$$BC : FH :: CD : HL :: DE : LG$$

que es lo que se tenia que demostrar.

527.—*Recíprocamente siempre que dos paralelas A E y B F sean cortadas en partes proporcionales por varias rectas A B, C D, E F, prolongadas, estas concurrirán en un mismo punto* (fig. 202).

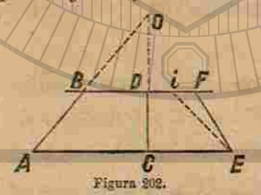


Figura 202.

Prolongando A B y C D concurrirán en el punto O, y si supusiéramos que E F prolongada no concurriera en el mismo punto O, deberia concurrir otra recta que partiendo de E pasara á la derecha ó á la izquierda de F como E i, y en tal concepto tendriamos:

Conforme á la hipótesis del teorema

$$AC : BD :: CE : DF$$

y por concurrir E i prolongada en O (526)

$$AC : BD :: CE : Di$$

Siendo los tres primeros términos de estas proporciones iguales, tendrá que serlo el cuarto, esto es, D i=D F lo que es un absurdo y prueba que E i no concurrirá en el punto O á ménos que coincida con E F.

528.—*En todo triángulo A B C* (fig. 203) *la bisectriz B O de un ángulo divide el lado opuesto A C en partes directamente proporcionales á los lados A B y B C del ángulo.*

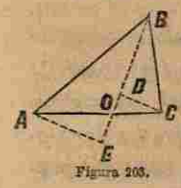


Figura 203.

Desde C y A bájense las perpendiculares C D y A E á la bisectriz B O prolongada, y resultarán los triángulos A B E y B C D semejantes, por ser ambos rectángulos y tener el ángulo A B E=C B D (515). Como en triángulos semejantes los lados homólogos son proporcionales, tendrémos A B opuesto á E, es con su homólogo B C, opuesto al ángulo B D C, como A E opuesto á A B E es con su homólogo C D, opuesto á C B D.

$$AB : BC :: AE : CD.$$

Por otra parte, los triángulos A O E y O C D son semejantes por tener el ángulo E=C D O por rectos, y A O E=C O D por opuestos al vértice. Comparando los lados homólogos de estos triángulos, lo que se hace buscando los lados que están opuestos á los ángulos iguales, tendrémos:

$$AE : CD :: AO : CO$$

suprimiendo la razon comun entre esta y la anterior proporcion, resultará demostrado el teorema

$$AB : BC :: AO : CO$$

529.—*La bisectriz del ángulo exterior C B E* (fig. 204) *de un triángulo corta el lado A C prolongado en un punto F, cuyas distancias á los puntos A y C son proporcionales á los lados del ángulo B, esto es, se tendrá*

$$FA : FC :: BA : BC$$

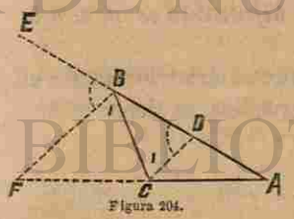


Figura 204.

Demostracion.—Si por C tiramos C D paralela á la bisectriz B F, se tiene (510 2°):

$$AF : FC :: AB : BD$$

pero el triángulo B C D es isósceles, por tener el ángulo B D C=E B F por correspondientes, y B C D=F B C por alternos internos, y como E B F=F B C por mitades de E B C; B D C=B C D, de lo que se infiere que B D=B C.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Sustituyendo en la anterior proporcion, resultará demostrado el teorema:

$$A\,F : F\,C :: A\,B : B\,C$$

530.—*Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa, se verificarán tres cosas:* 1° *los triángulos parciales serán semejantes al triángulo total, y semejantes entre sí:* 2° *la perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa:* y 3° *cada lado del ángulo recto es medio proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento adyacente.*



Figura 205.

1° Para demostrar la primera parte del teorema, tenemos en la fig. 205 que el triángulo parcial A C D es semejante al total A B C porque tienen el ángulo C comun y ambos son rectángulos (515). El otro triángulo parcial A D B es semejante al total porque tienen el ángulo B comun y son ambos rectángulos. Siendo cada uno de los triángulos parciales semejantes al total, serán semejantes entre sí.

2° Para demostrar que la perpendicular A D es media proporcional entre los dos segmentos C D y B D de la hipotenusa, bastará comparar los lados homólogos, buscando como ántes lo hemos explicado (528), los opuestos á ángulos iguales, de los triángulos A C D y A D B y se tiene:

$$C\,D : A\,D :: A\,D : D\,B$$

3° Para demostrar la tercera parte del teorema basta comparar los lados homólogos de uno de los triángulos parciales con el total:

Comparando A C D $\quad C\,D : A\,C :: A\,C : C\,B$
Idem A D B $\quad B\,D : A\,B :: A\,B : C\,B$

C D es lo que se llama la proyeccion de A C sobre la hipotenusa C B.

531.—*El valor numérico del cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.*

Si en las dos últimas proporciones del teorema anterior formamos el producto de extremos y lo igualamos al de los medios, se tiene:

$$C\,D \times C\,B = A\,C^2$$
$$B\,D \times C\,B = A\,B^2$$

sumando estas ecuaciones y sacando á C B como factor comun, resulta:

$$(C\,D + B\,D)\ C\,B = A\,C^2 + A\,B^2$$

pero como en la figura: C D + B D = C B, sustituyendo obtendrémos

$$C\,B^2 = A\,C^2 + A\,B^2$$

que es lo que debiamos demostrar.

Debemos repetir que el producto de dos líneas, así como la segunda potencia de una recta, generalmente es el producto de los números que expresan las relaciones de estas líneas á la unidad de longitud.

532.—De aquí se infiere que *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa ménos el cuadrado del otro cateto;* pues despejando en la última ecuacion á A C² ó á A B² se tiene:

$$A\,C^2 = C\,B^2 - A\,B^2 \text{ y } A\,B^2 = C\,B^2 - A\,C^2$$

533.—*En un triángulo oblicuángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el doble producto de uno de estos lados por la proyeccion del otro sobre éste.*

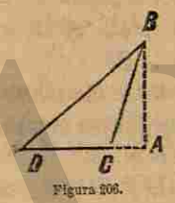


Figura 206.

Esto es, si desde el vértice B (fig. 206) bajamos la perpendicular B A sobre el lado D C prolongado, C A será la proyeccion del lado B C sobre D C, y deberá tenerse

$$D\,B^2 = B\,C^2 \times D\,C^2 + 2\,D\,C \times C\,A$$

Demostracion.—Considerando el triángulo rectángulo A B D se tiene:

$$D\,B^2 = B\,A^2 + A\,D^2 \ldots . [1]$$

Determinarémos los valores de B A² y de A D², y en seguida los sustituirémos en esta ecuacion. El triángulo rectángulo B C A nos da

$$B\,A^2 = B\,C^2 - C\,A^2$$

y

$$A\,D^2 = (A\,C + C\,D)^2 = A\,C^2 + 2\,A\,C \times C\,D + C\,D^2$$

sustituyendo los valores de B A² y de A D² en la ecuacion [1] se obtiene:

$$D\,B^2 = B\,C^2 - C\,A^2 + A\,C^2 + 2\,A\,C \times C\,D + C\,D^2$$

reduciendo, resulta demostrado el teorema

$$D\,B^2 = B\,C^2 + D\,C^2 + 2\,A\,C \times C\,D$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

534.—*En un triángulo oblicuángulo, el cuadrado de un lado opuesto al ángulo agudo, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, ménos el doble producto de uno de estos lados por la proyeccion del otro sobre éste.*

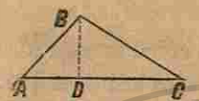


Figura 207.

Esto es, si desde el vértice B (fig. 207) bajamos la perpendicular B D sobre A C, D C será la proyeccion del lado B C sobre A C, y se tendrá

$$A\,B^2=B\,C^2+A\,C^2-2\,A\,C\times D\,C$$

Demostracion.—En el triángulo rectángulo A B D se tiene

$$A\,B^2=B\,D^2+A\,D^2.\ldots.[1]$$

Determinarémos los valores de $B\,D^2$ y de $A\,D^2$ para sustituirlos en esta expresion. El triángulo rectángulo B D C da

$$B\,D^2=B\,C^2-D\,C^2$$

y

$$A\,D^2=(A\,C-D\,C)^2=A\,C^2-2\,A\,C\times D\,C+D\,C^2$$

sustituyendo los valores de $B\,D^2$ y $A\,D^2$ en la ecuacion (1) se obtiene

$$A\,B^2=B\,C^2-D\,C^2+A\,C^2-2\,A\,C\times D\,C+D\,C^2$$

reduciendo

$$A\,B^2=B\,C^2+A\,C^2-2\,A\,C\times D\,C$$

con lo que queda demostrado el teorema.

535.—Así, pues, conforme á los dos últimos teoremas y al del número 531, el cuadrado de un lado de un triángulo es *mayor, igual ó menor* que la suma de los cuadrados de los otros dos lados, segun que el ángulo opuesto es *obtuso, recto ó agudo*. Si representamos por a, b y c los lados del triángulo, y por p la proyeccion del lado c sobre b tendrémos:

$a^2=b^2+c^2+2\ b\ p$ cuando A es *obtuso*.
$a^2=b^2+c^2$,, A es *recto*.
$a^2=b^2+c^2-2\ b\ p$,, A es *agudo*.

Estas fórmulas servirán para calcular el valor de un lado, ó para determinar la especie del ángulo opuesto, cuando se conocen las otras cantidades que entran en ellas.

536.—Problemas de lineas proporcionales.—I. *Dividir una recta A B* (fig. 208) *en partes proporcionales á las de otra dada* m p.

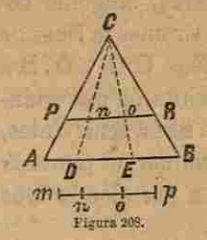


Figura 208.

Constrúyase sobre A B un triángulo equilátero A C B; desde el vértice C llévese una línea C P= m p, y sobre ella constrúyase el triángulo equilátero C P R. Siendo P R=m p sobre ella se llevarán las partes P n, n o, y o R respectivamente iguales á mn, no y o p, y tirando desde C las rectas Cn y Co, prolongadas determinarán sobre A B partes proporcionales á las de la recta dada (526).

II. *Dividir la recta A B en 5 partes iguales* (fig. 209).

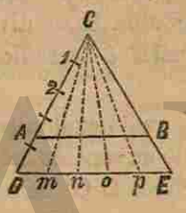


Figura 209.

Sobre A B constrúyase el triángulo equilátero A B C; desde C y sobre C A llévense cinco partes iguales, prolongando este lado si fuere necesario; tómese C E=C D y tirando D E se tendrá el triángulo equilátero C D E; llévense de D á E cinco partes iguales á las tomadas sobre C D y reuniendo los puntos de division m, n, o, p con C, quedará dividida A B en cinco partes iguales (526).

III. *Dividir una recta A B* (fig. 210) *en partes proporcionales á dos rectas dadas* m *y* n.

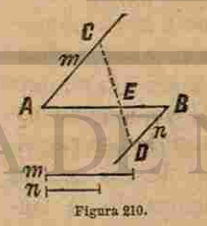


Figura 210.

Por el punto A tírese la recta A C indefinida, y por B la paralela B D; sobre la primera tómese A C=m y sobre la segunda B D=n; réúnase C con D y la recta A B quedará dividida en E en partes A E y B E proporcionales á *m* y *n*.

En efecto, los triángulos A E C y B E D son semejantes por tener iguales los ángulos A y B por alternos internos, y los en E por opuestos al vértice [515]; luego sus lados homólogos serán proporcionales.

$$A\,C : B\,D :: A\,E : E\,B$$

sustituyendo

$$m : n :: A\,E : E\,B$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

IV.—*Tirar una tangente interior comun á dos círculos dados.*

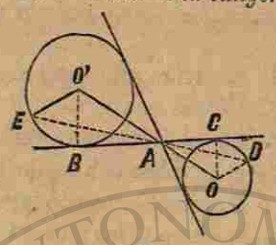


Figura 211.

Si suponemos el problema resuelto por medio de la recta B C [fig. 211], tangente comun á los dos círculos, y tiramos la línea de los centros O O' y los radios O C y O' B á los puntos de contacto, resultarán dos triángulos A O C y A O' B que serán semejantes, y nos servirán para determinar el punto A de la línea de los centros por donde debe pasar la tangente pedida.

Los triángulos A O C y A O' B son semejantes por ser rectángulos y tener iguales los ángulos en A por opuestos al vértice. Siendo semejantes, sus lados homólogos serán proporcionales; luego

O C : O' B :: O A : O' A

Esta proporcion nos indica, que para determinar el punto A por donde debe pasar la tangente interior comun á los dos círculos, basta dividir la línea de los centros O O' en partes proporcionales á los radios, lo cual nos sirve de fundamento á la siguiente

Construccion.—Tírese en uno de los círculos un radio cualquiera O D, y en el otro círculo un radio que le sea paralelo en sentido contrario O' E, y tirando la recta E D ésta dividirá la línea O O' de los centros en partes proporcionales á los radios, supuesto que comparando los triángulos semejantes A O D y A O' E se tiene

O D : O' E :: O A : O' A

Si desde el punto así determinado, se tira una tangente á uno de los círculos, ésta será tambien tangente al otro.

V.—*Tirar una tangente exterior comun á dos círculos dados.*



Figura 212.

Si por medio de la B D (fig. 212), tangente exterior comun á los dos círculos, suponemos resuelto el problema, y tiramos la línea de los centros O C y los radios O B y C D, prolongando la tangente y la línea de los centros resultarán los triángulos semejantes O B A y C D A, que nos servirán para determinar el punto A de la línea de los centros por el que debe pasar la tangente pedida.

Los triángulos O B A y C D A son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo en A comun. Siendo semejantes sus lados homólogos, serán proporcionales, luego

O B : C D :: O A : C A

dividiendo

O B—C D : C D :: O C : C A

Esta proporcion nos indica que el punto donde concurren la tangente exterior con la línea de los centros, debe ser tal, que pueda establecerse la siguiente proporcion: la diferencia de los radios es al radio menor, como la línea de los centros es á su prolongacion, en la cual solo el cuarto término es desconocido. Esta propiedad nos servirá de fundamento para la siguiente

Construccion.—Tírese un radio cualquiera O E, y por el punto C otro en el mismo sentido que le sea paralelo C F, reuniendo E con F y prolongando E F hasta su interseccion con la línea de los centros se determinará el punto A, desde el cual, si se tira una tangente exterior á uno de los círculos, lo será tambien al otro.

En efecto, se tiene en los triángulos O B A y C D A

O B : C D :: O A : C A

dividiendo

O B—C D : C D :: O C : C A....[1]

y en los triángulos O E A y C F A

O E : C F :: O A : C A

dividiendo

O E—C F : C F :: O C : C A....[2]

siendo iguales los tres primeros términos de las proporciones [1] y [2] tendrá que serlo el cuarto.

VI.—*Dadas dos rectas A B y C D* (fig. 213) *que no pueden prolongarse, tirar por un punto O una recta que pase por su punto de concurso.*

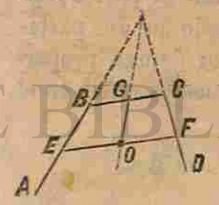


Figura 213.

Por el punto O tírese una recta cualquiera E F, en seguida trácese la paralela B C, y dividiendo esta recta en partes proporcionales á E O y O F, se determinará el punto G (536 III). La recta O G pasará por el punto desconocido de concurso [527].

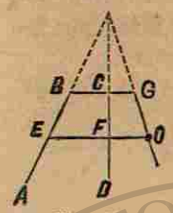


Figura 214.

Si el punto O es exterior (fig. 214), se tirará la recta O E; por B se hará pasar una paralela indefinida, y construyendo una cuarta proporcional á las rectas E F, F O y B C, que llevarémos de C á G, tendrémos resuelto el problema por la recta O G, que será la pedida [527].

VII.—*Construir una tercera proporcional* (fig. 215) *á dos líneas dadas* m *y* n.

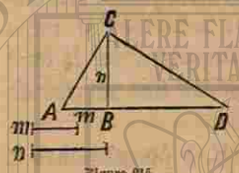


Figura 215.

Sobre A B=m levántose la perpendicular B C =n; tírese A C, y levantando por la extremidad C la perpendicular C D y prolongando A B, se tendrá que B D es la tercera proporcional pedida. En efecto, en el triángulo A C D se tiene [530—2°]

A B : B C :: B C : B D

sustituyendo

m : n :: n : B D

LINEAS PROPORCIONALES EN EL CIRCULO.

537.—*Dos cuerdas que pasan por un punto interior O* (fig. 216) *de un círculo, se cortan en partes recíprocamente proporcionales.*

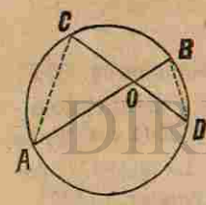


Figura 216.

Se dice quo dos rectas se cortan en partes recíprocamente proporcionales, cuando las dos partes de una recta forman los extremos de una proporcion, y las otras dos partes los medios. Así en el presente caso se debe tener

A O : O D :: O C : O B

Tirando las cuerdas C A y B D resultan los triángulos A O C y

B O D, que serán semejantes en virtud de que el ángulo C=B por tener la misma medida, y A=D por igual razon. Siendo semejantes, los lados homólogos serán proporcionales, y comparando los lados opuestos á los ángulos iguales, se tiene:

A O : O D :: O C : O B

que es lo que se debia demostrar.

538.—*La ordenada C D* (fig. 217) *al diámetro en un punto cualquiera C, es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro.*

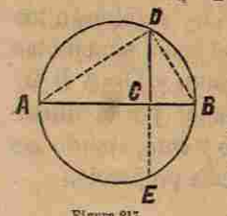


Figura 217.

Esto es, se tiene:

A C : C D :: C D : C B

Como se habrá comprendido, se llama *ordenada* la perpendicular C D levantada en un punto del diámetro y que termina en la circunferencia.

Prolongada esta ordenada, el teorema anterior conduce á la siguiente proporcion:

A C : C D :: C E : C B

pero como C D=C E (477)

resulta A C : C D :: C D : C B

539.—Si se tiran las cuerdas A D y B D, como el ángulo A D B es recto (485); resulta por el teorema anterior en el triángulo rectángulo que la perpendicular C D es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa. Ademas [530—3°] en el mismo triángulo se tiene:

A B : A D :: A D : A C

luego *toda cuerda tirada por el extremo del diámetro es media proporcional entre todo el diámetro, y su proyeccion sobre el mismo diámetro.*

540.—*Dos secantes A B y A C* (fig. 218) *tiradas desde un mismo punto, son recíprocamente proporcionales á sus partes externas A D y A E.*

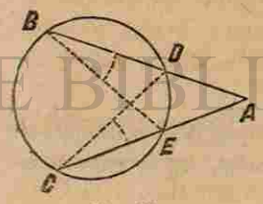


Figura 218.

Esto es, debiendo formar una secante y su parte externa los extremos de una proporcion, y la otra secante y su parte externa los medios, debe demostrarse que

A B : A C :: A E : A D

para esto tiremos las cuerdas B E y D C, y

resultarán formados los triángulos A B E y A C D, que serán semejantes [515] por tener el ángulo en A comun y B=C por tener la misma medida, $\frac{E D}{2}$; buscando y comparando los lados homólogos de estos triángulos, llegaremos á la proporcion

A B : A C :: A E : A D

541.—*Si desde un mismo punto A* (fig. 219) *se tiran una tangente y una secante á un círculo, la tangente A B será media proporcional entre toda la secante y su parte externa.*

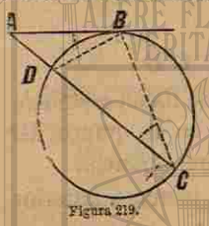


Figura 219.

Tirando las cuerdas B D y B C, resultarán los triángulos A B C y A B D, que serán semejantes [515] por tener el ángulo A comun y C=A B D, supuesto que están medidos ambos por la mitad del mismo arco B D. Buscando y comparando los lados homólogos, obtendrémos esta proporcion:

A C : A B :: A B : A D

que es lo que se tenia que demostrar.

542.—*Si en un punto B* (fig. 220) *de la circunferencia se tira una tangente igual al diámetro, y por el extremo A se traza una secante que pase por el centro del círculo, la secante quedará dividida en media y extrema razon.*

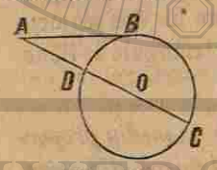


Figura 220.

Se dice que una recta A C queda dividida en media y extrema razon, cuando la parte mayor D C es media proporcional entre toda la recta A C y su parte menor A D.

Conforme á la hipótesis del teorema, tenemos A B igual á D C, y segun el teorema anterior

A C : A B :: A B : A D

sustituyendo

A C : C D :: C D : A D

que es lo que se debia demostrar.

543.—*Los perímetros de dos polígonos regulares del mismo número de lados, inscritos ó circunscritos en círculos diferentes, son proporcionales á los radios de los círculos.*

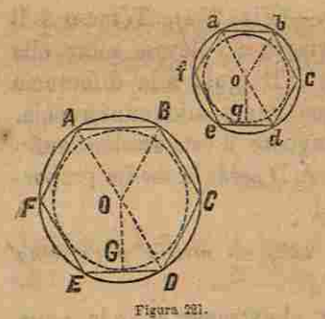


Figura 221.

(Fig. 221). Sean A B C D..... y a b c d..... los polígonos que considerarémos primero inscritos en los círculos.

Por ser polígonos semejantes (519) tendrémos (523):

A B C D..... : a b c d..... :: A B : a b

Tirando los radios A O y O B, o a y o b resultarán los triángulos O A B y o a b que serán semejantes por ser equiángulos, luego

A B : a b :: O A : o a

suprimiendo la razon comun de estas dos proporciones, se tiene:

A B C D..... : a b c d..... :: O A : o a

Considerémos ahora los polígonos circunscritos. Tracemos los rádios rectos y oblícuos O G y O D, o g y o d, y resultarán los triángulos O G D y o g d, que serán semejantes por equiángulos, por lo que

O G : o g :: O D : o d

Antes teniamos

A B C D..... : a b c d..... :: O D : o d

luego

A B C D..... : a b c d..... :: O G : o g

544.—PROBLEMAS DE LÍNEAS PROPORCIONALES EN EL CÍRCULO.—I. *Construir una média proporcional entre dos líneas dadas:* m, n.

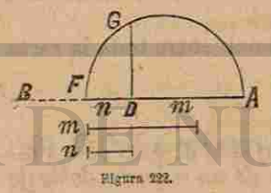
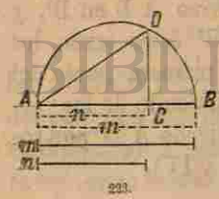


Figura 222.

1ª *Construccion.*—(Fig. 222). Sobre una recta indefinida A B se toman A D=m, y á continuacion D F=n; sobre A F como diámetro se traza una semicircunferencia y se levanta en D la perpendicular D G, la cual será la média porporcional entre A D y D F (538), que hemos tomado respectivamente iguales á m y n.



223.

2ª *Construccion.*—(Fig. 223). Tómese A B igual á la recta mayor m, sobre esta recta como diámetro trácese una semicircunferencia, llévese sobre el diámetro A B la parte A C=n, levántese en el punto C la perpendicular C D, y tirando la cuerda A D, ésta será la média proporcional pedida (539).

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

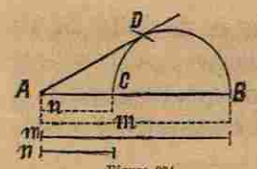


Figura 224.

3ª *Construccion.*—(Fig. 224). Tómese A B igual á la recta mayor m, llévese sobre ella A C = n, y sobre C B igual á la diferencia entre m y n trácese una semicircunferencia. Si tiramos A D tangente á esta semicircunferencia, esta recta A D será la media proporcional pedida (541).

II.—*Dividir una línea dada* A B (fig. 225) *en média y extrema razon.*

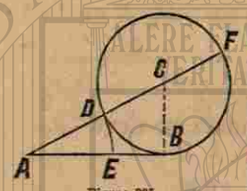


Figura 225.

Construccion.—Por el extremo B de la recta se levantará una perpendicular C B=$\frac{A B}{2}$; haciendo centro en C y con el rádio B C trácese una circunferencia de círculo; tírese la secante A F que pase por el centro del círculo, y si desde A como centro con el rádio A D se describe el arco D E, la recta A B quedará dividida en E en média y extrema razon.

Demostracion.—Habiendo tomado el rádio C B=$\frac{A B}{2}$, la tangente A B será igual al diámetro, y además es média proporcional entre A F y A D (541), por lo cual tendrémos

	A F : A B :: A B : A D
sustituyendo	A F : D F :: A B : A E
Dividiendo	A F-D F : D F :: A B-A E : A E
sustituyendo	A E : A B :: E B : A E
invirtiendo	A B : A E :: A E : E B

luego la parte mayor A E será média proporcional entre toda la recta y su parte menor.

III.—*Estando inscrito al círculo un polígono regular* A B C D, (fig. 226) *inscribir en el mismo círculo otro polígono de un número doble de lados, y encontrar el valor de uno de los lados del segundo polígono.*

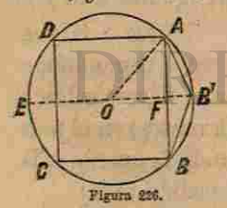


Figura 226.

Dividamos por la mitad el arco A B en B', y tiremos las cuerdas A B' y B B' éstas serán los lados del polígono pedido. La primera parte del problema quedará resuelta, si partiendo de los vértices del polígono llevamos la cuerda A B' por toda la circunferencia. (501—III y IV).

Para determinar el valor del lado A B' en funcion de A B y del rádio del círculo, se tiene (539):

$$A B'^2 = B' E \times B' F \ldots . (1)$$

por otra parte

$$B' F = B' O - O F = B' O - \sqrt{A O^2 - A F^2} \quad (532)$$

y como $A F = \frac{A B}{2}$

$$B' F = B' O - \sqrt{A O^2 - \frac{A B^2}{4}}$$

sustituyendo este valor en la ecuacion (1), se tiene:

$$A B'^2 = B' E \left(B' O - \sqrt{A O^2 - \frac{A B^2}{4}} \right)$$

si hacemos A B = a, A O = r, y A B' = x, sustituyendo se obtiene:

$$x^2 = 2 r \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \right) = 2 r^2 - 2 r \sqrt{\frac{4 r^2 - a^2}{4}}$$

y extrayendo raíz

$$x = \sqrt{2 r^2 - r \sqrt{4 r^2 - a^2}} \ldots . \quad (2)$$

cuya fórmula nos dará el valor de x.

En el caso de que el rádio sea igual á la unidad, la fórmula (2) se convertirá en

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}},$$

ó á fin de hacerla más propia para ser calculable por logaritmos (251—III).

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{(2+a)\,(2-a)}} \ldots . \quad (3)$$

las fórmulas (2) y (3) nos servirán para determinar el valor del lado del polígono regular de un número doble de lados de otro conocido, lo cual equivale á resolver este problema: *dada la cuerda* a *de un arco, determinar la cuerda* x *del arco de su mitad.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

IV.—*Dado el perímetro de un polígono regular inscrito de cierto número de lados, determinar la longitud del perímetro del polígono semejante circunscrito.*

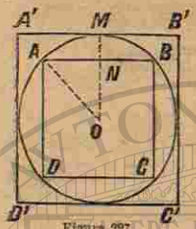


Figura 227.

Conocida la longitud del perímetro A B C D (fig. 227), y el número de lados, podrá fácilmente obtenerse el valor de un lado. Como además se conoce el rádio del círculo en que están inscritos y circunscritos los polígonos, el problema tiene por objeto determinar el perímetro A' B' C' D' en funcion del rádio, del perímetro y del lado del polígono inscrito.

Siendo los polígonos semejantes, si llamamos p el perímetro del polígono inscrito, P el del circunscrito, r el rádio O M = O A del círculo y a el lado A B, tendrémos: (523).

$$P : p :: O\,M : O\,N$$

de donde

$$P = \frac{r\,p}{O\,N}$$

en el triángulo rectángulo O N A se tiene: (532)

$$O\,N = \sqrt{O\,A^2 - A\,N^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

sustituyendo en la ecuacion anterior resulta

$$P = \frac{r\,p}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{r\,p}{\sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}}} = \frac{2\,r\,p}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

esto es (251—III) $$P = \frac{2\,r\,p}{\sqrt{(2r+a)\,(2r-a)}} \ldots\ldots [1]$$

si se tiene el rádio igual á la unidad esta fórmula se convierte en

$$P = \frac{2\,p}{\sqrt{(2+a)\,(2-a)}} \ldots\ldots [2]$$

Las fórmulas [1] y [2] en sus respectivos casos nos servirán para resolver el problema propuesto, sustituyendo por a y por p sus valores que son conocidos.

RAZON DEL DIAMETRO A LA CIRCUNFERENCIA.

545.—*El círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, infinitamente pequeños.*

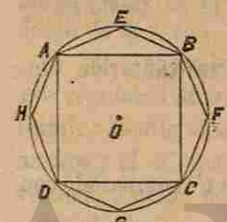


Figura 228.

Si consideramos el cuadrado A B C D inscrito en el círculo [fig. 228], tendrémos que por ser la línea recta la menor distancia entre dos puntos, cada uno de los lados del polígono será menor que el arco respectivo que subtende; luego la suma de los cuatro lados ó el perímetro A B C D será menor que la circunferencia.

Si dividimos en dos partes iguales cada uno de los arcos A B, B C, etc.; y tiramos las cuerdas correspondientes, resultará un octágono A E B F C..... regular inscrito, y tendrémos primero, que siendo A B < A E + E B [425], B C < B F + F C, C D < C G + G D etc.; si sumamos ordenadamente estas desigualdades resulta que *el perímetro del cuadrado es menor que el del octágono:* segundo, que siendo cada una de las cuerdas ó lados del octágono menor que el arco que subtenden, la suma de todas las cuerdas ó el *perímetro del octágono es menor que la circunferencia del círculo.*

Si nos imaginamos divididos los arcos A E, E B, etc., en dos partes iguales y tiradas cuerdas por los puntos de division, resultaria un polígono regular de 16 lados inscrito al círculo, y por un raciocinio idéntico al anterior infeririamos: que el *perímetro del polígono de 16 lados es mayor que el de 8, pero menor que la circunferencia del círculo.*

Luego cuando el número de lados del polígono regular inscrito haya aumentado considerablemente, su perímetro se habrá aproximado tambien considerablemente á la circunferencia, por lo que se considera como el límite hácia el cual se van aproximando más y más los perímetros de los poligonos regulares inscritos, hasta llegar á ser iguales el polígono y el círculo cuando el número de lados es infinito y la magnitud de cada lado infinitamente pequeña.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

IV.—*Dado el perímetro de un polígono regular inscrito de cierto número de lados, determinar la longitud del perímetro del polígono semejante circunscrito.*

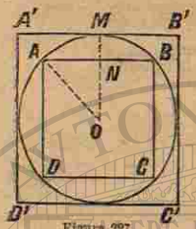


Figura 227.

Conocida la longitud del perímetro A B C D (fig. 227), y el número de lados, podrá fácilmente obtenerse el valor de un lado. Como además se conoce el rádio del círculo en que están inscritos y circunscritos los polígonos, el problema tiene por objeto determinar el perímetro A' B' C' D' en funcion del rádio, del perímetro y del lado del polígono inscrito.

Siendo los polígonos semejantes, si llamamos p el perímetro del polígono inscrito, P el del circunscrito, r el rádio O M = O A del círculo y a el lado A B, tendrémos: (523).

$$P : p :: O\,M : O\,N$$

de donde

$$P = \frac{r\,p}{O\,N}$$

en el triángulo rectángulo O N A se tiene: (532)

$$O\,N = \sqrt{O\,A^2 - A\,N^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

sustituyendo en la ecuacion anterior resulta

$$P = \frac{r\,p}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{r\,p}{\sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}}} = \frac{2\,r\,p}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

esto es (251—III) $$P = \frac{2\,r\,p}{\sqrt{(2r+a)\,(2r-a)}} \ldots\ldots [1]$$

si se tiene el rádio igual á la unidad esta fórmula se convierte en

$$P = \frac{2\,p}{\sqrt{(2+a)\,(2-a)}} \ldots\ldots [2]$$

Las fórmulas [1] y [2] en sus respectivos casos nos servirán para resolver el problema propuesto, sustituyendo por a y por p sus valores que son conocidos.

RAZON DEL DIAMETRO A LA CIRCUNFERENCIA.

545.—*El círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, infinitamente pequeños.*

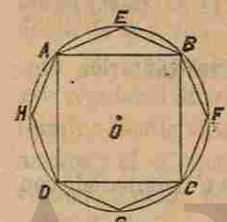


Figura 228.

Si consideramos el cuadrado A B C D inscrito en el círculo [fig. 228], tendrémos que por ser la línea recta la menor distancia entre dos puntos, cada uno de los lados del polígono será menor que el arco respectivo que subtende; luego la suma de los cuatro lados ó el perímetro A B C D será menor que la circunferencia.

Si dividimos en dos partes iguales cada uno de los arcos A B, B C, etc.; y tiramos las cuerdas correspondientes, resultará un octágono A E B F C..... regular inscrito, y tendrémos primero, que siendo A B < A E + E B [425], B C < B F + F C, C D < C G + G D etc.; si sumamos ordenadamente estas desigualdades resulta que *el perímetro del cuadrado es menor que el del octágono:* segundo, que siendo cada una de las cuerdas ó lados del octágono menor que el arco que subtenden, la suma de todas las cuerdas ó el *perímetro del octágono es menor que la circunferencia del círculo.*

Si nos imaginamos divididos los arcos A E, E B, etc., en dos partes iguales y tiradas cuerdas por los puntos de division, resultaria un polígono regular de 16 lados inscrito al círculo, y por un raciocinio idéntico al anterior infeririamos: que el *perímetro del polígono de 16 lados es mayor que el de 8, pero menor que la circunferencia del círculo.*

Luego cuando el número de lados del polígono regular inscrito haya aumentado considerablemente, su perímetro se habrá aproximado tambien considerablemente á la circunferencia, por lo que se considera como el límite hácia el cual se van aproximando más y más los perímetros de los poligonos regulares inscritos, hasta llegar á ser iguales el polígono y el círculo cuando el número de lados es infinito y la magnitud de cada lado infinitamente pequeña.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

546.—*Las circunferencias de los círculos son proporcionales á sus rádios y á sus diámetros.*

Como los perímetros de los polígonos semejantes son proporcionales á sus rádios, [543] y los círculos pueden considerarse como polígonos regulares de un número infinito de lados, si llamamos C, y C' dos circunferencias y r y r' sus rádios respectivos tendrémos:

$$C : C' :: r : r'$$

multiplicando por 2 los términos de la segunda razon

$$C : C' :: 2r : 2r'$$

que es lo que se debia demostrar.

547.—*La razon de la circunferencia al diámetro, es la misma en todos los círculos.*

Alternando medios en la última proporcion del párrafo anterior, tendrémos:

$$C : 2r :: C' : 2r'$$

en otro círculo cuya circunferencia sea C" y su radio r" comparado con el primero se tendria igualmente:

$$C : 2r :: C'' : 2r''$$

luego $$C : 2r :: C' : 2r' :: C'' : 2r''$$

y en general $$\frac{C}{2r} = \frac{C'}{2r'} = \frac{C''}{2r''} = \frac{C'''}{2r'''}$$

esta razon constante que existe en cualquier círculo entre la circunferencia y su diámetro se representa comunmente con la letra griega π, cuyo valor numérico vamos á ocuparnos de determinar.

548.—*Determinacion del valor numérico de la razon de la circunferencia al diámetro.*

El procedimiento que hemos emplado para determinar la relacion de magnitud entre dos líneas rectas, ó entre dos arcos de un mismo círculo ó de círculos iguales [482], como se ha visto se funda en la propiedad de poder descomponer las magnitudes que se comparaban en partes que podian sobreponerse; pero cuando comparamos una curva con una recta, ó arcos de círculos de rádios diferentes, como no es dable sobreponer los elementos de que constan estas magnitudes, tenemos que servirnos de un método indirecto para determinar con más ó ménos exactitud la relacion que entre ellas existe.

Acabamos de ver [545] que el perímetro de un polígono regular inscrito al círculo, es menor que la circunferencia, pero que miéntras mayor es el número de lados del polígono tanto mas se acerca al círculo. Por tanto, si en un círculo cuyo rádio sea la unidad, inscribimos un polígono y dividimos la longitud de su perímetro por el diámetro del círculo, obtendrémos un valor tanto más aproximado á $\pi = \frac{C}{2r}$ cuanto mayor sea el número de lados del polígono, pero siempre menor que π porque el perímetro del polígono es menor que el verdadero antecedente de la razon $\frac{C}{2r}$. Por otra parte, como la circunferencia del círculo es menor que el perímetro de un polígono regular circunscrito, si determinamos el valor de este perímetro y lo dividimos por el diámetro del círculo, obtendrémos un cuociente tanto más aproximado al valor de π, cuanto mayor sea el número de lados, pero siempre algo mayor que π, porque el perímetro del polígono circunscrito es mayor que el antecedente de la razon $\frac{C}{2r}$.

Si, pues, inscribimos y circunscribimos al mismo círculo dos polígonos regulares de un gran número de lados y semejantes, y tomamos el término medio entre la razon que existe entre cada uno de estos perímetros y el diámetro, este término medio se aproximará mucho á la verdadera razon de la circunferencia á su diámetro.

Fijadas así en general las bases de este procedimiento, para simplificar el cálculo, haremos las siguientes consideraciones. Supondrémos que el rádio del círculo es igual á la unidad. Además, como la misma razon hay entre todo el perímetro y el diámetro, que entre el semiperímetro y el rádio, siendo el rádio igual á 1 bastará calcular el valor del semiperímetro para tener en cada caso la razon del perímetro al diámetro. Partiendo del cuadrado inscrito calcularémos sucesivamente haciendo uso de la fórmula [3] del problema III del número 544, el valor del semiperímetro del polígono de 8 lados, de 16, 32, etc., lo que nos dará una razon algo aproximada de la circunferencia al diámetro, pero menor que la verdadera. En seguida calcularémos el semiperímetro del polígono circunscrito del mismo número de lados que el inscrito al fin, lo que nos dará un valor de la razon de la circunferencia al diámetro mayor que la verdadera; tomando el término medio entre estos valores se tendrá el que se busca con mucha aproximacion.

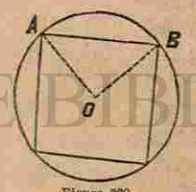


Figura 229.

Conforme á lo expuesto, si tomamos como base del procedimiento el cuadrado inscrito [fig. 229] y suponemos el rádio =1, en el triángulo rectángulo A O B el lado.

$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{2}$$

y extrayendo esta raíz

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

A B = 1'4142135

Conocido este lado deberémos multiplicarlo por 2, mitad del número de lados del cuadrado, á fin de obtener el semiperímetro del cuadrado $= 2\sqrt{2} = 2'8284271$.

Este será el primer valor, aunque muy poco aproximado de π.

Para obtener otro, sustituirémos en la fórmula.

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} \ldots . \quad [1]$$

del problema III del número 544 por a su valor $\sqrt{2}$, y tendremos para el lado del octágono regular

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

y multiplicado por 4, mitad del número de lados, se tendrá:

$$\text{semiperímetro del octágono} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 3'0614674$$

segundo valor aproximado de π.

Continuando el mismo procedimiento y sustituyendo en la fórmula citada, se encontraria sucesivamente el semiperímetro del polígono

$$\text{de 16 lados} = 8\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\text{de 32 lados} = 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$\text{de 64 lados} = 32\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$$

Es fácil en vista de estos resultados inferir la ley del modo de formacion de los siguientes, sin necesidad de sustituir en la fórmula [1] para obtener el semiperímetro de un polígono que conste de un número conocido de lados. Los resultados son los siguientes:

Núm. de lados.	Semiperímetros.
4	2'828 4271
8	3'061 4674
16	3'121 4451
32	3'136 5485
64	3'140 3311
128	3'141 2772
256	3'141 5138
512	3'141 5729
1024	3'141 5877
2048	3'141 5914
4096	3'141 5925

Conocido el valor del semiperímetro del polígono de 4096 lados inscrito al círculo, calcularémos el del circunscrito haciendo uso de la fórmula [2] del problema IV del párrafo 544.

$$P = \frac{2p}{\sqrt{(2+a)(2-a)}}$$

Si en ella sustituimos los valores correspondientes y efectuamos el cálculo, se tiene:

semiperímetro de 4096 lados circunscrito = 3'1415927

Idem de 4096 lados inscrito = 3'1415925

Suma = 6'2831852

El término medio será la mitad = 3'1415926

luego el valor numérico de la razon de la circunferencia al diámetro aproximado hasta las diez millonésimas, será:

$$\frac{C}{2r} = \pi = 3'1415926$$

En la práctica suele hacerse uso de otros dos valores aproximados de π.

El primero debido á Arquímedes es

$$\pi = \tfrac{22}{7}$$

y el 2° á Pedro Metius, es:

$$\pi = \tfrac{355}{113}$$

que es mucho más aproximado; nosotros, sin embargo, generalmente nos servirémos del de $\pi = 3'141593$.

549.—*Valor de la circunferencia en funcion del rádio ó del diámetro.*

Hemos visto que llamando π el valor numérico 3'141593 se tiene

$$\frac{C}{2r} = \pi$$

de donde $C = 2\pi r \ldots . [1]$

y como el diámetro $d = 2r$ sustituyendo resulta:

$$C = \pi d \ldots . [2]$$

Las fórmulas [1] y [2] nos sirven para calcular la circunferencia de un círculo conocido, su rádio ó su diámetro, y recíprocamente.

550.—PROBLEMAS DE LA CIRCUNFERENCIA.—I.—*Determinar la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo rádio es* 25 *metros.*

Sustituyendo en la fórmula

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$C = 2\,\pi\,r$$

se tiene $C = 2 \times 3'141593 \times 25 = 157'07965$

II.—*Siendo la circunferencia de un círculo de* $339'292044$ *determinar la longitud del diámetro.*

En la fórmula $C = \pi\,d$

despejaremos á $d = \frac{C}{\pi}$

sustituyendo $d = \frac{339'292044}{3'141593} = 108$ metros.

III.—*Determinar la longitud de un arco de* 48° *en un círculo cuyo rádio es de* 10 *metros.*

La circunferencia de este círculo conforme á la fórmula

$$C = 2\,\pi\,r$$

es $C = 2 \times 3'141593 \times 10 = 62'83186$

una simple proporcion nos dará la longitud del arco de 48°

$$360° : 48° :: 62'83186 : x = 8'37758$$

IV.—*Se quiere saber cuál será el número de grados de un arco de círculo, cuya longitud es de* 52 *metros y cuyo rádio es igual á* 15.

La circunferencia de este círculo será:

$$C = 2\,\pi\,r$$

sustituyendo $C = 2 \times 3'141593 \times 15 = 124'247790$

una proporcion nos dará el número de grados del arco

$$124'247790 : 52 :: 360° : x = 150° - 40'$$

con poca diferencia.

V.—*Determinar la magnitud de un arco de* 60° *en partes del rádio.*

En este caso se supone el rádio =1. La circunferencia será

$$C = 2\,\pi\,r$$

sustituyendo $C = 2 \times 3'141593 \times 1 = 6'283186$

estableciendo la proporcion:

$$360° : 60° :: 6'283186 : x = 1'047198$$

Esto es, siendo 1 el rádio, la longitud del arco de 60° será 1'047198 millonésimas.

SEGUNDA PARTE.

SUPERFICIES.

Preliminares.

551.—*Superficie es la extension en longitud y latitud prescindiendo del espesor ó grueso.*

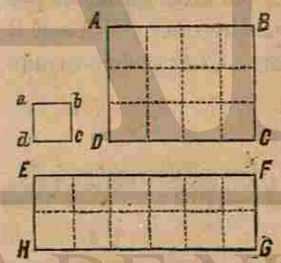


Figura 230.

La superficie de una figura es la extension comprendida entre las líneas que la limitan. Del mismo modo que la medida de una línea se obtiene refiriendo su longitud al número de veces que contiene otra línea escogida por unidad, para valuar una superficie es necesario determinar cuántas veces contiene la unidad de superficie. Al tratar del sistema de pesos y medidas (182 y 185) hemos visto que la unidad superficial es un cuadrado, y si representando esta unidad por a b c d (fig. 230) quisiéramos estimar la área ó fuperficie del rectángulo A B C D, bastaria averiguar cuántas veces el cuadrado está contenido en el rectángulo. En la figura que hemos tomado por ejemplo, diriamos que la área del rectángulo es de 12 medios centímetros cuadrados, porque 12 veces cabe la unidad superficial escogida, que es el medio centímetro cuadrado, en dicho rectángulo.

Se llaman figuras equivalentes las que tienen superficies iguales, y como se ha visto, figuras iguales son aquellas que sobreponiéndolas

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$C = 2\,\pi\,r$$

se tiene $C = 2 \times 3'141593 \times 25 = 157'07965$

II.—*Siendo la circunferencia de un círculo de* $339'292044$ *determinar la longitud del diámetro.*

En la fórmula $C = \pi\,d$

despejaremos á $d = \frac{C}{\pi}$

sustituyendo $d = \frac{339'292044}{3'141593} = 108$ metros.

III.—*Determinar la longitud de un arco de* 48° *en un círculo cuyo rádio es de* 10 *metros.*

La circunferencia de este círculo conforme á la fórmula

$$C = 2\,\pi\,r$$

es $C = 2 \times 3'141593 \times 10 = 62'83186$

una simple proporcion nos dará la longitud del arco de 48°

$$360° : 48° :: 62'83186 : x = 8'37758$$

IV.—*Se quiere saber cuál será el número de grados de un arco de círculo, cuya longitud es de* 52 *metros y cuyo rádio es igual á* 15.

La circunferencia de este círculo será:

$$C = 2\,\pi\,r$$

sustituyendo $C = 2 \times 3'141593 \times 15 = 124'247790$

una proporcion nos dará el número de grados del arco

$$124'247790 : 52 :: 360° : x = 150° - 40'$$

con poca diferencia.

V.—*Determinar la magnitud de un arco de* 60° *en partes del rádio.*

En este caso se supone el rádio =1. La circunferencia será

$$C = 2\,\pi\,r$$

sustituyendo $C = 2 \times 3'141593 \times 1 = 6'283186$

estableciendo la proporcion:

$$360° : 60° :: 6'283186 : x = 1'047198$$

Esto es, siendo 1 el rádio, la longitud del arco de 60° será 1'047198 millonésimas.

SEGUNDA PARTE.

SUPERFICIES.

Preliminares.

551.—*Superficie es la extension en longitud y latitud prescindiendo del espesor ó grueso.*

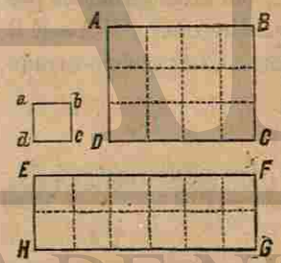


Figura 230.

La superficie de una figura es la extension comprendida entre las líneas que la limitan. Del mismo modo que la medida de una línea se obtiene refiriendo su longitud al número de veces que contiene otra línea escogida por unidad, para valuar una superficie es necesario determinar cuántas veces contiene la unidad de superficie. Al tratar del sistema de pesos y medidas (182 y 185) hemos visto que la unidad superficial es un cuadrado, y si representando esta unidad por a b c d (fig. 230) quisiéramos estimar la área ó fuperficie del rectángulo A B C D, bastaria averiguar cuántas veces el cuadrado está contenido en el rectángulo. En la figura que hemos tomado por ejemplo, diriamos que la área del rectángulo es de 12 medios centímetros cuadrados, porque 12 veces cabe la unidad superficial escogida, que es el medio centímetro cuadrado, en dicho rectángulo.

Se llaman figuras equivalentes las que tienen superficies iguales, y como se ha visto, figuras iguales son aquellas que sobreponiéndolas

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

coinciden en todos sus puntos. Los rectángulos A B C D y E F G H son equivalentes porque tienen la misma superficie; pero, como se ve, no son iguales.

552.—Para determinar las áreas es de un uso frecuente escoger en los triángulos, y en los paralelógramos uno de sus lados como *base* de la figura, y se llama altura la perpendicular bajada sobre este lado del vértice ó del lado opuesto.



Figura 231.

Así (fig. 231) tomando A B por *base* *la altura* del triángulo es C D. En el triángulo E F G, considerando E F como base, la altura es G H, la cual, como se ve, cae sobre la prolongacion de la base. Por último, en el paralelógramo J O, la base es J K y la altura M L, la cual puede bajarse desde cualquier punto del lado opuesto á la base.

553.—*Un paralelógramo A B C D* [fig. 232] *y un rectángulo A B E F que tienen la misma base A B é igual altura, son equivalentes.*

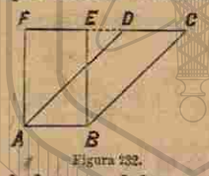


Figura 232.

Siendo la altura del paralelógramo igual á la perpendicular E B, si prolongamos F E pasará por D C, y ejecutándolo resultarán dos triángulos A F D y B E C que serán iguales, [385] por tener el ángulo F A D = E B C, por estar formados por lados paralelos, y tener sus vértices en la misma direccion y F A=E B y A D=B C por lados opuestos de paralelógramo. Una vez demostrado que el triángulo A F D=B E C

si sucesivamente restamos del trapecio A B C F cada uno de estos triángulos tendremos:

A B C F—A F D=A B C E—B E C

luego A B C D=A B E F en superficie, que es lo que se queria demostrar.

554.—*Dos paralelógramos de igual base é igual altura son equivalentes,* por ser cada uno de ellos equivalente á un rectángulo de la misma base y altura.

555.—*Un triángulo cualquiera A B C* [fig. 233] *es equivalente á la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura.*

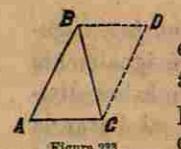


Figura 233.

Considerando A C como la base del triángulo, por el vértice B del ángulo opuesto tírese una paralela B D á A C, y por C una paralela C D á A B, resultará el paralelógramo A B D C de la misma base y altura que el triángulo; pero como los triángulos A B C y B C D son iguales (386), por tener B C comun, B D=A C y A B=C D por lados opuestos de paralelógramo, se infiere que el triángulo A B C será la mitad del paralelógramo que tiene la misma báse y altura que él.

556.—*Dos triángulos que tienen sus bases y alturas respectivamente iguales, son equivalentes;* porque cada uno de los triángulos es la mitad de paralelógramos equivalentes entre sí.

557.—*Dos rectángulos de la misma base son proporcionales á sus alturas.*

Puede suceder que las alturas sean *conmensurables* ó *inconmensurables* entre sí.

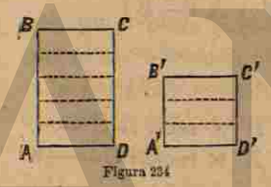


Figura 234

1° Si (fig. 234) se tienen los rectángulos A B C D y A' B' C' D' de bases iguales, A D =A' D' y cuyas alturas A B y A' B' sean *conmensurables,* de modo que, por ejemplo, dividiendo A' B' en tres partes iguales, cada una de éstas puede llevarse sobre A B cinco veces, en este supuesto resultará

A' B' : A B :: 3 : 5

Si por los puntos de division tiramos paralelas respectivamente á las bases A' D' y á A D quedará dividido el rectángulo A' C' en tres rectángulos, y el rectángulo A C en cinco rectángulos iguales todos entre sí por tener la misma base y altura, luego

rectángulo A' C' : rectángulo A C :: 3 : 5

suprimiendo la razon comun de estas dos proporciones, se tiene por último:

rectángulo A' C' : rectángulo A C :: A' B' : A B

que es lo que se tenia que demostrar.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

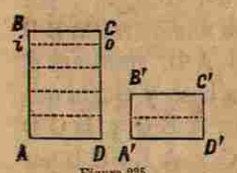


Figura 235.

2º Si las alturas A B y A' B' son *inconmensurables* (fig. 235) el teorema será igualmente cierto. Supongamos que despues de haber dividido A' B' en dos partes iguales, al llevar la magnitud de estas partes sobre A B resulte esta altura dividida en cuatro partes de A á i, quedando una resta i B, la que forzosamente será menor que una de las divisiones. Tirando por los puntos de division paralelas, quedarán divididos el rectángulo A' C' en dos rectángulos, y el rectángulo A C en cuatro rectángulos iguales entre sí, mas otro i C menor que los demas.

Considerando las porciones conmensurables, tendrémos conforme á lo que acabamos de demostrar:

$$\text{rectángulo A' C' : rectángulo A o :: A' B' : A i}$$

Como rect. A o = rect. A C — rect. i C, y A i = A B — B i sustituyendo se tiene:

$$\text{rect. A' C' : rect. A C — rect i C :: A' B' : A B — B i}$$

multiplicando entre sí los medios y los extremos

$$\text{A B} \times \text{rect. A' C'} - \text{B i} \times \text{rect. A' C'} = \text{A' B'} \times \text{rect. A C} - \text{A' B'} \times \text{rect. i C}$$

trasladando:

$$\text{A B} \times \text{rect. A' C'} - \text{A' B'} \times \text{rect. A C} = \text{B i} \times \text{rect. A' C'} - \text{A' B'} \times \text{rect. i C}$$

Una vez establecida esta ecuacion, vamos á demostrar que A B × rectángulo A' C' no puede ser desigual á A' B' × rectángulo A C. Si lo fueran, habria entre estos dos productos, cuyos factores todos son constantes, una diferencia d fija ó independiente de la magnitud arbitraria de las partes en que se divida A' B' y se tendria:

$$\text{A B} \times \text{rect. A' C'} - \text{A' B'} \times \text{rect. A C} = \text{d.}$$

y por lo mismo $\text{B i} \times \text{rect. A' C'} - \text{A' B'} \times \text{rect. i C} = \text{d}$.

Si en vez de dividir A' B' en *dos* partes iguales, la dividiéramos en 20 ó en 2,000, y llevando la magnitud de estas partes sobre A B, por los puntos de division tiráramos paralelas, resultaria que la recta B i y el rectángulo i C podrian hacerse sucesivamente más y más pequeños,

y los productos de que son factores podrian ir disminuyendo tanto como se quisiera. Así es, que siendo d constante por expresar la diferencia entre cantidades fijas: A B × rect. A' C' y A' B' × rect. A C, llegaria á tenerse, aumentando el número de divisiones de A' B', en la ecuacion:

$$\text{B i} \times \text{rect. A' C'} - \text{A' B'} \times \text{rect. i C} = \text{d}$$

pudiendo ser $\text{B i} < \frac{\text{A' B'}}{2}$, $\text{B i} < \frac{\text{A' B'}}{2{,}000}$ ó una fraccion tan pequeña como se quiera, llegaria á tenerse B i × rect. A' C' < d; pero como no puede ser el minuendo menor que la resta, tampoco podrémos suponer desiguales los productos A B × rect. A' C' y A' B' × rect. A C, y siendo iguales se tendrá la proporcion

$$\text{rect. A' C' : rect. A C :: A' B' : A B}$$

que es lo que se debia demostrar.

558.—Como en un rectángulo puede tomarse la altura como base y ésta por altura, se infiere que *las áreas de los rectángulos que tienen sus alturas iguales, son proporcionales á sus bases.*

559.—*Dos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

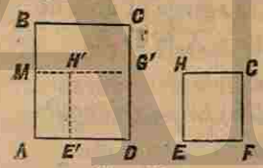


Figura 236.

Sean A B C D y E F G H (fig. 236) dos rectángulos cualesquiera. Si suponemos sobrepuesto el rectángulo E G de manera que coincida el ángulo recto F con el D, tomará la posicion E' D G' H'. Si prolongamos el lado G' H' hasta M, se formará el paralelógramo A D G' M de la misma base que A C y de igual altura que D H'. Como el rectángulo D M y el A C tienen la misma base A D, serán proporcionales á sus alturas, y por tanto

$$\text{rect. A C : rect. D M :: A B : D G'} \ldots . [\text{m}]$$

Los rectángulos D M y D H' tienen la misma altura D G', luego serán proporcionales á sus bases, como lo expresa la siguiente proporcion:

$$\text{rect. D M : rect. D H' :: A D : D E'} \ldots . [\text{n}]$$

multiplicando ordenadamente las proporciones [m] y [n], y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$\text{rect. A C : rect. D H' :: A D} \times \text{A B : D E'} \times \text{D G'}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

sustituyendo

$$\text{rect. AC} : \text{rect. FH} :: \text{AD} \times \text{AB} : \text{FE} \times \text{FG}$$

que es lo que se tenia que demostrar.

560.—Problemas de figuras equivalentes.—I.—*Trasformar el polígono A B C D E* (fig. 237) *en otro equivalente que tenga un lado ménos.*

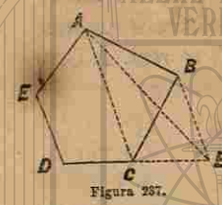


Figura 237.

Construccion.—Tírese la diagonal A C: por el vértice B del triángulo A B C que tiene esta diagonal por base, tírese B B' paralela á A C; si despues prolongamos el lado D C hasta su interseccion en B', con la paralela B B' y trazamos la recta A B', se tendrá el polígono A B' D E de un lado menos y equivalente á A B C D E.

Demostracion.—Tomando A C como base de los triángulos A C B y A C B', por estar los vértices opuestos B y B' sobre la misma paralela, tendrán sus alturas iguales; luego (556) los triángulos A C B y A C B' serán equivalentes. Si á cada uno de ellos se agrega el área de la figura A C D E, resultará A B C D E equivalente á A B' D E.

II.—*Trasformar un polígono A B C D E* (fig. 238) *en un triángulo equivalente.*

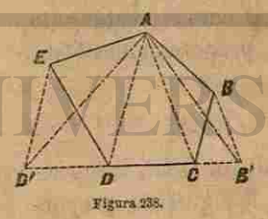


Figura 238.

Ejecutando la construccion del problema anterior, trasformarémos el pentágono A B C D E en el cuadrilátero equivalente A B' D E. En seguida, tirando la diagonal A D, la paralela E D' y la recta A D', trasformarémos el cuadrilátero A B' D E en el triángulo A B' D', el cual resolverá el problema, supuesto que es equivalente al cuadrilátero y éste al pentágono. Del mismo modo podrá reducirse á triángulo un polígono de mayor número de lados.

III.—*Trasformar un polígono A B C D* (fig. 239) *en otro equivalente que tenga un lado más.*

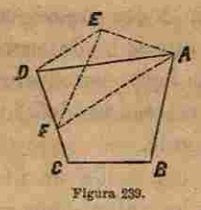


Figura 239.

Construccion.—Desde el vértice A tírese una recta indefinida A E que quede fuera del polígono y otra A F que toque el lado opuesto D C en un punto cualquiera F: por el vértice D del triángulo A F D tírese D E paralela á A F, y reuniendo los puntos E y F se tendrá el polígono A B C F E pedido.

Demostracion.—Los triángulos A F D y A F E tienen la misma base A F, y estando los vértices opuestos D y E sobre una paralela, tendrán alturas iguales, y por lo mismo serán equivalentes (556). Si á cada uno de los triángulos equivalentes A F D y A F E se agrega la parte comun A F C B resultará el polígono A B C D equivalente á A B C F E que tiene un lado más.

VALUACION DE LAS SUPERFICIES.

561.—Hemos dicho que para medir ó valuar la área de una figura, es necesario determinar el número de veces que contiene la área de otra figura escogida como término de comparacion, y que la unidad de superficie es un cuadrado cuyo lado es la unidad lineal.

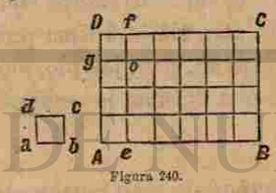


Figura 240.

Así, por ejemplo, si queremos medir la área del rectángulo A B C D (fig. 240), la compararémos á la del cuadrado a b c d, tomado como unidad, y determinarémos cuántas veces la unidad lineal a b, lado del cuadrado, está contenida en la base A B del rectángulo (6 veces en el caso que consideramos). Si por los puntos de division tiramos rectas perpendiculares á la base, resultarán 6 bandas ó rectángulos cuya base es la unidad y cuya altura es la del rectángulo A B C D. En seguida llevarémos la unidad lineal a d, lado del cuadrado, cuantas veces se pueda sobre la altura A D del rectángulo (4 en nuestro ejemplo), y tirando por los puntos de division paralelas á la base, resultará el rectángulo A B C D dividido en 6 bandas, cada una de las

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

cuales contiene 4 cuadrados, ó en junto $6\times4=24$ unidades superficiales. Se vé, pues, que para valuar la área del rectángulo, se ha determinado el número de unidades lineales de que constan su base y su altura, y el producto de estos dos números expresa cuántas veces la unidad superficial a b c d está contenida en el repetido rectángulo.

Como puede suceder que la unidad lineal no esté contenida un número cabal de veces en la base y altura del rectángulo, valuarémos su área, fundándonos (559) en que dos rectángulos cualesquiera, son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas. Así, en la misma figura 240, se tiene:

$$A\,B\,C\,D : a\,b\,c\,d :: A\,B\times A\,D : a\,b\times a\,d$$

y como a b c d es la unidad superficial, y sus dos lados son iguales entre sí é iguales á la unidad, sustituyendo resulta:

$$A\,B\,C\,D : 1 :: A\,B\times A\,D : 1\times 1$$

luego despejando, resulta la área de

$$A\,B\,C\,D = A\,B\times A\,D$$

por lo que en general se dice que *la área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura;* pero es preciso tener presente que en este modo abreviado, y tal vez impropio de expresar la superficie de un rectángulo, los lados A B y A D son los números que indican las veces que cada lado contiene á la unidad lineal, y que la área A B C D debe estar expresada en unidades superficiales, como centímetros cuadrados, metros cuadrados, pulgadas cuadradas, etc. En la última proporcion los términos de la primera razon expresarán, por ejemplo, metros cuadrados, y los factores de los términos que forman la segunda razon, indicarán metros lineales.

562.—En el caso de que los dos lados del rectángulo sean iguales, la figura será *un cuadrado* y *su área* estará *medida por la 2ª potencia ó el cuadrado de uno de sus lados.* De esto proviene que se llame *cuadrado* á la segunda potencia de un número.

563.—*La área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura,* supuesto que (553) el paralelógramo es equivalente á un rectángulo de su misma base y altura.

564.—*La área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura,* en razon de que (555) es equivalente á la mitad de un paralelógramo de igual base y altura.

565.—*La área de un trapecio es igual al producto de la semisuma de las bases paraletas por la altura.*

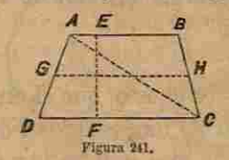


Figura 241.

Sea el trapecio A B C D (fig. 241). Tirando la diagonal A C, quedará descompuesto en dos triángulos A B C y A D C, que tendrán la misma altura E F, y si tomamos por bases respectivamente los lados paralelos del trapecio, se tiene:

área del triángulo $A\,B\,C = \frac{1}{2}\,A\,B\times E\,F$

área del triángulo $A\,D\,C = \frac{1}{2}\,D\,C\times E\,F$

sumando, el trapecio $A\,B\,C\,D = \frac{A\,B + D\,C}{2}\times E\,F$

que es lo que se tenia que demostrar.

Como $\frac{A\,B + D\,C}{2} = G\,H$ (459) recta tirada á distancias iguales de las bases, puede decirse que *la área de un trapecio es igual al producto de su altura por la recta que une los medios de los lados no paralelos.*

566.—*La área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de su perímetro por el rádio recto.*

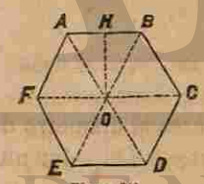


Figura 242.

Sea el polígono A B C D E F (fig. 242); si desde el centro O se tiran los rádios oblícuos O A, O B, O C.... resultarán tantos triángulos iguales como lados tenga el polígono regular.

La área de uno de estos triángulos

$$A\,O\,B = \tfrac{1}{2}\,A\,B\times H\,O$$

luego si multiplicamos los dos miembros de esta ecuacion por 6, número de los lados del polígono, se tendrá:

área del polígono, $A\,B\,C\,D.... = \frac{1}{2}\times 6\,A\,B\times H\,O$

pero 6 veces un lado A B es el perímetro, y H O es el rádio recto, si llamamos A la área del polígono, p su perímetro y r el rádio recto, en general se tendrá:

$$A = \tfrac{1}{2}\,p\,r$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

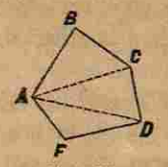


Figura 243.

567.—*La área de un polígono irregular* A B C D E (fig. 243) *es igual á la suma de las áreas de los triángulos que lo forman.* Comunmente se descompone en triángulos el polígono tirando diagonales desde uno de los vértices, y en seguida se determina el valor de la base y altura de cada uno de ellos.

568.—Expresiones del área del círculo.—Supuesto que el círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados extremadamente pequeños, *la área del círculo será igual á la mitad del producto de su circunferencia por el radio.* Así es que, si representamos por s la superficie de un círculo, por c su circunferencia y por r el rádio, se tiene:

$$s = \tfrac{1}{2}\, c \times r \ldots\ [1]$$

sustituyendo por c su valor [549] en funcion de π

$$c = 2\,\pi\, r$$

resulta

$$s = \pi\, r^2 \ldots\ [2]$$

de cuya fórmula se hace un uso muy frecuente.

Si llamamos d el diámetro del círculo y sustituimos por r su valor: $\frac{d}{2}$ en la ecuacion [2] se tiene:

$$s = \pi \frac{d^2}{4} \ldots\ [3]$$

de cuya fórmula nos podrémos servir cuando se conozca el diámetro de un círculo, para determinar su área. Ya hemos visto que el valor numérico de π es de 3'141593 aproximadamente.

569.—Se llama *corona* la porcion de superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.

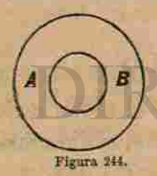


Figura 244.

La área de la corona A B [fig. 244] es igual á la del círculo mayor, ménos la del círculo menor. Si llamamos S la área del primero y R su rádio, s la área del círculo menor y r su rádio, tendremos [568]:

$$S = \pi\, R^2$$

$$s = \pi\, r^2$$

luego la corona $= \pi\,[R^2 - r^2] = \pi\,[R + r]\,[R - r]$

de esta expresion resulta que *la área de una corona es igual al producto de la razon de la circunferencia al diámetro por la suma y por la diferencia de los rádios de los círculos que la forman.*

570.—Se llama sector circular la porcion A D B C de un círculo comprendida entre dos rádios y el arco. Si el arco A B [fig. 245] se divide en dos partes iguales, A D y D B, y tiramos el rádio C D, resultarán dos sectores A D C y D B C iguales entre sí, porque si dobláramos la figura por C D, los arcos A D y D B coincidirian por ser iguales, C B se sobrepondria á C A por ser iguales tanto los ángulos B C D y D C A, como los rádios C B y C A. Si en vez de dividir el arco A B en dos partes iguales, lo dividiéramos en tres, cuatro, etc., partes iguales, resultarian tres, cuatro, etc., sectores iguales entre sí, por serlo las partes de que constan; luego *los sectores de un mismo círculo son proporcionales á los arcos.*

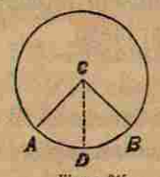


Figura 245.

Por tanto, si comparamos la área del sector C A D B con la de todo el círculo, tendrémos:

sector C A D B : área del círculo :: arco A B : circunferencia del círculo:

sustituyendo: sector C A D B : $\pi\, r^2$ :: arco A B : $2\,\pi\, r$

$$\text{de donde} \qquad \text{sector C A D B} = \frac{\text{arco A B} \times \pi\, r^2}{2\,\pi\, r}$$

$$\text{y reduciendo} \qquad \text{sector C A D B} = \frac{\text{arco A B} \times r}{2}$$

luego *la área del sector circular es igual á la mitad del producto del arco rectificado por el rádio.*

571.—*La área de un trapecio circular* A B D E [fig. 246] *es igual á la semisuma de los arcos* A B *y* D E, *por la diferencia* A E *de los rádios.*

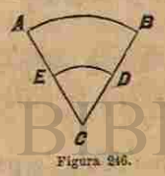


Figura 246.

Se llama trapecio circular la figura formada por dos arcos A B y D E de círculos concéntricos, y las porciones A E y B D de los rádios.

La área del trapecio circular, como puede verse en la figura, es igual á la del sector A B C ménos la del sector E D C.

Si hacemos el arco A B = A, el E D = a, A C = R y E C = r, tendrémos [570]:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\text{trapecio A B D E} = \frac{A.R}{2} - \frac{a\,r}{2} = \frac{AR - a\,r}{2} \ldots\ [1]$$

por otra parte, como el ángulo A C B está medido en los dos círculos respectivamente por los arcos A B y E D, tendrán el mismo número de grados, y por tanto serán proporcionales á sus rádios; luego

$$A : a :: R : r$$

de donde $$a\,R = A\,r \ldots\ [2]$$

Así es que la ecuacion [1] no se alterará si al numerador del 2º miembro le agregamos a R y le quitamos A r. Así pues,

$$\text{trapecio A B D E} = \frac{A\,R - a\,r + a\,R - A\,r}{2}$$

$$= \frac{A\,[R - r] + a\,[R - r]}{2} = \frac{[A + a]\,[R - r]}{2}$$

$$\text{luego, trapecio A B D E} = \frac{A + a}{2}\,[R - r]$$

que es lo que expresa el teorema.



Figura 247.

572.—*La área del segmento* A O B A [fig. 247] *es igual á la área del sector* A O B C *ménos la del triángulo* A B C.

Si consideramos A C como la base del triángulo A B C, y bajamos la perpendicular B D á este lado, B D será la altura del triángulo, y esta recta B D, será la mitad de B B' cuerda del arco doble de A O B.

La área del sector $\quad A\,O\,B\,C = \frac{1}{2}\,A\,C \times A\,O\,B$

la del triángulo $\quad A\,B\,C = \frac{1}{2}\,A\,C \times B\,D$

restando: área del segmento $\quad A\,O\,B\,A = \frac{1}{2}\,A\,C\,[A\,O\,B - B\,D]$

por esto se dice que *al área del segmento es igual á la mitad del producto del rádio por la diferencia entre el arco del segmento y la mitad de la cuerda del arco doble.*

Conociendo A B, se determina la cuerda B B' del arco doble despejando á a en la fórmula $x = \sqrt{2\,r^2 - r\sqrt{4\,r^2 - a^2}}$ del problema III

del núm. 544, en la que x representa á A B, y B B' está representada por a.

Así pues $\quad B\,B' = a = \sqrt{4\,r^2 - \left(\frac{2\,r^2 - x^2}{r}\right)^2}$

573.—Problemas de valuacion de áreas.—I.—*Determinar el lado de un cuadrado equivalente á un triángulo conocido.*

Si llamamos a la altura y b la base del triángulo, su área será $\frac{a\,b}{2}$, y si representamos por x el lado del cuadrado buscado, su área será x^2; pero como debe ser

$$x^2 = \frac{a\,b}{2}$$

el valor de x puede determinarse sustituyendo los valores de a y de b en esta ecuacion, ó bien buscando gráficamente (544 — I) una média proporcional entre las líneas que representen la altura y la mitad de la base del triángulo, supuesto que de la ecuacion resulta:

$$a : x :: x : \tfrac{b}{2}$$

II.—*Determinar un triángulo equivalente á un polígono regular dado.*

Como la área del polígono es igual á la mitad del producto de su perímetro por el rádio recto, y la del triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura, bastará construir un triángulo que tenga por base el perímetro del polígono, y por altura el rádio recto, para resolver el problema.

III.—*Determinar un cuadrado equivalente á un círculo.*

Dado un círculo, conocerémos su rádio, y para resolver el problema hay que buscar la magnitud del lado del cuadrado. La área del círculo es igual á la mitad del producto de su circunferencia por el rádio, y como la del cuadrado es igual á la 2ª potencia de su lado, para determinar su magnitud bastará encontrar una média proporcional entre la mitad de la circunferencia y el rádio, bien sea calculándola ó construyéndola gráficamente, supuesto que si llamamos c la circunferencia del círculo, r su rádio y x el lado del cuadrado, debe tenerse:

$$\frac{c \times r}{2} = x^2$$

de donde $\quad \frac{c}{2} : x :: x : r$

Podemos resolver este problema de otro modo.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La área del círculo es: $S = \pi r^2$

La del cuadrado es $S = x^2$

supuesto que deben ser equivalentes, se tiene: $\pi r^2 = x^2$

Despejando á x resulta: $x = \sqrt{\pi r^2}$

Como la razon de la circunferencia al diámetro no ha podido expresarse exactamente por ningun valor numérico, tampoco se puede determinar con entera precision, ni la circunferencia ni la superficie del círculo; así es que solo puede resolverse aproximadamente este problema, que se llama de la cuadratura del círculo.

IV. *Determinar la área de un triángulo cuya base es de* 2025'56 *métros, y cuya altura es de* 108'25 *metros.*

La área del triángulo es igual á la mitad del producto de la base por la altura, así es que en el caso que consideramos, se tiene:

$$\text{Area} = \frac{b \times a}{2} = \frac{^{m.}2025'56 \times 108'25}{2} = 109633'4350^{m.\,cd.}$$

Así, pues, la área del triángulo es de 109633 metros cuadrados, y 4350 diezmilésimos de metro cuadrado.

Como en este caso las dimensiones de la figura estaban expresadas en metros lineales, la superficie resultó en metros cuadrados y fracciones decimales de metro cuadrado.

Si el valor obtenido en metros cuadrados lo quisiéramos trasformar en *aras* conforme á lo explicado en aritmética (183), bastaria dividir el número obtenido por 100. Así

$$109633'4350^{m.\,cd.} = 1096'334350^{aras.}$$

Si las aras se quieren reducir á hectáras, se dividirán igualmente por 100, de modo que

$$109633'4350^{m.\,cd.} = 1096'33435^{aras.} = 10'9633435^{hectaras.}$$

Por el contrario, si los metros cuadrados se quieren reducir sucesivamente á decímetros cuadrados y estos á centímetros cuadrados, se tiene:

$$109633'4350^{m.\,cd.} = 10963343'50^{decim.\,cd.} = 1096334350^{centim.\,cd.}$$

V.—*Los lados contiguos de un rectángulo son de* 8500 *metros y de* 2556 *metros. Se quiere saber cnál es la área de este rectángulo expresada en miriaras.*

Siendo la área de un rectángulo igual al producto de su base por su altura se tiene:

$$\text{Area del rect.} = 8500^{m} \times 2556^{m} = 21726000^{m.\,cd.} = 21'726^{miriaras.}$$

VI.—*¿Cuál seria el lado de un cuadrado equivalente á una caballería de tierra que contiene* 609408 *varas cuadradas?*

Llamando x el lado del cuadrado buscado debe tenerse

$$x^2 = 609408 \text{ varas cuadradas}$$

luego $x = \sqrt{609408} = 780$ varas 64 centésimas.

VII.—*Se quiere saber cuál es la área expresada en centímetros cuadrados, de un paralelógramo que tiene* $3'2^{m}$ *de base y* $0'85^{m}$ *de altura.*

Como la área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura, se tiene:

$$\text{Area del paralelógramo} = 3'2^{m} \times 0'85^{m} = 2'72^{m.\,cd.} = 27200^{cent.\,cd.}$$

VIII.—*¿Cuál es el número de aras que tiene un trapecio, cuyas bases son de* $16'5^{m}$ *y* $28'22^{m}$, *y cuya altura es de* 9 *metros?*

Como la área de un trapecio es igual al producto de la semisuma de sus bases por su altura, tendrémos:

$$\text{Area del trapecio} = \frac{16'5^{m} \times 28'22^{m}}{2} \times 9 = 201'24^{m.\,cd.} = 2'0124^{aras.}$$

IX.—*Calcular la área de un exágono regular cuyo lado es de* $32'2^{m}$.

Como la área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de su perímetro por el radio recto, es preciso averiguar la longitud de estas dos líneas.

El perímetro del exágono regular será igual á $32'2^{m} \times 6 = 193'20^{m}$.

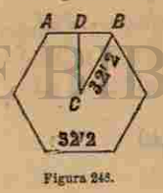


Figura 248.

En cuanto al radio recto, bastará observar en la (fig. 248) que si desde el centro del polígono se baja la perpendicular C D y el radio oblícuo C B, resultará el triángulo C B D cuya hipotenusa C B = A B $= 32'2$ [497], y cuyo cateto $B D = \frac{32'2}{2}$, luego (532)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$C\,D^2 = 32'2^2 - \frac{32'2^2}{4} = 777'63$$

y $$C\,D = \sqrt{777'63} = 27'88$$

La área del exágono será $= \frac{1}{2}\,(193'20 \times 27'88) = 2693'208$ m. cd.

X.—*Calcular la área de un círculo cuyo radio es de* $6325'28$ m.

Sustituyendo en la fórmula [568] $s = \pi\, r^2$
se tiene: $s = 3'141593 \times (6325'28)^2$
haciendo el cálculo por logaritmos:

logarit.	3'141593.....	0'497 1499
logarit.	6325'28	3'801 0798
repitiéndolo		3'801 0798
		8'099 3095 = log. 125 692 551

Así pues, la área del círculo es de 125 692 551 metros cuadrados.

XI.—*Determinar el diámetro de un círculo cuya área es de* 45238'9342 *varas cuadradas.*

La fórmula (3) del número 568 da

$$s = \frac{\pi\, d^2}{4}$$

despejando á $$d = \sqrt{\frac{4s}{\pi}}$$

sustituyendo $$d = \sqrt{\frac{4 \times 45238'9342}{3'141593}}$$

tomando los logaritmos.

Logaritmo 4.....	0'602 0600
logaritmo 45238'9342.....	4'655 5123
	5'257 5723
menos log. 3'141593...	0'497 1499
	4'760 4224
	$\frac{1}{2}$ 2'380 2112 = log. 240

luego el diámetro será de 240 varas.

XII.—*Se quiere determinar en piés cuadrados, la área de una corona formada por dos círculos cuyos radios son de* 56 *y de* 42 *varas.*

La fórmula correspondiente [569] es:

$$s = \pi\,(R + r)\,(R - r)$$

sustituyendo $$s = \pi \times 98 \times 14$$

calculando por medio de logaritmos,

logaritmo 3'141593.....	0'497 1499
logaritmo 98.....	1'991 2261
logaritmo 14.....	1'146 1280
	3'634 5040 = log. 4310'265 varas cuad.

Como una vara cuadrada tiene 9 piés, la área de la corona expresada en piés cuadrados será de 38792'385.

XIII.—*Determinar la área de un sector de círculo, cuyo radio es de* $14'5$ m *y el arco de* 42°.

La área del sector circular es igual (570) á la mitad del producto del arco rectificado por el radio.

Para determinar el valor del arco rectificado de 42° calcularêmos primero la circunferencia del círculo cuyo radio es de $14'5$ m por la fórmula (549):

$$\text{circunferencia} = 2\,\pi\,r$$

sustituyendo $$C = 2 \times 3'141593 \times 14'5 = 91'1062 \text{ m}.$$

En seguida se calculará la longitud del arco de 42° por medio de la proporcion:

$$360° : 42° :: 91'1062 : x = 10'629$$

La área del sector será $= \frac{10'629 \times 14'5}{2} = 77'06025$

XIV.—*Determinar la área de un trapecio circular cuyos arcos son de* 60° *y cuyos radios son respectivamente de* 41 *y de* 30 *piés.*

La fórmula correspondiente (571) es:

$$\text{trapecio circular} = \frac{A + a}{2}(R - r) \ldots [1]$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Así, pues, para poder sustituir en ella los valores numéricos, comenzarémos por determinar los arcos A y a de 60°.

$$C = 2\pi R = 2\pi 41 = 257'611$$

$$360° : 60° :: 257'611 : A = 42'935 \text{ piés.}$$

$$c = 2\pi r = 2\pi 30 = 188'496$$

$$360° : 60° :: 188'496 : a = 31'416$$

Sustituyendo en la fórmula (1),

$$\text{Area del trapecio} = \frac{42'935 + 31'416}{2}(41-30) = 408'925 \text{ piés cuad.}$$

XV.—*Determinar la área de un segmento de círculo cuyo radio es de* 10 *metros y cuyo arco es de* 30°.

La área del segmento circular es igual á la mitad del producto del radio por la diferencia entre el arco del segmento y la mitad de la cuerda del arco doble [572].

Así, pues, tendremos que determinar el arco rectificado de 30° en el círculo cuyo radio es de 10 metros, y la cuerda del arco de 60°.

La circunferencia del círculo es $2\pi r = 2\pi 10 = 62'832$.

$$360° : 30° :: 62'832 : \text{arco de } 30° = 5'236$$

En cuanto á la cuerda del arco de 60° hay fórmulas y tablas que dan el valor de la cuerda en funcion del número de grados del arco; pero, en nuestro caso, por ser el arco de 60° [497] la cuerda será igual al radio del círculo = 10 metros. Por tanto, la área del segmento $= \frac{10\,[5'236-5]}{2} = 1'180$ m. cuad.

COMPARACION DE LAS AREAS.

574.—*Las áreas de dos paralelógramos cualesquiera, son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Como la área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura, si representamos por P y p las áreas de los peralelógramos, por B y b sus bases y por A y a las alturas, se tiene:

$$P = B \times A$$

$$p = b \times a$$

Dividiendo una por otra estas ecuaciones, resulta:

$$\frac{P}{p} = \frac{B \times A}{b \times a}$$

ó

$$P : p :: B \times A : b \times a$$

que es lo que se debia demostrar.

575.—*Las áreas de dos triángulos cualesquiera son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Como la área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura, si llamamos T y t las áreas de los triángulos B y b sus bases, y A y a sus alturas, se tiene:

$$T = \frac{B \times A}{2}$$

$$t = \frac{b \times a}{2}$$

Dividiendo una por otra estas ecuaciones, y suprimiendo el denominador comun 2, resulta:

$$\frac{T}{t} = \frac{B \times A}{b \times a}$$

ó

$$T : t :: B \times A : b \times a$$

que es lo que expresa el teorema.

De aquí se infiere: 1° *que las áreas de los triángulos que tienen bases*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

iguales serán proporcionales á sus alturas; y 2°, que las áreas de los triángulos que tienen alturas iguales son proporcionales á sus bases; pues para demostrarlo basta suprimir el factor igual en la segunda razon de la anterior proporcion.

576.—*Las áreas de dos triángulos A B C y D E F* (fig. 249) *que tienen un ángulo igual, son proporcionales á los productos respectivos de los lados que forman el ángulo igual.*

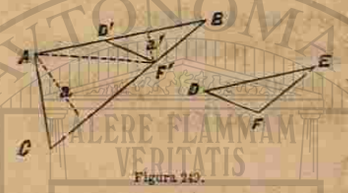


Figura 249.

Si el ángulo B=E sobreponiendo los triángulos, el lado E D tomaria la posicion B D' y el lado E F la de B F', y reuniendo D' y F' se tendria el triángulo B D' F' igual á E D F, por tener un ángulo igual formado por dos lados respectivamente iguales. Ahora bien: tirando la recta A F' resultará el triángulo A F' B, en el que tomando B F' como base, tendrá la misma altura a que A B C; y si se toma B A como base tendrá la misma altura a' que B D' F'. Supuesto que estos triángulos tienen la misma altura serán proporcionales á sus bases (575—2°) y tendrémos:

$$A\,B\,C : A\,F'\,B :: B\,C : B\,F'$$

y

$$A\,F'\,B : B\,D'\,F' :: A\,B : B\,D'$$

multiplicando ordenadamente estas proporciones y suprimiendo el factor A F' B comun á los dos términos de la primera razon, resulta:

$$A\,B\,C : B\,D'\,F' :: B\,C \times A\,B : B\,F' \times B\,D'$$

y sustituyendo sus iguales

$$A\,B\,C : E\,D\,F :: B\,C \times A\,B : E\,F \times E\,D$$

que es lo que se queria demostrar.

577.—*Las áreas de los triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

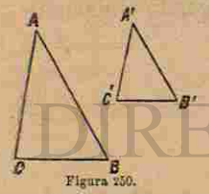


Figura 250.

Sean los triángulos A B C y A' B' C' (fig. 250) por ser semejantes tendrán sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales. Por ser el ángulo A=A' se tiene (576)

$$A\,B\,C : A'\,B'\,C' :: A\,C \times A\,B : A'\,C' \times A'\,B'$$

por lados homólogos

$$A\,C : A'\,C' :: A\,B : A'\,B'$$

multiplicando estas proporciones ordenadamente y suprimiendo los factores iguales, resulta:

$$A\,B\,C : A'\,B'\,C' :: A\,B^2 : A'\,B'^2 \ldots . [1]$$

Como los triángulos son semejantes, se tiene:

$$A\,B : A'\,B' :: A\,C : A'\,C' :: B\,C : B'\,C'$$

elevando al cuadrado

$$A\,B^2 : A'\,B'^2 :: A\,C^2 : A'\,C'^2 :: B\,C^2 : B'\,C'^2$$

comparando esta série de razones con la proporcion [1] resulta:

$$A\,B\,C : A'\,B'\,C' :: A\,B^2 : A'\,B'^2 :: A\,C^2 : A'\,C'^2 :: B\,C^2 : B'\,C'^2$$

que es lo que se debia demostrar.

578.—*Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus bases ó de sus alturas.*

En el hecho de ser los triángulos semejantes, conforme al teorema del número anterior, sus áreas serán proporcionales al cuadrado de los *lados* que se tomen por base.

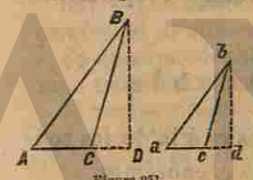


Figura 251.

Para demostrar que lo son al cuadrado de sus alturas, en los triángulos semejantes A B C, a b c (fig. 251) tomemos A C y a c por bases, tiremos las alturas B D y b d, y resultarán los triángulos B C D y b c d, que serán semejantes por ser rectángulos, y tener el ángulo B C D = b c d por ser suplementos respectivamente del ángulo B C A = b c a como ángulos de los triángulos semejantes.

Comparando los lados homólogos de los triángulos B C D y b c d,

se tiene $B\,C : b\,c :: B\,D : b\,d$

elevando al cuadrado $B\,C^2 : b\,c^2 :: B\,D^2 : b\,d^2$

Por otra parte, las áreas de los triángulos, por ser semejantes, estarán en la relacion de

$$A\,B\,C : a\,b\,c :: B\,C^2 : b\,c^2$$

luego

$$A\,B\,C : a\,b\,c :: B\,D^2 : b\,d^2$$

que es lo que se debia demostrar.

579.—*Las áreas de dos polígonos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados ó de sus líneas homólogas.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

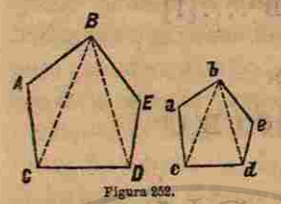


Figura 252.

Sean A B E D C y a b e d c (fig. 252) dos polígonos semejantes; si desde los vértices B y b se tiran diagonales, quedarán divididos en triángulos que serán respectivamente semejantes (520) y se tendrá:

$$A\,B\,C : a\,b\,c :: A\,C^2 : a\,c^2 \ldots . [1]$$

$$B\,C\,D : b\,c\,d :: C\,D^2 : c\,d^2$$
$$B\,D\,E : b\,d\,e :: D\,E^2 : d\,e^2$$

Siendo semejantes los polígonos, sus lados y líneas homólogas serán proporcionales, y tendrémos:

$$A\,C : a\,c :: C\,D : c\,d :: D\,E : d\,e$$

elevando al cuadrado esta serie de razones

$$A\,C^2 : a\,c^2 :: C\,D^2 : c\,d^2 :: D\,E^2 : d\,e^2$$

por ser iguales las segundas razones de las tres primeras proporciones, se tiene:

$$A\,B\,C : a\,b\,c :: B\,C\,D : b\,c\,d :: B\,D\,E : b\,d\,e$$

Fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente, tendrémos:

$$A\,B\,E\,D\,C : a\,b\,e\,d\,c :: A\,B\,C : a\,b\,c \ldots . [2]$$

Suprimiendo la razon comun entre las proporciones [1] y [2], resulta:

$$A\,B\,E\,D\,C : a\,b\,e\,d\,c :: A\,C^2 : a\,c^2$$

Esta proporcion demuestra la primera parte del teorema, y como en vez de la razon $A\,C^2 : a\,c^2$ por la semejanza de los triángulos, puede ponerse la de otras líneas homólogas elevadas al cuadrado, quedará demostrado el teorema en todas sus partes.

580.—*Las áreas de los círculos son proporcionales á los cuadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

Hemos visto que la área de un círculo (568) está expresada por la fórmula:

$$S = \pi R^2$$

la de otro círculo seria $s = \pi r^2$

Formando una proporcion con estas ecuaciones, se tiene:

$$S : s :: \pi R^2 : \pi r^2$$

suprimiendo el factor comun π de la segunda razon, resulta:

$$S : s :: R^2 : r^2 \ldots . (1)$$

Si en esta proporcion sustituimos por R y r sus valores en funcion del diámetro que expresarémos, por D y d, se tiene:

$$S : s :: \frac{D^2}{4} : \frac{d^2}{4}$$

multiplicando por 4 la segunda razon, resulta:

$$S : s :: D^2 : d^2 \ldots . (2)$$

quedando demostrado el teorema por medio de las proporciones (1) y (2)

581.—*Las áreas de dos sectores semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus radios, ó al cuadrado de sus arcos.*

Se dice que dos sectores son semejantes, cuando los arcos que los forman tienen el mismo número de grados.

Si representamos por S y s las áreas de los sectores, por A y a los arcos, y por R y r los radios, tendrémos (570):

$$S = \frac{A\,R}{2}$$
$$s = \frac{a\,r}{2}$$

de donde $$S : s :: \frac{A\,R}{2} : \frac{a\,r}{2} \ldots . (1)$$

Como los arcos de igual número de grados son proporcionales á los radios, se tiene:

$$A : a :: R : r \ldots . [2]$$

multiplicando estas proporciones y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$S : s :: R^2 : r^2$$

que es lo que expresa la primera parte del teorema. Para demostrar la segunda establecerémos la proporcion

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$R : r :: A : a \ldots . \quad (3)$$

multiplicando ordenadamente los términos de esta proporcion por los de la (1) y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$S : s :: A^2 : a^2$$

que es lo que se debia demostrar.

582.—Es de mucho interés fijar la atencion en la correspondencia íntima que existe siempre entre las relaciones geométricas de una figura y las relaciones numéricas de sus líneas ó de sus áreas, que no vienen á ser sino la traduccion de las mismas propiedades en otro lenguaje. Así, pues, valiéndonos de esta correspondencia, hemos demostrado en muchos casos por medio del álgebra, teoremas de geometría, y otras veces por medio de la geometría podrán establecerse ó demostrarse fórmulas algebráicas.

Por vía de ejemplo, demostrarémos geométricamente una fórmula establecida en álgebra, y un teorema deducido de las propiedades de las líneas proporcionales.

583.—*Dadas las líneas* a *y* b (fig. 253), *determinar la relacion que existe entre estas rectas y el cuadrado de su suma.*

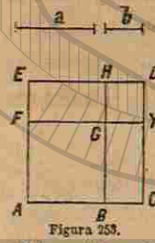


Figura 253.

Tómese A B=a, en seguida colóquese B C=b, y constuirémos luego el cuadrado A C D E sobre el lado A C = a + b; tomando A F = a, y tirando por los puntos B y F las rectas B H y F Y paralelas, á los lados del cuadrado, se tendrá:

$$\text{sup. A C D E} = \text{sup. (A G + C G + E G + G D)}$$

El rectángulo C G, como fácilmente puede demostrarse, es igual á E G; así es que, sustituyendo:

$$\text{A C D E} = \text{A G} + 2\,\text{C G} + \text{G D}$$

y reemplazando estos valores geométricos por sus expresiones algebráicas, resulta:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

cuya fórmula hemos demostrado en aritmética al tratar de las partidas del cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades, y en álgebra al ocuparnos de la multiplicacion de los polinomios.

584.—*El cuadrado C H* (fig. 254) *formado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de los cuadrados A D y A G formados sobre los catetos.*

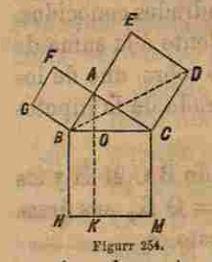


Figura 254.

Desde el vértice A del ángulo recto, bájese la perpendicular A O, prolónguese hasta K y tírense las rectas B D y A M.

El triángulo B C D es igual á A M C por tener el ángulo B C D = A C M formado por lados respectivamente iguales, B C = C M y C D = A C por lados de cuadrados. El ángulo B C D es igual á A C M porque cada uno de ellos está formado de un ángulo recto, más la parte comun A C B. Así, pues, se tiene:

$$\text{triángulo B D C} = \text{A M C} \ldots . \quad (1)$$

El triángulo B D C tiene la misma base D C que el cuadrado A D, é igual altura, por estar comprendidos entre las paralelas C D y B E, luego

$$\text{sup. triángulo B D C} = \frac{\text{cuad. A D}}{2} \ldots . \quad (2)$$

El triángulo A M C tiene la misma base C M que el rectángulo O C M K, é igual altura, por estar comprendidos entre las paralelas C M y A K, luego

$$\text{sup. triángulo A M C} = \frac{\text{rect. C K}}{2} \ldots . \quad (3)$$

Siendo los primeros miembros de las ecuaciones (2) y (3) iguales entre sí (1) resulta que

$$\frac{\text{cuad. A D}}{2} = \frac{\text{rect. C K}}{2}$$

ó

$$\text{cuad. A D} = \text{rect. C K} \ldots . \quad (4)$$

de una manera análoga puede demostrarse que

$$\text{cuad. A G} = \text{rect. B K} \ldots . \quad (5)$$

sumando las ecuaciones (4) y (5), tenemos por último:

$$\text{cuad. A D} + \text{cuad. A G} = \text{cuad. C H}$$

que es lo que expresa el teorema, y lo mismo que habiamos demostrado en el núm. 531, de otro modo.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

585.—Observacion.—Esta propiedad nos sirve para formar un cuadrado equivalente á la suma ó á la diferencia de dos cuadrados conocidos; pues si se construye un triángulo rectángulo A B C (fig. 254) en el que los catetos A B y A C sean los lados de los cuadrados conocidos, el cuadrado formado sobre la hipotenusa será equivalente á la suma de los cuadrados A G y A D; y el cuadrado construido sobre uno de los catetos será equivalente á la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el del otro cateto.

586.—Si observamos en la figura 254 que el cuadrado B C M H y los rectángulos B K y C K tienen la misma base B H = O K, sus áreas serán proporcionales á sus alturas B C, B O y O C; esto es,

$$BM : BK : CK :: BC : BO : OC$$

sustituyendo por B K su equivalente A G, y por C K el suyo A D, se tiene que

$$BM : AG : AD :: BC : BO : OC$$

esto es, que *la relacion entre el cuadrado formado sobre la hipotenusa y los cuadrados construidos sobre los catetos, es la misma que la que hay entre la hipotenusa y los segmentos B O y O C adyacentes.*

587.—*La área de un polígono, construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente á la suma de las áreas de los polígonos semejantes al primero, construidos sobre los catetos del mismo triángulo.*

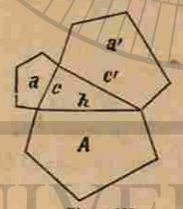


Figura 255.

Si en la figura 255 llamamos A la área del polígono construido sobre la hipotenusa, a la del construido sobre el cateto c, y a' la del construido sobre el cateto c', tendrémos que por ser los polígonos semejantes, sus áreas serán proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos (579). Esto es:

$$a : c^2 :: a' : c'^2 :: A : h^2$$

Fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente, se tiene:

$$a + a' : c^2 + c'^2 :: A : h^2$$

pero como (584) $h^2 = c^2 + c'^2$

endo iguales los consecuentes, lo serán los antecedentes,

luego $A = a + a'$

que es lo que se debia demostrar.

588.—*La área de un círculo construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo como diámetro, es equivalente á la suma de los círculos construidos sobre los catetos como diámetros.*

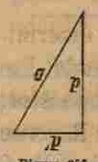


Figura 256.

Siendo el círculo un polígono regular de una infinidad de lados infinitamente pequeños, este teorema es un corolario del anterior; pero lo demostrarémos fundándonos en la expresion de la área del círculo en funcion del diámetro (568). Sea (fig. 256) D la hipotenusa, diámetro del círculo construido sobre ella y S su área, d uno de los catetos, diámetro del círculo cuya área representarémos por s; y d' el otro cateto diámetro del círculo cuya área es s'. En tal virtud,

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \ldots . [1]$$

$$s = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$s' = \frac{\pi d'^2}{4}$$

sumando las dos últimas ecuaciones, y sacando $\frac{\pi}{4}$ como factor comun, resulta:

$$s + s' = \frac{\pi}{4} [d^2 + d'^2] \ldots . [1]$$

pero como [584] $d^2 + d'^2 = D^2$

sustituyendo en dos se tendrá:

$$s + s' = \frac{\pi D^2}{4}$$

y conforme á la ecuacion (1), obtendremos $s + s' = S$

que es lo que se queria demostrar.

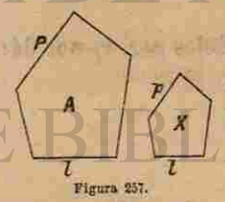


Figura 257.

589.—Problemas de comparacion de áreas.—I.—*Dada la área A de un polígono P* (fig. 257) *y uno de sus lados* l, *determinar la área de un segundo polígono* p *semejante al primero, y en el cual se conoce el lado homólogo* l'.

Como las áreas de las figuras semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, se tiene:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$A : x :: l^2 : l'^2$$

de donde $$x = \frac{A\, l'^2}{l^2}$$

II.—*Dados dos polígonos semejantes* (fig. 257), *construir otro semejante á ellos y equivalente á su suma.*



Figura 258.

Para resolver este problema, lo esencial es determinar la magnitud del lado del polígono buscado, homólogo á uno de los lados de los polígonos propuestos.

Constrúyase el ángulo recto A (fig. 258) y llévense sobre sus lados longitudes respectivamente iguales á los lados homólogos l y l' de los polígonos conocidos; tírese la hipotenusa B C, y si sobre ella se construye un polígono semejante á uno de los lados, quedará resuelto el problema (587).

III.—*Dados dos círculos A y B* (fig. 259) *construir otro equivalente á su diferencia.*



Figura 259.

Tírese el diámetro D E, desde su extremo D llévese la cuerda D F igual al diámetro d del círculo menor B, y tirando la cuerda F E ésta será el diámetro del círculo pedido.

Demostracion.—Por ser rectángulo el triángulo D F E, se tendrá:

$$E\,F^2 = D\,E^2 - D\,F^2$$

Si representamos por R el rádio del círculo A, por r el del círculo B, y por r' el del círculo buscado, cuyo diámetro vamos á demostrar que debe ser F E; sustituyendo en la anterior ecuacion, se tiene:

$$4\,r'^2 = 4\,R^2 - 4\,r^2$$

dividiendo todos los términos por 4, y multiplicándolos por π, nos dá:

$$\pi\,r'^2 = \pi\,R^2 - \pi\,r^2$$

que es lo que debiamos demostrar.

IV.—*Construir un polígono semejante á otro P* (fig. 260), *y cuya área esté con la del primero en la relacion de* m *á* n.

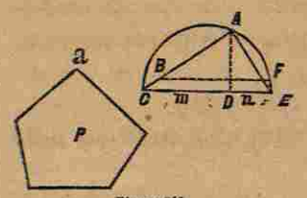


Figura 260.

Sea a b uno de los lados del polígono dado, y vamos á determinar el lado homólogo del polígono cuya área ha de estar con la de éste en la razon de m : n.

Sobre una recta indefinida llévense dos rectas, C D y D E, cuyas magnitudes estén en la relacion de m : n. Sobre C E como diámetro, trácese una semicircunferencia; levántese en D la perpendicular D A, y tirando las cuerdas A C y A E, llévese sobre la primera de A á B el lado a b, por B trácese B F paralela á C E, y la recta A F será el lado homólogo á a b del polígono buscado.

Demostracion.—Por ser semejantes los triángulos A C E y A B F, se tiene:

$$A\,C : A\,E :: A\,B : A\,F$$
$$A\,C^2 : A\,E^2 :: A\,B^2 : A\,F^2$$

como $$A\,C^2 = m.\ C\,E \text{ y } A\,E^2 = n.\ C\,E \quad (530—3°)$$

sustituyendo estos valores en la proporcion anterior y simplificando

tendrémos: $$m : n :: A\,B^2 : A\,F^2$$
ó sustituyendo $$m : n :: a\,b^2 : A\,F^2$$

y como las áreas de los polígonos son proporcionales á los cuadrados de los lados, se infiere que la área dél polígono construido sobre la recta A F, es á la área del polígono P como m es á n; que es lo pedido en el problema.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



TERCERA PARTE.

VOLUMENES.

Planos y rectas.

590.—Hasta aquí nos hemos ocupado del estudio de las propiedades de las figuras que pueden estar contenidas en un plano, considerando las relaciones que existen entre las partes que las forman, con el fin de deducir de los elementos conocidos los desconocidos. Esta parte de la geometría elemental se denomina por esta razon *geometría plana*. Vamos ahora á tratar de las figuras considerándolas en el espacio y de los cuerpos con sus tres dimensiones, cuyo estudio constituye lo que comunmente se llama *geometría en el espacio*.

Nos ocuparémos primero de las relaciones de las líneas rectas con los planos; en seguida de las que dan lugar los planos entre sí, y por último, de los cuerpos formados de planos ú originados por el círculo, valuando sus áreas y sus volúmenes.

591.—Hemos dicho (370) que *plano ó superficie plana es aquella que si se le aplica en una direccion cualquiera una línea recta, de modo que esté totalmente contenida en dicha superficie, ésta tocará todos los puntos de la recta.*

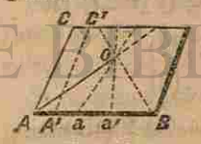


Figura 261.

Todo plano debe considerarse como una superficie indefinida en longitud y latitud, á menos que no se fijen los puntos que lo limitan. Puede concebirse el plano engendrado por el movimiento de una recta o A (fig. 261) que al girar al rededor del punto o otro de sus puntos toca la recta A B. Igualmente puede con-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

siderarse un plano engendrado por el movimiento de una recta A C que resbala sobre otra A B, y que en sus diversas posiciones permanece paralela á su primera situacion A C.

La interseccion de dos planos es una línea recta (370).

Dos planos que tienen tres puntos comunes que no están en línea recta coinciden en toda su extension (370)

Un plano queda determinado en general por la posicion de tres puntos que no están en línea recta; por dos rectas que se cortan en un punto, ó por dos paralelas. Tambien puede fijarse la posicion de un plano que pasa por un punto, agregando la condicion de que sea perpendicular á una recta ó paralelo á otro plano.

592.—*Siempre que una recta P A sea perpendicular á la vez á otras dos A B y A C* (fig. 262) *colocadas en dos planos diferentes P A B y P A C que pasan por P A, esta recta será igualmente perpendicular á cualquiera otra A E que pase por el punto comun A de interseccion y que esté contenida en el plano C A B determinado por las rectas A B y A C.*

Por la hipótesis del teorema son rectos los ángulos P A B y P A C, y para demostrar que P A es perpendicular á A E, tendrémos que probar que el triángulo P A E es rectángulo en A, esto es, que el cuadrado de P E es igual á la suma de los cuadrados de los catetos P A y A E.

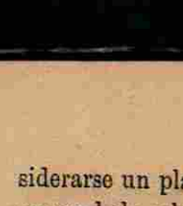


Figura 262.

Tomemos A B=A C, tiremos las rectas B C, B P y P C, con lo que resultarán los triángulos A B C y P B C que serán isósceles, el primero por construccion y el segundo porque siendo iguales los triángulos rectángulos P A B y P A C (385) se tiene P B=P C. Tomando el punto D en el medio de B C, base de los triángulos isósceles, y tirando las rectas A D y P D, éstas serán perpendiculares á B C en el punto D (428).

Considerando el triángulo rectángulo P E D, se tiene:

$$PE^2=PD^2+ED^2 \ldots [1]$$

Ahora determinarémos los valores de PD^2 y ED^2 considerando sucesivamente los triángulos rectángulos P D C, P A C y A D C.

$$PD^2=PC^2-CD^2=PA^2+AC^2-CD^2=PA^2+AD^2+CD^2-CD^2$$

ó reduciendo: $PD^2=PA^2+AD^2 \ldots (2)$

en el triángulo A D E: $ED^2=AE^2-AD^2 \ldots (3)$

sustituyendo los valores de las ecuaciones (2) y (3) en la (1) finalmente resulta:

$$PE^2=PA^2+AE^2$$

que es lo que teniamos que demostrar.

Siendo P A perpendicular á todas las rectas que, como A E pasan por A, se infiere que: *cuando una recta P A es perpendicular á la vez á dos rectas A B y A C, lo será al plano que pasa por éstas,* y recíprocamente, siempre que una recta sea perpendicular á un plano, lo será tambien á toda recta que esté situada en él y pase por el pié A de la perpendicular P A.

593.—*Si desde un punto P* (fig. 263) *se baja una perpendicular P O al plano D E y varias oblícuas P A, P F, P C; 1° la perpendicular P O es la menor; 2° las oblícuas P A, P F, que se separan igualmente del pié de la perpendicular, son iguales; y 3° la P C que se separa más es la mayor.*

1° En cualquiera de los triángulos rectángulos P O A, P O F P O C, el cateto P O, que es la perpendicular al plano, es menor que cualquiera de las oblícuas P A, P F y P C, que son las hipotenusas de los triángulos.

Por esta razon, la distancia de un punto á un plano se mide por la perpendicular bajada al plano.

2° Siendo A O = F O = O B, las oblícuas A P, F P y B P serán iguales por ser hipotenusas de los triángulos iguales (385) A O P, F O P y B O P.

3° Si O C > O A podemos trasportar el triángulo P O A sobre su igual P O B, que está en el mismo plano que la oblícua P C, y como P C > P B (401) y P B = P A se infiere que P C > P A.

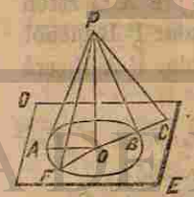


Figura 263.

594.—De lo que antecede resulta: 1° *que si se hace girar un ángulo recto P O A al rededor de uno de sus lados P O, el otro O A describirá un plano A O B perpendicular al primer lado; y 2° todas las perpendiculares O A, O F, O B á una recta O P levantadas en uno de sus puntos O, están en un mismo plano D E perpendicular á dicha recta.*

595.—*Por un punto O tomado en una recta O P* (fig. 263) *ó por otro fuera de ella A, siempre se le puede tirar un plano perpendicular, pero no se puede tirar mas que uno solo.*

Si hacemos pasar un plano por la recta P O observarémos que del punto O y desde el A siempre se puede tirar una perpendicular á O P, y al girar al rededor de ésta engendrará el plano A O F B que le es

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

perpendicular, y como no se puede tirar desde un punto mas que una sola perpendicular á O P, resulta que no habrá tampoco mas de un plano perpendicular que pase por el punto dado.

596.—*Desde un punto O tomado en un plano* (fig. 263) *ó por otro fuera de él P, no se puede tirar más que una perpendicular al plano.*

Suponiendo engendrado el plano D E por el movimiento de O A al rededor de O P, se comprende que en el punto O no se puede levantar á la recta O A más perpendicular que O P, así como que desde el punto P no se le puede bajar tampoco ninguna otra perpendicular.

597.—La proyeccion de un punto P sobre un plano (fig. 264) es el pié B de la perpendicular P B bajada de ese punto sobre dicho plano.

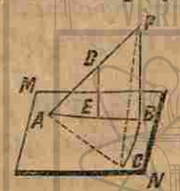


Figura 264.

La proyeccion de una recta D P es la série de todos los piés de las perpendiculares bajadas de los puntos de la recta sobre el plano. Como todas las perpendiculares son paralelas entre sí, quedarán en un mismo plano P A B, cuya interseccion con el M N será una recta A B. En consecuencia, siendo la proyeccion de una recta otra línea recta, bastará determinar la proyeccion de dos de sus puntos para tener la de toda la recta.

598.—*El ángulo de una recta con un plano, cuando no es perpendicular á éste, es el que forma con su proyeccion. Este ángulo es el menor de todos los que forma la recta con las líneas que pasan por su pié A.*

En efecto, si por el pié A [fig. 264] tiramos otra recta cualquiera, tomamos A C=A B y reunimos los puntos P y C, resultarán dos triángulos P B A y P C A, en los que los ángulos P A B y P A C están formados por lados iguales; pero siendo la perpendicular P B menor que la oblícua P C, el ángulo opuesto á la primera recta, P A B será menor que cualquiera otro P A C [432].

599.—*Dos planos M, N, perpendiculares á una misma recta P A no pueden encontrarse, y por lo mismo serán paralelos* [fig. 265].

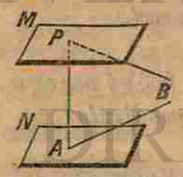


Figura 265.

Si los planos pudieran encontrarse, desde el punto B de su interseccion comun podrian tirarse las rectas B P y B A, que por estar contenidas en planos perpendiculares á la misma recta, serán ambas perpendiculares á P A, lo cual es un absurdo [396].

600.—*Cuando dos rectas son paralelas, el plano perpendicular á una de ellas lo será tambien á la otra* [fig. 266].

Si el plano M N es perpendicular á P A, demostrarémos que tambien lo es á su paralela Q B. Tiremos la recta A B y su perpendicular C D. La línea Q B por ser paralela á P A, estará en el mismo plano P A B Q que ella, y el ángulo Q B A será recto. Tomemos B C=B D y tiremos las rectas A C, A D, P C y P D.

Los triángulos rectángulos P A C y P A D son iguales (385), luego P C = P D.

Siendo isósceles el triángulo P C D, la recta P B tirada á la mitad de su base será perpendicular á C D. En consecuencia, siendo C D perpendicular á A B y á B P, lo será igualmente á B Q contenida en el mismo plano (592). Por último, si Q B es perpendicular á la vez á B A y á C D, lo será al plano M N de estas rectas.

601.—*Dos rectas P A y Q B* (fig. 266) *perpendiculares á un mismo plano M N, son paralelas entre sí.*

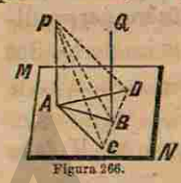


Figura 266.

Si Q B no fuera paralela á P A por el punto B, se le podria tirar una paralela diferente de Q B, la cual (600) seria perpendicular al plano M N, resultando que desde el mismo punto B podrian levantarse dos perpendiculares al mismo plano, lo que no es admisible.

602.—*Dos rectas A a, B b, paralelas á una tercera C c, son paralelas entre sí* (fig. 267).

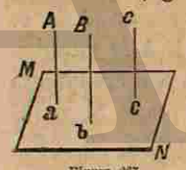


Figura 267.

Si tiramos un plano M N perpendicular á C c, éste lo será á las rectas A a y B b (600), y siendo estas perpendiculares al mismo plano serán paralelas entre sí (601).

603.—*En el espacio dos rectas A B y C' D'* (fig. 268) *pueden ser perpendiculares á una misma recta x y sin ser paralelas entre sí.*

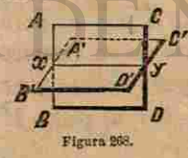


Figura 268.

Si suponemos que el rectángulo A D gire al rededor de una recta x y, paralela á sus bases en cualquiera posicion A' D' el lado D' C' será perpendicular á x y sin ser paralelo á A B, porque se encuentra en un plano diferente.

Debemos hacer notar que prolongadas indefinidamente estas rectas, no se encuentran. Igualmente observarémos, que en el espacio, á una recta x y se le pueden levantar una infinidad de perpendiculares desde el mismo punto x.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

604.—*Las intersecciones A B y C D* (fig. 269) *de dos planos paralelos M y N con otro plano B C, son dos rectas paralelas.*

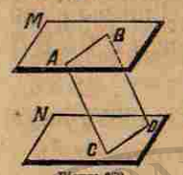


Figura 269.

Por una parte las rectas A B y C D están en el mismo plano A D, y por otra estando colocadas sobre los planos paralelos M y N no podrán encontrarse prolongadas, luego son paralelas.

605.—*Las partes A C y B D* (fig. 269) *de paralelas comprendidas entre dos planos paralelos son iguales.*

Por el supuesto los lados A C y B D son paralelos, y por el teorema anterior lo son tambien A B y C D, luego la figura A B C D será paralelógramo, por lo cual A C=B D (449).

De esto resulta que *dos planos paralelos tienen todos sus puntos equidistantes;* pues bastaria imaginarse que el plano A D fuera perpendicular para que las rectas A C y B D midiesen las distancias de los dos planos.

606.—*La recta A B* (fig. 270), *perpendicular á un plano M, lo es tambien á cualquiera otro plano N que le es paralelo.*

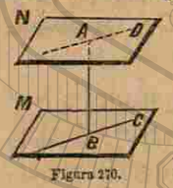


Figura 270.

Si por A B se hace pasar un plano cualquiera, por ser A B perpendicular á M, el ángulo A B C es recto; por ser N paralelo á M, la interseccion A D es paralela á B C, y por tanto el ángulo B A D tambien será recto. Como otro tanto sucederia con cualquiera otra recta que pase por A y esté en el plano N, se infiere que A B es perpendicular al plano N.

607.—*Toda recta A B* (fig. 271) *paralela á otra C D, lo es igualmente á cualquier plano M que pase por la segunda sin pasar por A B.*

Estando las dos rectas A B y C D en el mismo plano N por ser paralelas, la recta A B no podria encontrar el plano M sino en su interseccion comun, esto es, sobre la prolongacion de C D; pero como por el supuesto no es esto posible, tampoco podrá encontrar A B al plano M, y por tanto será paralela á él.

608.—*Si una recta A B* (fig. 271) *es paralela á un plano M, cualquier plano que pase por la recta A B encontrará al primero segun una paralela á ella.*

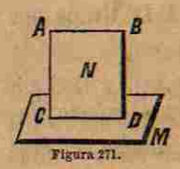


Figura 271.

Porque A B prolongada no podria cortar á C D sin encontrar al plano M, lo que seria contra el supuesto.

De esto se deduce, que cualquiera recta paralela á A B tirada por un punto del plano M, está toda comprendida en este plano.

609.—*Las partes de paralelas A C y B D* (fig. 271) *comprendidas entre una recta A B y un plano M que le es paralelo son iguales.*

Supuesto que la figura A D es paralelógramo, y en todo paralelógramo los lados opuestos son iguales.

Como en el caso de ser A C y B D perpendiculares al plano M, el teorema es igualmente cierto, se infiere que, *una recta paralela á un plano tiene todos sus puntos equidistantes de éste.*

610.—*Dadas dos rectas A B y C D* (fig. 272) *en el espacio que no se cortan ni son paralelas, por una de ellas A B solo se puede hacer pasar un plano paralelo á la otra C D.*

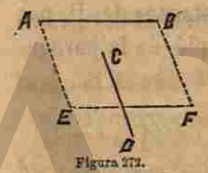


Figura 272.

Si por un punto cualquiera A ó B de la recta A B se tira una paralela A E ó B F á C D, y se hace pasar por A B y A E un plano, éste será paralelo á C D (607). Además, como todas las paralelas á A E y por lo mismo á C D están en un mismo plano, no hay mas de uno solo que satisfaga á la cuestion.

611.—*La menor distancia de dos rectas en el espacio, A B y C D* (figura 273) *que no se cortan, es la perpendicular comun á ambas* o o'.

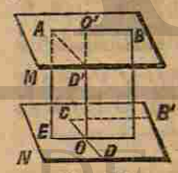


Figura 273.

Por el punto A tiremos A D' paralela á C D, y hagamos pasar el plano M por A B y A D' que será paralelo á la recta C D. Por el punto C tiremos C B' paralela á A B, y hagamos pasar el plano N por C D y C B' que será paralelo á la recta A B. La menor distancia de las rectas A B y C D será la de los planos paralelos M y N que las contienen. Por la recta A B hagamos pasar el plano B E perpendicular á M y á N.

La interseccion de este plano con N encuentra la recta C D en el punto O, y levantando en este punto una perpendicular á C D, que quedará en el plano B E, se tendrá por último la recta O O' que es la menor distancia de las rectas, siendo perpendicular á ambas y á los planos que las contienen.

El ángulo de dos rectas A B y C D en el espacio que no se cortan, es

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

el B A D' que forma una de ellas A B con otra recta A D' tirada por uno de sus puntos A y paralela á la otra C D.

612.—*Dos rectas A B y C D* (fig. 274) *que no están en el mismo plano, quedarán cortadas en partes directamente proporcionales por tres planos paralelos M, N y P.*



Figura 274.

Reuniendo los puntos A y D y tirando las rectas B D, E F, F G y A C por los puntos de interseccion de las rectas A B, A D y C D con los planos M, N y P, se tendrá E F paralela á B D (604) y F G paralela á A C, por lo que (510)

$$A E : E B :: A F : F D$$
$$A F : F D :: C G : G D$$

luego
$$A E : E B :: C G : G D$$

613.—Problemas.—I.—*Bajar una perpendicular á un plano M,* (fig. 275) *desde un punto P tomado fuera de él.*

Señálense tres puntos del plano A, B y C equidistantes de P, por ellos hágase pasar un círculo, cuyo centro O será el pié de la perpendicular (593).

II.—*Desde un punto O de un plano, levantarle una perpendicular.* (fig. 275).

Tomando O como centro, trácese un círculo, y en tres puntos de su circunferencia levántense tres oblícuas iguales A P, B P y C P, y determinando el punto P en que coinciden sus extremos, éste será el otro de la perpendicular buscada.

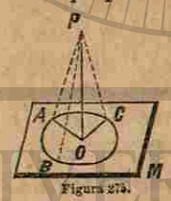


Figura 275.

Haciendo coincidir con el punto O los vértices de los ángulos rectos de dos escuadras A O P y C O P, puede determinarse igualmente la perpendicular O P por la línea de union de las escuadras (593).

III.—*Levantar un plano M* (fig. 275) *perpendicular á una recta C P: 1° por un punto O de la recta, y 2° por un punto C fuera de ella.*

1° En el punto O levántese la recta O C perpendicular á O P. En seguida, en un plano diferente de P O C, levántese otra perpendicular A O á P O, y haciendo pasar un plano por C O y A O, se tendrá el plano pedido.

2° Bájese del punto C la perpendicular C O á P O; determinado el punto O, levántese por él otra perpendicular á P O, pero en un plano

diverso al P O C. Haciendo pasar un plano por las dos perpendiculares C O y O A, se tendrá resuelto el problema.

IV.—*Tirar desde un punto P* (fig. 276) *una perpendicular á una recta A B contenida en un plano* B.

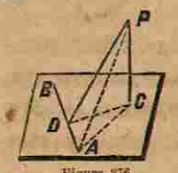


Figura 276.

Desde P bajarémos P C perpendicular al plano B. De su pié C tirarémos C D perpendicular á A B, y reuniendo los puntos P y D, la recta P D será la perpendicular pedida.

Para demostrar que el ángulo P D A es recto, tiremos las rectas C A y A P, y resultando los triángulos rectángulos P C A y C D A, se tendrá:

$$P A^2 = P C^2 + C A^2$$

pero como $P C^2 = P D^2 - C D^2$ y $C A^2 = C D^2 + A D^2$

sustituyendo resulta $P A^2 = P D^2 + A D^2$

luego el ángulo P D A es recto.

Como el plano P C D es perpendicular á A B, este problema da tambien el procedimiento para *tirar desde un punto P un plano perpendicular á una recta A B.*

V.—*Por un punto A* (fig. 277) *tirar un plano paralelo á otro M.*

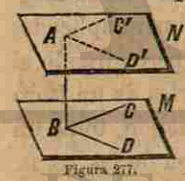


Figura 277.

En el plano dado M, se trazarán dos rectas B C y B D, que se corten en el punto B. Por el punto A se tirarán A C' paralela á B C, y A D' paralela á B D; haciendo pasar un plano N por A C' y A D', este será el plano pedido.

VI.—*Por un punto A* (fig. 277) *tirar una recta paralela á un plano M.*

Por un punto cualquiera B del plano M, trácese la recta B D, tírese A B, por el punto D llévese D D' paralela é igual á A B, y reuniendo los puntos A y D' se tendrá la recta A D' paralela al plano M. Como por el punto B pueden trazarse una infinidad de rectas, y por A tirarse otras tantas paralelas, el problema admite un número indefinido de resoluciones.

VII.—*Por un punto A* (fig. 278) *tirar un plano paralelo á dos rectas cualesquiera B C y D E, que no estén situadas en el mismo plano.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

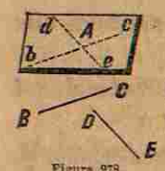


Figura 278.

Por A tírense b c y d e respectivamente paralelas á B C y D E, y haciendo pasar un plano por b A c y d A e, quedará resuelta la cuestion.

ANGULOS DIEDROS.

614.—*Se llama ángulo diedro la figura formada por dos planos M y N inclinados entre sí, que concurren en una recta A B* (fig. 279). Los planos M y N se denominan *caras* ó *lados*, y la recta A B *arista* del diedro. La magnitud de un ángulo diedro depende de la mayor ó menor inclinacion de los planos que lo forman, y no de la extension de éstos; por lo que al medir un diedro lo que se estima únicamente es la inclinacion relativa de sus caras.



Figura 279.

Se tendrá una idea exacta del ángulo diedro y de su magnitud, imaginándose que sus caras están primero aplicadas una sobre otra, que en seguida se separan, pero girando al rededor de la arista A B, como las dos partes de un libro que se abre. El ángulo diedro, nulo al principio, toma un valor que va aumentando con la separacion de las caras. Así, pues, el ángulo diedro está engendrado por la rotacion de un plano al rededor de una recta. En este movimiento cada uno de los puntos del plano describe una circunferencia de círculo cuyo plano es perpendicular á la arista y cuyo centro está en un punto de esta recta.

Cuando no hay mas que un solo diedro, se le designa por las letras A B de su arista; pero cuando hay varios que concurren en la misma arista, para evitar confusion, se designa el diedro por cuatro letras; teniendo cuidado de poner siempre las dos de su arista A B en medio de las otras dos N y M que corresponden á los planos que lo forman, y así se dice el diedro N A B M.

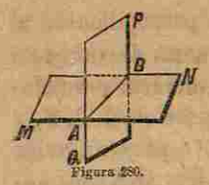


Figura 280.

Cuando un plano P A (fig. 280) cae sobre otro M N, forma con éste dos ángulos diedros M A B P y P B A N, que son *adyacentes*. Cuando éstos son iguales, el plano P A es perpendicular á M N, y recíprocamente. Si el ángulo que forman los dos planos es menor que P B A N, se dice que el diedro es *agudo*, y en caso contrario, que es *obtuso*. En fin, para los ángulos diedros se adoptan las mismas denominaciones de ángulos *complementarios*, *suplementarios*, etc., que para los ángulos rectilíneos.

615.—*Los ángulos rectilíneos B A C y* b a c (fig. 281) *que resultan de la interseccion de un ángulo diedro* A a, *con dos planos paralelos cualesquiera, son iguales.*

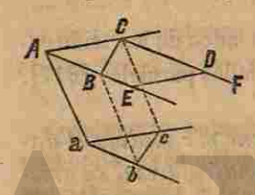


Figura 281.

Tomemos A C = a c y B A = b a, y tiremos las rectas B b, C c, B C y b c: A C es paralela á a c (604) é igual, luego la figura A c es paralelógramo y en consecuencia será C c igual y paralela á A a. Como A B es igual y paralela á a b, la figura A b es igualmente un paralelógramo, de lo que resulta que B b es igual y paralela á A a; luego B b será igual y paralela á C c, y B c será un paralelógramo en el que B c=b c. Los dos triángulos A B C y a b c serán iguales (386) por tener sus tres lados respectivamente iguales, y de la igualdad de los triángulos resulta que el ángulo B A C=b a c, que es lo que se queria demostrar.

616.—De aquí se infiere: 1° *si dos ángulos en el espacio* B A C *y* b a c (fig. 281) *tienen sus lados paralelos y sus aberturas están vueltas en el mismo sentido, serán iguales;* 2° *igualmente lo son si están vueltas en sentido contrario como* b a c *y* C D E; *y* 3° *dos ángulos* b a c *y* E D F, *que tienen sus lados paralelos y sus aberturas no están vueltas en el mismo sentido ni en sentido contrario, son suplementarios.*

En el párrafo anterior hemos demostrado la primera parte, esto es, que B A C=b a c.

2° Como el ángulo B A C = C D E (420), se infiere que b a c = C D E.

3° Siendo el ángulo E D F suplemento de C D E, se infiere que E D F y b a c son suplementarios.

617.—*Los planos de dos ángulos* B A C *y* b a c [fig. 282] *cuyos lados son respectivamente paralelos, serán paralelos.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

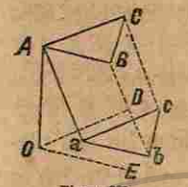


Figura 282.

Desde el punto A bajemos A O perpendicular al plano del ángulo b a c, y por el punto de interseccion O tiremos O D y O E respectivamente paralelas á a c y á a b, por lo que O E será paralela á A B, y O D á A C. Ahora bien, siendo A O perpendicular al plano en que están las rectas O D y O E, los ángulos A O D y A O E son rectos, y por razon de las paralelas [409] tambien lo serán los ángulos O A B y O A C, luego O A es perpendicular á la vez á los planos de los ángulos b a c y B A C, y por lo mismo estos serán paralelos [606].

618.—*Los triángulos* A B C *y* a b c *formados en el espacio por tres rectas respectivamente iguales y paralelas, son iguales y quedan en planos paralelos.*

Serán iguales por serlo respectivamente los tres lados de los triángulos [386], y estarán en planos paralelos por ser los lados paralelos [617].

619.—*Un ángulo diedro* B A D C [fig. 283] *tiene por medida el ángulo rectilíneo* B A C *que resulta levantando perpendiculares á su arista* A D *del mismo punto* A *en cada uno de los dos planos que lo forman.*

En primer lugar observarémos que en cualquier punto de la arista A D en que se levanten perpendiculares, determinarán un ángulo igual á B A C por estar formados por rectas respectivamente paralelas [616].

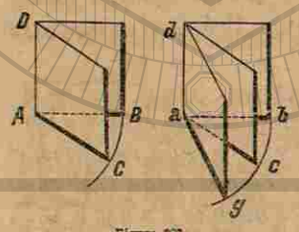


Figura 283.

Para demostrar que los ángulos diedros son proporcionales á los rectilíneos formados por perpendiculares en el mismo punto á su arista, y que por tanto pueden tomarse los últimos como medida de los primeros, demostrarémos préviamente que *si dos ángulos diedros* B A D C *y* b a d c *son iguales lo serán los ángulos rectilíneos* B A C *y* b a c *formados por las respectivas perpendiculares á sus aristas levantadas en cada una de sus caras del mismo punto.*

Siendo por el supueto iguales los ángulos diedros B A D C y b a d c, si hiciéramos coincidir la cara B D con b d sobreponiendo la arista A D sobre a d, teniendo cuidado de que A cayese sobre a, el plano D C coincidiria con d c. La perpendicular A B coincidiria con a b (395), y la A C con a c; luego el ángulo B A C = b a c.

Ahora bien: si á continuacion del ángulo diedro b a d c ponemos su igual c a d g, haciéndolos coincidir por la cara d c, resultará un ángulo diedro b a d g duplo del b a d c, y el ángulo rectilíneo b a c=c a g,

por lo que al ángulo diedro duplo b a d g corresponde un ángulo rectilíneo b a g duplo de b a c.

De la misma manera probariamos que á un diedro triple corresponde un ángulo rectilíneo triple, y en general á un ángulo diedro *n* veces mayor que otro, corresponderá un ángulo rectilíneo formado por las perpendiculares á su arista tambien *n* veces mayor. Así es que, siendo estos ángulos rectilíneos proporcionales á la magnitud de los ángulos diedros, pueden servirles de medida.

De modo que, en último análisis, los arcos de círculo nos servirán para medir los ángulos diedros.

620.—De esto resulta, que cuando uno ó varios planos caen sobre otro, ó lo cortan, tienen lugar los mismos teoremas que con las rectas que miden los ángulos diedros. Así es, que los ángulos diedros adyacentes son suplementarios; todos los formados al rededor de una arista comun valen cuatro rectos; los ángulos opuestos al vértice son iguales, etc., etc.

Igualmente cuando dos planos paralelos están cortados por otro se tiene que los ángulos diedros alternos internos son iguales, los interiores del mismo lado del plano secante son suplementarios, así como todas las propiedades que hemos demostrado en los casos de rectas paralelas.

621.—Dos planos son perpendiculares cuando el ángulo diedro que forman tiene por medida un recto.

Si un plano es perpendicular á otro, este tambien es perpendicular al primero.

622.—*Si una recta* A B (fig. 284), *es perpendicular á un plano* M N, *lo será igualmente cualquier plano* P C *que pasa por ella.*

Si en el plano M N levantamos B O perpendicular á C D interseccion comun de los dos planos, tendrémos que el ángulo A B O formado por las perpendiculares á C D será la medida del ángulo diedro de los dos planos; pero por ser A B perpendicular á M N, el ángulo A B O es recto; luego el plano P C será perpendicular á M N.

623.—*Por una recta* C D (fig. 284) *contenida en un plano, no se puede levantar mas de un plano perpendicular á éste.*

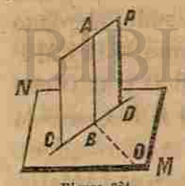


Figura 284.

En razon de que para que el plano P C sea perpendicular á M N, acabamos de ver que es preciso pase por B A perpendicular á M N, y de que se sabe que por un punto B no se puede levantar á M N más de una sola perpendicular [596].

624.—*Si dos planos P y M* (fig. 284) *son perpendiculares, y en uno de ellos se baja una recta A B perpendicular á la interseccion comun D C, esta recta será perpendicular al otro plano M.*

Por ser los planos perpendiculares el ángulo A B O es recto.

Por ser A B perpendicular á C D, el ángulo A B C tambien es recto, luego A B será perpendicular á todas las rectas que pasan por el punto B contenidas en el plano M N (592) y por tanto será perpendicular á este plano.

625.—*Si dos planos P y M* (fig. 284) *son perpendiculares, y en un punto B de su interseccion comun se levanta una recta B A perpendicular á uno de los planos M, esta recta quedará contenida por entero en el otro plano P.*

Porque si A B no estuviese contenida en el plano P, levantando en este plano en el punto B una perpendicular á C D, se tendrían (624) dos perpendiculares al plano M N en el mismo punto, lo que no es admisible (526).

626.—*Si dos planos M y N* (fig. 285) *son perpendiculares á un tercero P Q, su interseccion comun A B será tambien perpendicular á este plano P Q.*

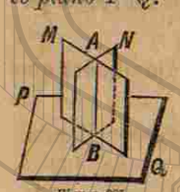


Figura 285.

Porque si por el punto B levantamos una perpendicular al plano P Q, tendrá que estar contenida tanto en el plano M como en el N.

627.—*Si desde un punto A* [fig. 286] *tomado en el interior de un ángulo diedro M N se bajan á sus caras las perpendiculares A B y A C, el ángulo A que resulte será suplemento del ángulo diedro.*

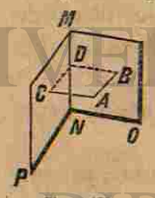


Figura 286.

Por ser A B perpendicular al plano M O, el plano A B D C que pasa por esta recta será perpendicular al plano M O [622] y por tanto el ángulo A B D será recto. Por ser A C perpendicular al plano M P, el plano A B D C que pasa por ella será perpendicular al plano M P, y el ángulo A C D será recto. Siendo el plano A B D C perpendicular á la vez á los planos M O y M P lo será á su interseccion comun M N [626], y como B D y C D son perpendiculares á la arista del ángulo diedro, el ángulo B D C será la medida del diedro O M N P.

Ahora bien: considerando el cuadrilátero A B D C se tiene [445:]

$$A + B + D + C = 4 \text{ rectos}$$

por otra parte $B + C = 2$ rectos

restando la 2ª ecuacion $A + D = 2$ rectos

que es lo que se debia demostrar, supuesto que B D C es la medida del ángulo diedro.

TRIEDROS Y POLIEDROS.

628.—*Se llama ángulo sólido ó ángulo poliedro, la figura que resulta cuando tres ó más planos concurren en el mismo punto S* [fig. 287]. *Cuando los planos que concurren en el mismo punto B son tres, la figura se llama ángulo triedro. Se da el nombre de poliedro no solo al ángulo formado por muchos planos, sino tambien al sólido limitado por muchas caras planas.*

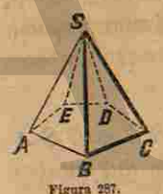


Figura 287.

El punto S es el *vértice* del poliedro; las intersecciones consecutivas S A, S B.... de sus planos son las *aristas;* cada porcion de plano indefinido A S B comprendida entre dos aristas es una *cara;* cada ángulo A S B formado por dos aristas consecutivas es un *ángulo plano,* y cada ángulo diedro B S A E formado por dos caras consecutivas, es un ángulo diedro del poliedro.

Un ángulo poliedro se designa por la letra S de su vértice, y cuando hay varios poliedros que tienen el mismo vértice por las letras S A B C D E de sus aristas, comenzando por la de su vértice.

Si el espacio del poliedro está limitado por un plano A B C D E, se forma un cuerpo que se llama *sólido,* que en el caso de nuestra figura es una *pirámide* de base pentagonal.

Nos ocuparémos únicamente de *los poliedros convexos,* que son aquellos cuyos ángulos diedros son todos salientes, esto es, que cortados por un plano A B C.... dan por seccion un polígono convexo [461].

629.—*En todo ángulo triedro S* [fig. 288] *uno cualquiera de sus ángulos planos E S G formado por dos de sus aristas, es menor que la suma de los otros dos.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

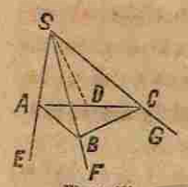


Figura 288.

Nos bastará demostrarlo con el ángulo plano E S G, que es el mayor, para que se comprenda que con más razon será cierto el teorema con cualquiera de los otros dos.

Construyamos sobre esta cara el ángulo E S D=E S F, tiremos una recta cualquiera A C y tomando S B=S D, trácese la recta A B.

Los triángulos S A D y S A B serán iguales [385], de lo que resulta:

$$A\,B = A\,D$$

por otra parte

$$A\,B + B\,C > A\,C$$

restando los términos de la ecuacion de los de la desigualdad, se tiene:

$$B\,C > D\,C$$

Considerando los triángulos C S B y C S D, en los que los ángulos C S B y C S D están formados por lados respectivamente iguales, el opuesto al mayor lado B C será el mayor, esto es

ángulo
$$B\,S\,C > C\,S\,D$$
agregando los iguales
$$B\,S\,A = A\,S\,D$$
resulta
$$B\,S\,C + B\,S\,A > A\,S\,C$$

que es lo que se tenía que demostrar.

630.—*La suma de los tres ángulos planos A S B + B S C + C S A* (fig. 289), *formados en el vértice de un triedro, es menor que cuatro rectos.*

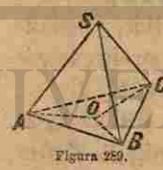


Figura 289.

Cortemos el triedro por un plano cualquiera A B C, y tomando en el interior de este triángulo un punto O, reunámoslo con los tres vértices, A, B y C, con lo que resultarán tres triángulos colocados en el mismo plano cuyo vértice comun es O, y otros tres triángulos cuyos vértices concurren en el S del triedro. Para simplificar harémos la suma de los ángulos.

$$A\,O\,B + B\,O\,C + C\,O\,A = O$$
y
$$A\,S\,B + B\,S\,C + C\,S\,A = S$$

Como los ángulos en O valen 4 rectos, nuestro raciocinio tendrá por objeto demostrar que $S < O$.

Siendo el número de triángulos formados al rededor de O el mismo que el de los formados en S, y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, resulta que la suma de los ángulos de los triángulos en O, es igual á la suma de los ángulos de los triángulos en S. Esto es,

$$O + C\,A\,B + A\,B\,C + B\,C\,A = S + S\,A\,C + S\,A\,B + S\,B\,A + S\,B\,C + S\,C\,B + S\,C\,A \ldots . [1]$$

Por otra parte (629)
$$C\,A\,B < S\,A\,C + S\,A\,B$$
$$A\,B\,C < S\,B\,A + S\,B\,C$$
$$B\,C\,A < S\,C\,B + S\,C\,A$$

sumando ordenadamente estas tres desigualdades

$$C\,A\,B + A\,B\,C + B\,C\,A < S\,A\,C + S\,A\,B + S\,B\,A + S\,B\,C + S\,C\,B + S\,C\,A \ldots . (2)$$

Si restamos los términos de esta desigualdad de los de la ecuacion (1) como cuando el sustraendo aumenta, la resta disminuye (49), resulta:

ángulos en
$$O > S$$

y como los ángulos en O = 4 rectos, se tiene que la suma de los ángulos planos formados en el vértice S será menor que cuatro rectos.

631.—*Dos triedros* S *y* s (fig. 290) *formados por ángulos planos respectivamente iguales,* $D\,S\,E = d\,s\,e$, $D\,S\,F = d\,s\,f$ *y* $E\,S\,F = e\,s\,f$, *tienen sus ángulos diedros iguales.*

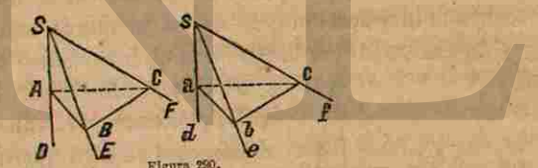


Figura 290.

Tomemos S A = s a, y por los puntos A y a hagamos pasar planos A B C y a b c respectivamente perpendiculares á S D y á s d. El triángulo S A B es igual á s a b (384) por tener S A = s a adyacente á los ángulos A S B = a s b por ángulos planos del triedro y S A B = s a b por rectos. Por la misma razon el triángulo S A C es igual á s a c, y de esto se deduce que A B=a b, A C=a c y que el triángulo B S C igual á b s c por tener el ángulo E S F = e s f formado por los lados iguales S B = s b y S C = s c (385) luego B C = b c. Siendo respectivamente iguales los tres lados del triángulo A B C á los del triángulo a b c, estos dos triángulos serán iguales (386), por lo que el

ángulo B A C=b a c; pero como estos ángulos son medida de los diedros formados sobre S D y s d, éstos tambien serán iguales. De la misma manera demostrariamos que los diedros segun S E y s e, y los segun S F y s f son iguales con tomar partes iguales sobre estas aristas y levantarles planos perpendiculares.

632.—*Dos triedros son iguales:* 1° *cuando tienen un ángulo diedro igual formado por dos ángulos planos respectivamente iguales y situados en el mismo órden;* 2° *cuando tienen un ángulo plano igual, adyacente á dos ángulos diedros respectivamente iguales situados de la misma manera; y* 3° *cuando tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales dispuestos en el mismo órden.*



Figura 291.

1° Sea el ángulo diedro S A = s a (fig. 291) é iguales las caras que forman este diedro, esto es, ángulo A S C = a s c y A S B=a s b. Si aplicáramos el ángulo diedro S A sobre s a, por ser iguales los diedros, el plano S A B coincidiria sobre s a b, y el S A C sobre s a c, y por la igualdad de las caras la recta S B coincidiria con s b y S C con s c, así es que los dos triedros coincidirán en todas sus partes, y por lo mismo serán iguales.

2° Sea la cara A S B=a s b adyacente á los ángulos diedros A S igual á a s y B S igual á b s. Si sobrepusiéramos los ángulos A S B y a s b iguales, por la igualdad de los diedros adyacentes el plano A S C coincidiria con a s c, y el plano B S C con b s c, de lo que resulta que coincidiria la interseccion S C de los primeros con la s c de los últimos, y de esto se infiere la igualdad de los triedros en todas sus partes.

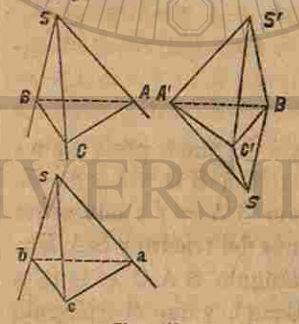


Figura 292.

3° Cuando los triedros tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales, ya demostramos en el número 631 que sus ángulos diedros tambien son iguales; pero para que los triedros puedan sobreponerse se necesita que las caras respectivamente iguales estén dispuestas en el mismo órden. En la figura 292 los triedros S y s serán sobreponibles porque están formados no solo de caras iguales, sino dispuestas en el mismo órden; pero no es posible sobreponer los triedros S y S' en los que los ángulos iguales A S B=A' S' B, A S C= A' S' C' y B S C=B S' C' no están colocados de la misma manera. En efecto, para poder sobreponer el triángulo A B C sobre su igual

A' B C', se necesita invertir el triedro S y hacerlo tomar la posicion S A' B C', que como verémos más adelante (648), es *simétrica* con respecto á la de S'. Esta observacion de que la igualdad de todas las partes de un triedro no implica que puedan sobreponerse sino en el caso de que sus partes constitutivas, caras y diedros, estén agrupadas en el mismo órden, se refiere igualmente á las dos primeras condiciones de igualdad de los triedros.

En el número 634 considerarémos un 4° caso de igualdad de los triedros, y es cuando están formados por diedros iguales.

633.—*Si desde un punto* S (fig. 293) *tomado en el interior de un ángulo triedro* s' *se bajan perpendiculares* S A, S B *y* S C *sobre sus tres caras y se hacen pasar planos por las perpendiculares, se formará un segundo ángulo triedro* S *cuyos ángulos planos* A S B, B S C *y* C S A *son respectivamente suplementos de los ángulos diedros* s' D, s' E *y* s' F *opuestos del primer triedro* s'. *Recíprocamente las caras del triedro* s' *serán suplementos de los ángulos diedros del triedro* S.

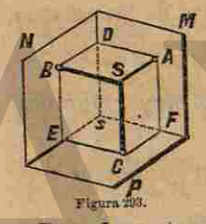


Figura 293.

En el número 627, considerando el cuadrilátero S A D B en el que los ángulos en A y en B son rectos, hemos demostrado que el ángulo A S B es suplemento del ángulo A D B que es la medida del diedro s' D, y como la misma demostracion es aplicable á los cuadriláteros S B E C y S C F A queda probada la proposicion directa.

Para demostrar que las caras del triedro s' son suplementos de los ángulos diedros segun S A, S B y S C, considerarémos el cuadrilátero D s' F A. Por pasar el plano A C por las rectas S A y S C perpendiculares á los planos M s' y P s', será perpendicular á la vez á ambos (622) y á su interseccion comun s' F (626), luego el ángulo A F s' es recto. Por pasar el plano A B por las perpendiculares S A y S B á los planos M s', y N s', será perpendicular á la vez á ambos y á su interseccion s' D, luego el ángulo s' D A es recto. Así es que

A F s'+F s' D+s' D A+D A F=4 rectos (445).

A F s'+s' D A=2 rectos.

restando resulta F s' D+D A F=2 rectos

pero F s' D es la cara del triedro s', y D A F es la medida del diedro A S, por ser esta arista perpendicular á M s' y por consiguiente á las rectas D A y A F que pasan por su pié.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Del mismo modo demostrariamos que las otras caras de s' son suplementos de los diedros opuestos de S.

Dos triedros tales como S y s' se llaman *suplementarios*, y un triedro cualquiera tiene siempre otro que le es suplementario.

Si llamamos d, d' y d" los ángulos diedros del triedro s', segun las aristas E s', D s' y F s', y representamos por c, c' y c" los ángulos B S C, B S A y A S C de las caras del triedro suplementario S, por ser igual á dos ángulos rectos d+c, d'+c', y d"+c", tendrémos:

$$d+d'+d''+c+c'+c''=6 \text{ rectos} \ldots . (1)$$

y como (630) $c+c'+c''<4$ rectos

restando esta desigualdad de la ecuacion, resulta:

1° que $d+d'+d''>2$ rectos

y trasladando en la [1] tendrémos $d+d'+d''=6$ rectos$-(c+c'+c'')$

lo que significa 2° que $d+d'+d''<6$ rectos

luego *la suma de los ángulos diedros de un triedro es mayor que dos ángulos rectos y menor que seis.*

634.—*Dos ángulos triedros* s *y* s' *que tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales, serán iguales.*

Para que los triedros que hemos llamado s y s' sean iguales, tendrémos que deducir que los ángulos planos de sus caras lo son. Si llamamos S y S' dos triedros respectivamente suplementarios de s y de s'; siendo los ángulos diedros de s respectivamente iguales á los de s', los triedros S y S' tendrán sus caras respectivamente iguales, por ser estas caras suplemento de los ángulos diedros de s y de s', y por tanto [632—3°] los triedros S y S' serán iguales. Ahora bien: siendo iguales los ángulos diedros de S y S' las caras de sus suplementarios s y s' lo serán, que es lo que se debia demostrar.

635.—Un poliedro toma el nombre de *tetraedro* cuando está formado por la reunion de 4 planos; el de *pentaedro* cuando lo está por 5 planos; el de *exaedro* si lo forman 6; *eptaedro*, si lo forman 7 caras, etc.

636.—*Dos ángulos poliedros son iguales: 1° cuando tienen sus ángulos diedros iguales formados por ángulos planos respectivamente iguales y colocados de la misma manera; y 2° cuando tienen sus aristas paralelas y distribuidas en el mismo órden* (fig. 294).

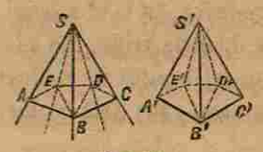


Figura 294.

1° Si los poliedros S y S' tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales formados por caras iguales dispuestas en el mismo órden, y si por una de sus aristas S B y S' B' tiramos planos á todas las demás, para probar que son iguales demostrarémos que lo son los triedros en que quedan descompuestos.

El triedro S A B E=S' A' B' E' por tener el diedro S A=S' A' formado por ángulos iguales A S B=A' S' B' y A S E=A' S' E' [632—1°] De esto resulta: 1° que el ángulo diedro A E S B=A' E' S' B', y 2°, que la cara E S B=E' S' B'.

Para demostrar que el triedro S E B D=S' E' B' D', tenemos: que si de los ángulos diedros A E S D=A' E' S' D' restamos los iguales

A E S B=A' E' S' B'

nos queda B E S D=B' E' S' D'

formados por las caras iguales E S B=E' S' B' y E S D=E' S' D' luego [632—1°] los triedros que consideramos son iguales; pudiendo demostrarse lo mismo con los S B D C y S' B' D' C'.

2° Si las aristas de los poliedros S y S' son paralelas y están distribuidas en el mismo órden, los ángulos planos serán iguales [616], y por serlo éstos lo serán tambien los ángulos diedros de los triedros en que puedan descomponerse [631], luego serán iguales las partes de ambos poliedros.

637.—*La suma de los ángulos planos A S B, B S C.... (fig. 295) formados en el vértice S de un poliedro es menor que cuatro rectos.*

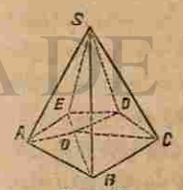


Figura 295.

Cortemos el poliedro por un plano A B C D E, tomemos en su interior un punto O y reuniéndolo con los vértices A, B, C.... resultarán en O y en S tantos triángulos como lados tiene el poliedro. Para simplificar

harémos la suma de los ángulos A O B+B O C+C O D....=O
,, ,, ,, A S B+B S C+C S D....=S

Como los ángulos en O valen 4 rectos, vamos á demostrar que S<O.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Siendo el número de triángulos formados al rededor de O el mismo que el de los formados en S, y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, la suma de los ángulos de todos los triángulos formados al rededor de O será igual á la suma de los ángulos de los triángulos en S. Esto es

$$O+E\,A\,B+A\,B\,C+\ldots.=S+S\,A\,E+S\,A\,B+S\,B\,A\ldots.[1]$$

Por otra parte [629] $E\,A\,B<S\,A\,E+S\,A\,B$

$A\,B\,C<S\,B\,A+S\,B\,C$, etc.

sumando ordenadamente estas desigualdades

$$E\,A\,B+A\,B\,C+\ldots.<S\,A\,E+S\,A\,B+S\,B\,A+S\,B\,C+\ldots.[2]$$

restando los términos de esta desigualdad de los de la ecuacion [1] como cuando el sustraendo aumenta, la resta disminuye [49], resulta que

ángulos en $O>S$

pero como los ángulos en O valen cuatro rectos, se infiere que la suma de los ángulos planos formados en el vértice S de un poliedro es menor que cuatro rectos.

CUERPOS, O SOLIDOS REGULARES.

638.—*Se llaman cuerpos, ó sólidos regulares, los que están limitados por caras que todas son polígonos regulares iguales entre sí.*

Vamos á demostrar que solo pueden formarse *cinco cuerpos regulares;* fundándonos en que la suma de los ángulos planos de un poliedro tiene que ser menor que 4 rectos, y en que el valor del ángulo de un polígono regular se determina por la fórmula: [467—II] $A=\frac{2.90°(n-2)}{n}$

en la que n representa el número de lados del polígono Por medio de esta fórmula se encuentra que el valor del

ángulo del triángulo equilátero = 60°
,, del cuadrado = 90°
,, del pentágono regular = 108°
,, del exágono ,, = 120°

Ahora bien: con 3 triángulos equiláteros se puede formar un ángulo sólido ó poliedro, supuesto que $3\times60°=180°<360°$ ó 4 rectos.

El cuerpo sólido que resulta es el *tetraedro,* que tiene 4 caras triangulares y cada uno de sus ángulos poliedros lo forman tres triángulos equiláteros.

Con 4 triángulos equiláteros tambien puede formarse un ángulo sólido, porque $4\times60°=240°<360°$. El cuerpo sólido que resulta se le llama *octaedro* compuesto de 8 caras triangulares y cada uno de sus 6 ángulos poliedros consta de 4 triángulos.

Con 5 triángulos equiláteros todavia puede formarse un ángulo sólido, porque $5\times60°=300°<360°$. El cuerpo sólido que resulta se llama *icosaedro,* y está compuesto de 20 caras triangulares y cada uno de sus 12 ángulos poliedros consta de 5 triángulos.

Con 6 triángulos equiláteros no puede formarse un ángulo poliedro, porque como $6\times60°=360°$, en vez de poliedro resultaria una figura plana, y con más de 6 triángulos no puede formarse ningun ángulo poliedro supuesto que 60° por más de 6 da un producto mayor que 360°.

Con tres cuadrados sí puede formarse un ángulo sólido, porque $3\times90°=270°<360$. El sólido regular que resulta es el *cubo* limitado por 6 cuadrados, y sus ocho ángulos poliedros formados por 3 cuadrados. Con cuatro ó más cuadrados no se puede formar un ángulo sólido, porque 90° multiplicado por 4 da 4 ángulos rectos y por más de 4 da un producto superior á 360°.

Con tres pentágonos regulares puede formarse un ángulo sólido, porque $3\times108°=324<360°$. El cuerpo regular que resulta es el *dodecaedro pentagonal* compuesto de 12 caras, y sus 20 ángulos poliedros están formados por tres pentágonos regulares. Como $4\times108°=432>360°$, resulta que no puede formarse ningun poliedro con la reunion de 4 ni con mayor número de pentágonos.

El ángulo del exágono regular vale 120°, y como $3\times120°=360°$, resulta que ningun poliedro puede formarse con el exágono, sucediendo otro tanto con el heptágono, el octágono y demás polígonos regulares cuyos ángulos valen más que el del exágono.

En resúmen, se ve que no pueden formarse más que cinco cuerpos regulares que son el *tetraedro,* el *octaedro* y el *icosaedro* con el trián-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

gulo; el *cubo* con el cuadrado y el *dodecaedro pentagonal* con el pentágono.

Darémos las siguientes reglas para determinar el número de aristas y el de los vértices de cualquiera de los cinco cuerpos regulares, conociendo la especie y el número de sus caras.

Para determinar el número total de aristas de un cuerpo regular, multiplíquese el número de lados de una cara por el número de caras de que está formado, y tómese la mitad.

Tomando separadamente las caras del sólido regular que se considera, la suma de las aristas seria el producto de las aristas de una cara por el número de caras; pero como cada arista es comun á dos caras; es preciso tomar la mitad de ese producto para obtener las aristas del cuerpo.

Para determinar el número de vértices ó ángulos poliedros de un cuerpo regular, multiplíquese el número de ángulos de cada cara por el de caras que limitan el cuerpo, y divídase el producto por el número de caras que forman cada vértice.

El número de ángulos planos de un cuerpo regular, es igual al producto del número de ángulos de cada cara por el de sus caras, y como en cada ángulo poliedro concurren cierto número de caras, resulta que el número de ángulos poliedros será igual al primer producto dividido por el número de caras que forman cada vértice.

SEMEJANZA DE LOS CUERPOS SOLIDOS.

639.—*Se llaman cuerpos ó poliedros semejantes los que tienen sus caras semejantes, sus aristas proporcionales é iguales tanto sus ángulos diedros como sus poliedros.*

640.—*Dos tetraedros S A B C y S' A' B' C' (fig. 296) son semejantes cuando tienen un ángulo diedro igual, A B = A' B', formado por dos caras semejantes colocadas de la misma manera.*

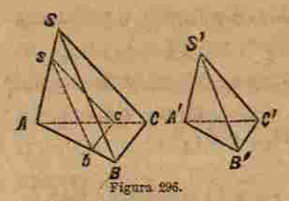


Figura 296.

Si sobrepusiéramos el tetraedro S' A' B' C' poniendo A' en A, A' B' sobre A B y el plano A' B' C' sobre A B C, á causa de la igualdad de los ángulos diedros A B y A' B', la cara A' B' S' coincidiria con el plano de la A B S, y por la semejanza de las caras, siendo iguales sus respectivos ángulos, A' S' caerá sobre la arista A S, B' S' segun b s paralela á B S, y B' C' segun b c igualmente paralela á B C; pues el ángulo A B S = A' B' S' y A B C = A' B' C'. Así es que el tetraedro S' A' B' C' definitivamente coincidirá con s A b c.

Ahora bien, el plano b s c que pasa por b s paralela á B S y por b c paralela á B C determina una cara paralela á S B C, y la interseccion s c será paralela á S C. Así es, que las caras todas de los tetraedros serán semejantes, y por esto proporcionales sus aristas. Los diedros son iguales porque están coincidiendo ó formados por planos paralelos, y los respectivos triedros son iguales por estar formados por ángulos planos iguales distribuidos en el mismo órden (63^2—3^2).

Se ve que *un plano s b c paralelo á una de las caras de un tetraedro, determina otro que le es semejante.*

641.—*Dos tetraedros son semejantes cuando lo son las caras de que están formados.*

De la semejanza de las caras se deduce que las aristas son proporcionales, así como que los ángulos planos de los triedros son iguales. Siendo iguales estos ángulos [631] lo serán los ángulos diedros y tambien los ángulos triedros [632—3°]

642.—*Se llama pirámide un cuerpo S A B C D E* [fig. 297] *limitado por un polígono cualquiera A B C D E, que le sirve de base, y por triángulos S A B, S B C.... que concurren en un mismo punto S, llamado vértice de la pirámide.*

Las aristas S A, S B.... [fig. 297] *de una pirámide quedan cortadas en partes proporcionales por dos planos paralelos A C y a c.*

Siendo paralelos los planos A C y a c, lo serán las rectas A B y a b, B C y b c.... [604] intersecciones de los planos de las caras de la pirámide con los planos A C y a c. Estas rectas paralelas dan [510]:

$$S\,A : S\,a :: S\,B : S\,b :: A\,B : a\,b$$
$$S\,B : S\,b :: S\,C : S\,c :: B\,C : b\,c$$
$$S\,C : S\,c :: S\,D : S\,d :: C\,D : c\,d$$

etc.

y como estas proporciones tienen una razon comun, se infiere:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

1° S A : S a :: S B : S b :: S C : S c....

que es lo que se queria demostrar;

y 2° A B : a b :: B C : b c :: C D : c d....

esto es, *los lados de los polígonos que resultan en una pirámide por la interseccion de dos planos paralelos, son proporcionales.*



Figura 297.

643.—*Si una pirámide* S (fig. 297) *se corta por un plano* a c *paralelo á su base, resultará un polígono* a b c d e *semejante á la base* A B C D E.

Acabamos de ver que los lados de los polígonos A B C D E y a b c d e son proporcionales, y como además los ángulos cuyos vértices quedan en la misma arista son iguales por estar formados por lados paralelos (616), serán semejantes.

644.—*Las áreas de los polígonos que resultan cortando una pirámide S* (fig. 297) *por dos planos paralelos, son proporcionales á los cuadrados de sus distancias S H y S h al vértice.*

Por ser los polígonos semejantes, se tiene (519):

sup. de A B C D E : a b c d e :: A B² : a b².... (1)

Bajando la perpendicular S H sobre los planos paralelos, y tirando las rectas A H y a h, resultan los triángulos semejantes S A H y S a h, que dan:

S A : S a :: S H : S h

por otra parte S A : S a :: A B : a b

luego S H² : S h² :: A B² : a b².... [2]

suprimiendo la razon comun en las proporciones [1] y [2] se tiene:

áreas A B C D E : a b c d e :: S H² : S h²

que es lo que se debia demostrar.

645.—*Toda pirámide S A C* (fig. 297) *cortada por un plano a c paralelo á su base, da otra pirámide S a c semejante á la primera.*

Las caras de las dos pirámides son semejantes, por lo cual todas sus aristas son proporcionales. Siendo iguales los ángulos planos de las caras que constituyen cada ángulo poliedro, serán iguales los ángulos de los triedros en que pueden descomponerse, haciendo pasar planos por el vértice S y los ángulos de la base [631], y los poliedros mismos serán iguales por estar formados de diedros y caras iguales colocadas de la misma manera [636].

646.—*Dos pirámides S A C y S' A' C'* [fig. 298] *formadas por caras semejantes y dispuestas en el mismo órden, son semejantes.*

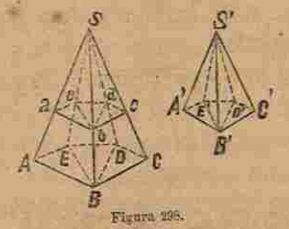


Figura 298.

Por la semejanza de las caras serán proporcionales las aristas é iguales los ángulos planos que forman los poliedros. De esta igualdad de los ángulos planos se origina naturalmente la de los ángulos diedros de los triedros en que pueden descomponerse las pirámides, haciendo pasar planos por los vértices S y S' y los ángulos de las bases [631], y á su vez la de los poliedros. Así, por ejemplo, la igualdad de las caras que constituyen los poliedros S y S' produce la de los diedros; luego los poliedros S y S' serán iguales [636], y si los sobrepusiéramos en S a c, siendo proporcionales las aristas, los planos A C y a c serian paralelos, y por esto semejantes las pirámides S A C y S' A' C'.

647.—*Dos pirámides S A C y S' A' C'* [fig. 298] *serán semejantes si están formadas de tetraedros semejantes dispuestos en el mismo órden.*

Al ser los tetraedros S A E B, S B E D y S B D C respectivamente semejantes á los S' A' E' B', S' B' E' D', etc., las caras que forman los poliedros S y S' serán semejantes, por lo cual los ángulos planos serán iguales y las aristas proporcionales, de lo que se deduce que los ángulos diedros y los triedros de las pirámides serán iguales, y por lo mismo semejantes las pirámides que consideramos.

Como lo que hemos dicho y demostrado de las pirámides es aplicable á todos los poliedros, se infiere:

1° Que dos poliedros serán semejantes cuando tengan sus caras semejantes dispuestas en el mismo órden, formando ángulos diedros iguales.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

2° Que dos poliedros son semejantes cuando tirando respectivamente de sus ángulos sólidos homólogos planos que pasen por sus aristas, quedan compuestos de tetraedros semejantes dispuestos en el mismo órden.

3° Recíprocamente, los poliedros semejantes pueden descomponerse en pirámides semejantes, haciendo pasar planos por dos de sus ángulos homólogos y sus respectivas aristas.

FIGURAS SIMETRICAS.

648.—Dos puntos A y A' son *simétricos con respecto á un punto* o cuando las distancias o A y o A' son iguales. El punto o se llama *centro de simetría* [fig. 299].



Figura 299.

Se dice que los puntos A y A' son *simétricos respecto á una recta ó eje de simetría* x y, cuando x y divide en dos partes iguales la recta A A' y le es perpendicular.

Los mismos puntos A y A' son *simétricos con respecto á un plano de simetría* P, cuando la recta A A' es perpendicular al plano P, y éste la divide en dos partes iguales.

Se llaman *figuras simétricas* respecto á *un centro*, á *un eje* ó á *un plano*, aquellas cuyos puntos son de dos en dos simétricos con relacion á este centro, á este eje ó á este plano.

649.—*Dos figuras simétricas con relacion á un eje son iguales.*

Si, por ejemplo, tenemos el triángulo A B C simétrico con A' B' C' é hiciéramos girar la parte A B C al rededor de D o F, cada uno de los puntos A, B, C coincidirá con sus simétricos A', B' y C' al girar 180°, supuesto que B D es perpendicular á D o F é igual á D B' sucediendo otro tanto con o A y F C respecto á o A' y á F C'.

650.—*La simetría con relacion á un punto ó á una recta, envuelve siempre la condicion de simetría con respecto á un plano.*

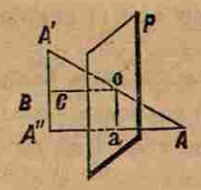


Figura 300.

En efecto, sean A y A' dos puntos simétricos con relacion al centro o (fig. 300). Hagamos pasar un plano P por o y tiremos B o perpendicular al plano. Vamos á demostrar que el punto A'', simétrico de A', con respecto al eje B O lo es igualmente de A con relacion al plano P.

Sea a el punto donde A A'' encuentra al plano P. Siendo C el medio de A' A'' y o el medio de A A', A A'' será paralela á o C (511), y por consiguiente perpendicular al plano P. La recta o a perpendicular á o C será paralela á A' A'', y como pasa por la mitad de A A', el punto a será igualmente el medio de A A''; luego los puntos A y A'' son simétricos con relacion al plano P.

Se ve, pues, por una parte, que la simetría de los puntos A y A' respecto á un centro, produce la simetría respecto á un plano, y por otra que la simetría de A'' y A' con relacion á un eje B o, envuelve igualmente la simetría respecto al plano entre A'' y A. Ahora, como lo que se ha probado de un punto es aplicable á todos los de una figura, resulta que nos bastará ocuparnos de la simetría con relacion á un plano.

651.—*Si tres puntos A, B y C* (fig. 301) *están en línea recta, sus simétricos A', B' y C' con relacion á un plano lo estarán igualmente.*

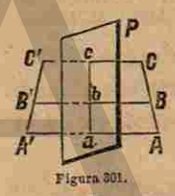


Figura 301.

Las rectas A A', B B' y C C', por ser perpendiculares al plano P, serán paralelas, y por pasar por la recta A B C determinan un plano cuya interseccion con P es la recta a b c. Si se hiciera girar A B C al rededor de a c por ser perpendiculares á c a é iguales las rectas C c y c C', b B y b B', a A y a A', los puntos A, B y C caerian sobre A', B' y C', y estando los primeros en línea recta, se infiere que tambien lo estarán sus simétricos.

652.—En consecuencia, *para que dos rectas sean simétricas, basta que lo sean dos de sus puntos.*

653.—Se deduce tambien (651) *que la distancia de dos puntos es igual á la de sus simétricos.*

654.—*Cuando cuatro puntos A, B, C y D* (fig. 302) *están en un mismo plano, sus simétricos A' B' C' y D' tambien estarán en un plano.*

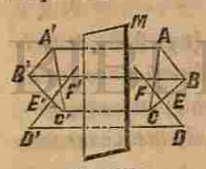


Figura 302.

Tiremos la recta D F que encuentre á B C y á C A en E y en F. Estando D, E y F en línea recta lo estarán igualmente sus simétricos D', E' y F'; pero E' como simétrico de E estará sobre la recta B' C' y F' sobre A' C', luego D' que pertenece á la

recta E' F' tendrá que estar sobre el mismo plano que el ángulo B' C' A', que es lo que se debia demostrar.

655.—*De esto resulta que, para que dos planos sean simétricos basta que lo sean tres de sus puntos respectivamente, y para que dos polígonos ó poliedros sean simétricos, es suficiente que lo sean sus respectivos vértices.*

656.—*Los triángulos, así como los ángulos simétricos, son iguales.*

En efecto, en la figura 302 se tiene: A B=A' B', B C=B' C', y A C=A' C', luego los triángulos A B C y A' B' C' serán iguales.

Ademas de la igualdad de los triángulos resulta que los ángulos simétricos son iguales: A C B=A' C' B', C A B=C' A' B', etc.

657.—*Dos poliedros simétricos tienen todas sus partes respectivamente iguales.*

Las caras correspondientes serán iguales, porque pueden descomponerse en triángulos simétricos y por lo mismo iguales. Si se consideran tres aristas de un poliedro y sus correspondientes del otro, por una parte por ser simétricas serán iguales, y por otra los ángulos simétricos que forman tambien lo serán. Siendo iguales los ángulos planos, lo serán los diedros de los triedros en que pueden descomponerse los poliedros. Esto es, serán respectivamente iguales sus aristas, sus caras, sus ángulos diedros y los triedros de que están formados.

SUPERFICIES DE LOS CUERPOS.

658.—*Se llama prisma á un cuerpo ó poliedro A c* (fig. 303) *terminado por superficies planas, siendo las bases A D y a d polígonos iguales y paralelos, y las caras laterales A b, B c.... paralelógramos, formado cada uno de ellos por los lados A B y a b.... de las bases respectivamente iguales.*

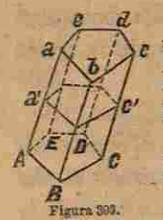


Figura 303.

El prisma puede considerarse engendrado por el movimiento de una recta A a que constantemente permanece paralela á sí misma y uno de sus extremos A recorre el polígono A B C D E.

Las rectas A a, B b.... se llaman aristas laterales, y las A B, B C....a b, b c.... aristas de las bases.

Altura del prisma es la distancia de sus bases. Un prisma es *recto* ú *oblícuo*, segun que sus aristas son perpendiculares ú oblícuas con relacion á sus bases. Se dice que es *triangular cuadrangular, pentagonal....* cuando su base es un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono....

Se llama *prisma regular* el que ademas de ser recto, tiene por base un polígono regular.

Todas las caras laterales de un prisma son paralelógramos, puesto que segun la definicion de prisma a b=A B y paralelas (450).

Las bases A D y a d, y las secciones como a' c' paralelas á éstas, son iguales, supuesto que por una parte son iguales los lados de los polígonos de estas secciones y por otra lo son sus ángulos por estar formados por lados paralelos (616).

Un prisma queda completamente determinado cuando se conoce la posicion y magnitud de su base y de una arista.

659.—*La área lateral de un prisma oblícuo es igual al producto de una de sus aristas A a por el perímetro de la seccion a' b' c' d'* (figura 304) *perpendicular á ésta.*

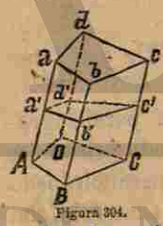


Figura 304.

El área lateral del prisma es igual á la suma de las áreas de las caras laterales que lo forman; pero como estas caras son paralelógramos, la superficie de cada una es igual al producto de su base por su altura. Las bases de los paralelógramos son las aristas del prisma, que todas son iguales á A a, y sus alturas son los lados de la seccion a' b' c' d' que por ser perpendicular á una de ellas lo será á todas las demas. Así es que haciendo la suma de las áreas de los paralelógramos, resulta que la área lateral del prisma es igual al producto de una de sus aristas por el perímetro de la seccion que le es perpendicular.

660.—*La área lateral de un prisma recto es igual al producto de su arista por el perímetro de su base.*

Porque en el caso de ser recto el prisma, la seccion perpendicular á su arista es la de su base. De otro modo, si en la figura 304 la porcion de prisma a' c la colocáramos en la parte inferior haciendo coincidir las

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

bases iguales a c con A C, el prisma oblícuo se convierte en recto conservando la misma área lateral, cuyo valor es el producto de su arista por el perímetro de su nueva base a' b' c' d'.

661.—*La área total de un prisma cualquiera es igual á la lateral, más la de sus bases. La total de uno regular es igual al producto del perímetro de su base por la suma de su arista con el radio recto de la base.*

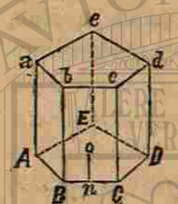


Figura 305.

La primera parte no necesita demostracion.

Si llamamos A la área total del prisma regular A d [fig. 305], p el perímetro A B C D E de la base, y r el radio recto o n de este perímetro, tendrémos:

$$A = A\,a \times p + 2.\,p \times \tfrac{1}{2} r = p\,(A\,a + r)$$

que es lo que se debia demostrar.

662.—*La área de un trozo de prisma A d* (fig. 306) *es igual á la suma de las áreas de sus caras.*

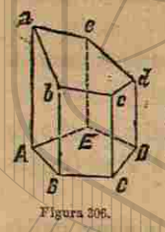


Figura 306.

Se llama trozo de prisma la parte de un prisma comprendido entre una de las bases A D y la seccion hecha por un plano a d que no es paralelo á la base.

663.—*Se llama paralelipípedo un prisma. A c* (fig. 307), *que tiene por base un paralelógramo.*

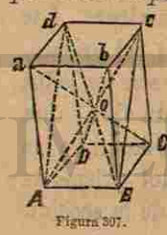


Figura 307.

En este cuerpo las caras opuestas son paralelógramos iguales y paralelos. En efecto, en todo prisma las bases A C y a c son iguales, pero por ser paralelipípedo el sólido serán paralelógramos. Las caras laterales son paralelógramos, y para persuadirse de que son iguales y paralelas por ej. las caras A b y D c, basta observar que los lados del ángulo A B b son respectivamente iguales, y paralelos á los del D C c (446). Lo mismo se verifica con las caras B c y A d por razon del paralelismo é igualdad de las rectas de los ángulos b B C y a A D.

Recíprocamente, *todo cuerpo compuesto de seis caras paralelas de dos en dos, es paralelipípedo.*

Por ser a c paralela á A C, será la recta a b paralela á A B. Por ser

B c paralela á A d, será B b paralela á A a; luego la cara A b será paralelógramo; pudiendo demostrarse igualmente que lo son todas las demás.

Un paralelipípedo está completamente determinado cuando se conoce uno de sus triedros A y la posicion y magnitud de las tres aristas que lo forman. Cualquiera de sus caras puede tomarse por base.

664.—*La seccion A B c d que determina el plano que pasa por dos aristas A B y d c opuestas de un paralelipípedo, es un paralelógramo.*

Siendo a b respectivamente igual y paralela á A B y á d c, A B y d c serán iguales y paralelas (602), y por lo mismo la figura A c será paralelógramo (450).

665.—*Las diagonales A c, B d, a C y b D* (fig. 307) *de un paralelipípedo, se cortan en partes mútuamente iguales y en el mismo punto o.*

Por ser la seccion A B c d un paralelógramo, las diagonales A c y B d se cortarán en partes mútuamente iguales en el punto o (451). Si consideramos ahora la seccion D A b c hecha por las aristas opuestas D A y b c, resulta que la diagonal A c de este nuevo paralelógramo, debe ser cortada por la D b en dos partes iguales, y por lo mismo tendrá que pasar por el mismo punto o, y como otro tanto puede demostrarse respecto á la diagonal a C, resulta que las cuatro diagonales se cortan en partes mútuamente iguales en el punto o.

666.—*Cuando la base A C* (fig. 308) *de un paralelipípedo es un rectángulo, y además las aristas laterales son perpendiculares á las bases, se dice que el paralelipípedo es rectangular.*

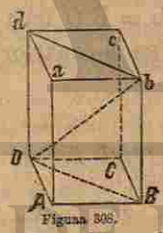


Figura 308.

En este caso todas las caras son rectángulos, y cada una de las aristas es perpendicular á las que pasan por sus extremos, así como á los planos sobre que cae.

Un paralelipípedo recto A c queda dividido en dos prismas triangulares iguales A B D a y C B D c por un plano d b B D que pasa por las diagonales d b y D B de sus bases.

En efecto si hiciéramos coincidir las aristas iguales A a y C c, siendo las tres caras que forman el triedro C respectivamente iguales á las caras que forman el triedro A (632—3°) estos triedros coincidirian. Por la misma razon el triedro c coincidiria con el a, y siendo comun á los dos prismas triangulares la cara d b B D, se infiere que serán iguales los prismas triangulares A B D a y C B D c.

667.—*El cuadrado de la diagonal D b* (fig, 308) *de un paralelipípedo rectangular, es igual á la suma de los cuadrados de las tres aristas que forman uno de sus triedros.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Por ser rectángulo en B el triángulo b D B se tiene:

$$D\,b^2 = B\,b^2 + D\,B^2 \ldots\ (1)$$

siendo el triángulo D A B rectángulo en A, se tiene:

$$D\,B^2 = D\,A^2 + B\,A^2 \ldots\ (2)$$

sustituyendo en la ecuacion (1) y reemplazando por D A su igual B C resulta:

$$D\,b^2 = B\,b^2 + B\,C^2 + B\,A^2 \ldots\ (3)$$

que es lo que se debia demostrar.

Como las aristas de los triedros son respectivamente iguales, resulta que en el paralelipípedo rectangular las diagonales son iguales, además de verificarse en él las propiedades de los prismas y de los paralelipípedos en general.

668.—*Se llama cubo un paralelipípedo rectángular cuyas seis caras* (fig. 309) *son cuadrados.*



Figura 309.

En el cubo las caras son todas iguales entre sí, así como sus doce aristas. Las caras y las aristas son respectivamente perpendiculares. La gran simetría del cubo ha hecho que se le tome para unidad de volúmen en los cuerpos.

Siendo las aristas del cubo A B = B b = B C iguales entre sí, introduciendo estos valores en la ecuacion (3) del párrafo anterior resulta:

$$D\,b^2 = 3\,A\,B^2$$

esto es, *en el cubo el cuadrado de su diagonal es igual al triple del cuadrado de una de sus aristas.*

669.—*Se llama superficie de revolucion la que puede concebirse engendrada por una línea, recta ó curva, A C B D* (fig. 310) *que gira al rededor de una recta A B que le sirve de eje.*



Figura 310.

El carácter distintivo de esta clase de superficies, es, que sea cual fuere la línea generatriz A C D B, cualquier plano perpendicular al eje produce por su interseccion una circunferencia de círculo. En efecto, una recta cualquiera D o perpendicular al eje, describirá un plano perpendicular al eje, y como la distancia o D permanece fija, el punto D trazará una circunferencia de círculo.

670.—*Se llama cilindro un prisma cuyas bases paralelas A B y a b* (fig. 311) *son círculos.*

Aunque las bases pueden ser otras curvas, en la geometría elemental no se considera sino el cilindro de base circular.

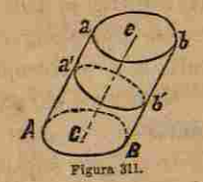


Figura 311.

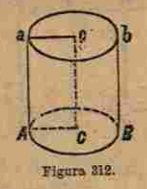


Figura 312.

La línea C c que une los centros de las bases, se llama *eje del cilindro.* Cuando el eje no es perpendicular á las bases del cilindro, se llama *oblícuo,* y cuando el eje es perpendicular á las bases (fig. 312) *el cilindro es recto.* La *altura* de un cilindro es la distancia de sus bases.

Lo mismo que un prisma, el cilindro puede concebirse originado por el movimiento de una recta A a paralelamente al eje, y de la que uno de sus extremos recorre una circunferencia de círculo. De esto resulta que cualquiera seccion paralela á las bases produce un círculo igual á éstas.

El cilindro recto (fig. 312) puede concebirse engendrado por la rotacion de un rectángulo A c al rededor de uno de sus lados C c, que viene á ser el eje del cilindro.

671.—Como el cilindro es un prisma de base circular, y el círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, resulta que *la área lateral del cilindro oblícuo es igual al producto de su generatriz A a* (fig. 311) *por la longitud de la curva a' b' de la seccion que le es perpendicular.* (659)

672.—Por la misma consideracion *la área lateral del cilindro recto es igual al producto de su altura por la circunferencia del círculo de su base.*

Si llamamos s la área lateral del cilindro, r el rádio de su base, h su altura y π la razon de la circunferencia al diámetro igual á 3'141593, la expresion del área lateral del cilindro recto será:

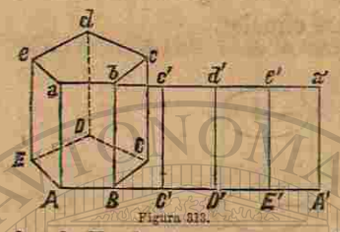
$$S = 2\,\pi\,r\,h$$

673.—*La área total de un cilindro es igual á la lateral mas la de sus dos bases.*

La área total del cilindro recto tendrá en consecuencia por expresion:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ó $$S = 2\pi r h + 2\pi r^2$$
$$S = 2\pi r (h + r)$$

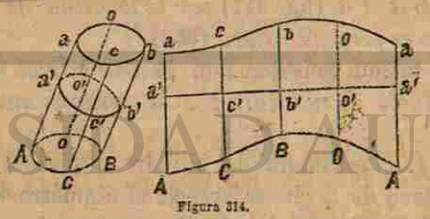

Figura 313.

674.—Si en el prisma A d [figura 313] concebimos que la cara B c gira al rededor de la arista B b hasta colocarse en la prolongacion del plano de la cara A b se formará el reçtángulo A c'. De la misma manera, si nos imaginamos que la cara E a gira al rededor de E e hasta ponerse en el plano de e D, en seguida que las dos caras se colocaran en el plano de c D, y las tres caras girando sobre C c se pusiesen en el plano de C b, y girando por último todo el sistema al rededor de B b se colocara en la prolongacion del plano de la primera cara A b, resultaria la superficie lateral del prisma tendida en plano é igual al rectángulo A a'. Las partes que componen este rectángulo son respectivamente iguales á las que forman la área lateral del prisma. La área de este rectángulo es equivalente á la lateral del prisma, pues una y otra tienen por valor el producto de la arista A a por A A' que es el perímetro de la base.

La figura A a a' A' se llama el *desarrollo* de la superficie lateral del prisma A d.

Igualmente el *desarrollo* de un cilindro recto es un rectángulo cuyas bases son las circunferencias del cilindro, y su altura la de este cuerpo.

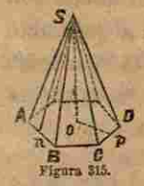
La superficie lateral de un cilindro oblícuo A b [fig. 314] tambien puede desarrollarse en plano. Para esto tirarémos la recta a' a' igual a


Figura 314.

la curva que daria la seccion hecha perpendicularmente á la generatriz A a, que es a' c' b' o' a'; sobre esta recta se llevarán las partes a' c', c' b'.... respectivamente iguales á las partes de la curva rectificadas a' c', c' b'....; por los puntos de division a', c'.... se levantarán perpendiculares y sobre ellas se llevarán las partes a' a=a' a de la generatriz, a' A =a' A, c 'c = c' c, c' C = c, C.... y se tendrá la área A a'' ter-

minada por dos curvas paralelas, que será el desarrollo de la superficie lateral del cilindro oblícuo.

675.—*La área total de una pirámide S A D* [fig. 315] *es igual á la suma de las áreas de los triángulos que forman sus caras y la del polígono A B C D.... de su base.*


Figura 315.

676.—*La área lateral de una pirámide regular S A D* (fig. 315) *tiene por valor la mitad del producto del perímetro de su base por el apotema S n.*

Se llama *apotema, la altura S n de uno de los triángulos de las caras de la pirámide.* Cuando ésta es regular, su base es un polígono regular y su altura S o es una perpendicular que cae en el centro de la base. De esto resulta que las caras de una pirámide regular son triángulos iguales, pues por una parte sus bases A B, B C.... son lados de polígono regular, y por otra los lados S A, S B.... son oblícuas que se separan igualmente del pié de la perpendicular. Las alturas de estos triángulos son todas iguales á S n.

Así, pues, la área lateral de la pirámide será igual á

$$\tfrac{1}{2} S n (A B + B C + \ldots.)$$

y si llamamos s esta área, el apotema S n=A, y p el perímetro A B C D de la base, se tendrá:

área lateral de la pirámide $= s = \tfrac{1}{2} p A.$

Para obtener la área total de la pirámide, á la lateral debemos agregarle la del polígono de la base que tiene por valor $\tfrac{1}{2}$ p. r, llamando r el radio recto o p. Así, pues,

área total de la pirámide $= S = \tfrac{1}{2} p A + \tfrac{1}{2} p r$
ó „ „ „ $= S = \tfrac{1}{2} p (A + r)$

677.—Se llama *trozo de pirámide la parte de una pirámide comprendida entre la base A D y la seccion hecha por un plano a d* (fig. 316) *que le es paralelo.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

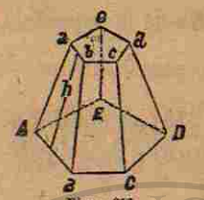


Figura 316.

La área lateral de un trozo de pirámide recta tiene por valor el producto de la altura h de una de sus caras por la semisuma de los perímetros de sus bases.

Las caras del trozo son trapecios iguales, cuyas alturas todas son iguales á h, y como la área de cada trapecio (565) es igual al producto de su altura por la semisuma de las bases A B+a b, la de todo el trozo tendrá por medida el producto de la altura de una de las caras por la semisuma de los perímetros A B C....+a b c de sus bases.

678.—Se llama *cono una pirámide S A B* (fig. 317) *cuya base es un círculo.*

Aunque la base puede ser una curva cerrada cualquiera, en la geometría elemental sólo se considera el cono de base circular.

La recta S o que une el vértice con el centro de la base, se llama *eje* del cono, que *es recto* cuando el eje es perpendicular á la base, y *oblícuo* en el caso contrario. *Altura* del cono es la perpendicular bajada del vértice sobre la base.



Figura 317.

El cono puede concebirse originado por el movimiento de una recta S A sujeta á pasar constantemente por un punto S y recorrer con el otro extremo la circunferencia A B, la cual traza otra capa cónica superior S a b que rara vez se considera. Cuando el cono es recto, como en la figura 317, puede considerarse engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo S o A girando al rededor de uno de sus catetos S o. Por esta razon (669) cualquiera seccion C D hecha paralelamente á la base en el cono, produce un círculo.

679.—*La área lateral del cono recto tiene por valor la mitad del producto de su generatriz S A por la circunferencia de la base.*

Esto resulta de que el cono es una pirámide cuya base es un polígono regular de una infinidad de lados (676). Si llamamos A el lado S A del cono, y r el radio A o de su base, tendrémos:

área lateral del cono $=s=\pi\ r\ A.$

Para obtener la área total debemos agregar la del círculo de la base, por lo que

área total del cono $=S=\pi\ r\ A+\pi\ r^2=\pi\ r\ (A+r)$

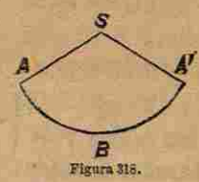


Figura 318.

La área lateral de un cono recto puede desarrollarse en plano, y es un sector de círculo S A B A' (fig. 318) *cuyo rádio es la generatriz S A de la figura 317, y el arco A B A' es igual á la circunferencia de la base.*

En efecto, basta concebir cortada la superficie lateral del cono segun una de sus generatrices S A, para comprender que al extender esta superficie se formaria un sector, supuesto que por una parte todas las generatrices vienen á concurrir al punto S, y por otra todos los puntos de la circunferencia de la base conservan una distancia igual á S A al vértice S. Además, la área del sector (570) y la lateral del cono tienen por valor la misma expresion, pues ambos son iguales á $\frac{1}{2}$ S A×A B A'.

Para determinar el número de grados del ángulo A S A', observarémos que la longitud del arco A B A' que le sirve de medida, es la de la circunferencia del círculo O (fig. 317) base del cono. Por consiguiente conservando las anotaciones de A para el lado S A del cono, y *r* para el radio A O de la base; y representando por *x* el número de grados del ángulo A S A', tendrémos:

longitud del arco A B A'$=2\ \pi\ r$

Por otra parte, conocida esta longitud, se determinará el número de grados del arco A B A' por la proporcion:

circf. A S : arco A B A' :: 360° : x

$$2\ \pi\ A : 2\ \pi\ r :: 360° : x° = \frac{r.\ 360°}{A}$$

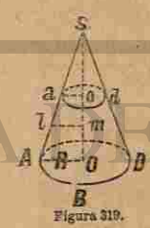


Figura 319.

680.—*La área lateral del trozo de cono recto A D b a* (fig. 319) *tiene por valor el producto de su generatriz A a por la semisuma de las circunferencias de sus bases A D y a b.*

Aun cuando esto es una consecuencia de lo que dejamos probado en el número 677, lo demostrarémos directamente.

Llamemos R el radio de la base inferior cuya circunferencia es $2\ \pi\ R$, r el radio de la base superior cuya circunferencia es $2\ \pi\ r$, y l el lado A a del tronco. La área lateral que buscamos es igual á la del cono S A D ménos la del cono S a b. Representándola por T tendrémos [679]

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$T=\pi R.\ S A-\pi r.\ S a....[1]$$

$$S A=l+S a \text{ y } S A-S a=l$$

sustituyendo $T=\pi R\ (l+S a)-\pi r S a=\pi R l+\pi S a (R-r)....[2]$

Vamos á determinar el valor de S a en funcion de los radios y de l para sustituirlo en esta ecuacion. Comparando los triángulos semejantes S A O y S a o, se tiene:

$$R : r :: S A : S a$$

Dividiendo $$R-r : r :: S A-S a : S a=\frac{r l}{R-r}$$

sustituyendo en la ecuacion [2]

$$T=\pi R l+\frac{\pi r l}{R-r}[R-r]$$

reduciendo y sacando l como factor comun, se tiene por último:

$$T=l[\pi R+\pi r]....[3]$$

que es lo que se debia demostrar.

Considerando el trapecio a o O A [459], en el que l es el medio de A a, se tiene: $l m=\frac{1}{2}[R+r]$

multiplicando por 2π $\quad 2\pi.\ l m=\frac{1}{2}[2\pi R+2\pi r]$

$$2\pi.\ l m=\pi R+\pi r$$

sustituyendo en la ecuacion [3] resulta:

$$T=l\times 2\pi.\ l m$$

Esto es, *la área lateral del trozo de cono recto tiene por valor el producto de su lado por la circunferencia del círculo tirado á distancias iguales de sus bases.*

681.—*Se llama esfera un cuerpo A O B N* [fig. 320] *limitado por una superficie curva cuyos puntos todos están á igual distancia de uno interior C llamado centro.*

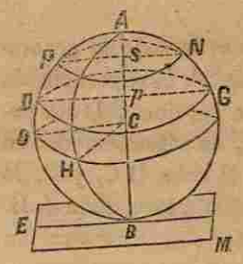


Figura 320.

La esfera puede considerarse engendrada por la revolucion de un semicírculo A D B al rededor de su diámetro A B. Cuando se corta la esfera por un plano que pasa por su centro C, se produce un círculo A O B N que se llama *círculo máximo. Todos los círculos máximos de una esfera son iguales,* porque todos tienen por rádio el de la esfera. De esto resulta que la esfera puede considerarse engendrada por la revolucion de cualquiera de sus círculos máximos.

Un plano, sea cual fuere su direccion, corta la esfera segun un círculo. Si este plano fuera por ejemplo F N, levantando el diámetro A B perpendicular, podria suponerse la esfera engendrada por el semicírculo A F O B girando al rededor de este eje A B, y por consiguiente (669) la seccion hecha por un plano perpendicular al eje, tiene que ser un círculo.

Todo círculo, cuyo centro no coincide con el de la esfera, trazado en su superficie, se llama círculo menor. F N y D G son círculos menores.

Se llama zona la parte de la superficie de la esfera F D G N comprendida entre dos circunferencias, cuyos planos son paralelos.

Se llama casquete esférico, ó zona de una base, la parte de la superficie de la esfera F N A limitada por una circunferencia F N.

682.—Se llama *plano tangente á la esfera el que, como M* (fig. 320), *no tiene mas que un punto B de contacto con ella.*

Como toda recta diversa de C B tirada del centro de la esfera al plano, tiene que ser mayor que su rádio, resulta que el rádio C B es la menor distancia del centro al plano, y por consiguiente le es perpendicular. Recíprocamente, todo plano M perpendicular al extremo de un radio C B será tangente á la esfera, porque debiendo ser cualquiera oblícua mayor que la perpendicular C B, el plano M no podrá tener mas que el punto B de contacto con la esfera.

Si se hace girar un círculo y su tangente B E al rededor del diámetro A B perpendicular á la tangente, se engendrará la esfera y un plano tangente al punto B, porque este plano M es perpendicular al radio C B.

683.—*Cuando un polígono regular A B C....* (fig. 321) *gira al rededor del diámetro A O del círculo inscrito, engendra una superficie que tiene por medida el producto de la circunferencia del círculo inscrito por la proyeccion de la parte del perímetro que se considera sobre el eje A O de revolucion.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

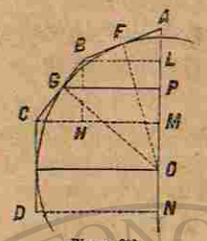


Figura 321.

Para demostrar este principio en toda su generalidad, consideraremos tres casos: 1°, la superficie de un cilindro engendrada por una porcion C D del polígono paralela al eje A O; 2°, la superficie de un trozo de cono engendrada por el lado B C, y 3°, la superficie de un cono engendrada por el lado A B.

1° La superficie del cilindro originado por la rotacion de C D tiene por valor (672): circf. D N × C D y sustituyendo sus iguales: circunferencia G O × M N, que es lo que expresa el principio que vamos demostrando.

2° La superficie de trozo de cono engendrado por la rotacion de B C al rededor del eje tiene por medida (680):

$$C\,B \times \text{circf. } G\,P \ldots . \quad (1)$$

Comparando los triángulos C B H y G O P que son semejantes por tener sus lados perpendiculares, se tiene:

$$C\,B : B\,H :: G\,O : G\,P$$
$$G\,O : G\,P :: \text{circf. } G\,O : \text{circf. } G\,P$$
luego $$C\,B : L\,M :: \text{circf. } G\,O : \text{circf. } G\,P$$

formando el producto de extremos y medios

$$C\,B \times \text{circf. } G\,P = \text{circf. } G\,O \times L\,M$$

y como el primer miembro de esta ecuacion es la área lateral del trozo de cono, se ve que esta segun lo expresado en el segundo miembro tiene por valor igualmente lo que indica el principio que venimos demostrando:

3° La superficie del cono engendrado por la rotacion de A B al rededor del eje tiene por valor (679):

$$\tfrac{1}{2} \text{ circf. } B\,L \times A\,B \ldots . \quad (2)$$

Comparando los triángulos A B L y A O F que son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo A B L = A O F cuyos lados son perpendiculares, se tiene:

$$A\,L : A\,F :: B\,L : F\,O$$
$$B\,L : F\,O :: \text{circf. } B\,L : \text{circf. } F\,O$$
luego: $$A\,L : A\,F :: \text{circf. } B\,L : \text{circf. } F\,O$$

formando el producto de los medios y de los extremos

$$\text{circf. } B\,L \times A\,F = \text{circf. } F\,O \times A\,L$$
sustituyendo $$\text{circf. } B\,L \times \tfrac{1}{2}\,A\,B = \text{circf. } G\,O \times A\,L$$

Expresando el primer miembro la área del cono, se ve que tiene por valor igualmente lo que indica el segundo miembro de la ecuacion, que es la expresion algebráica del teorema que venimos demostrando.

En consecuencia, cualquiera que sea la posicion del lado del polígono generador de la superficie, el valor de ésta se determina por la regla que hemos demostrado.

684.—Cuando el polígono regular tiene un número infinito de lados la superficie que engendra es la de la esfera, y por medio del principio del párrafo anterior, podremos determinar la área de este cuerpo y la de sus diversas partes.

Si llamamos R el radio de la esfera, y la altura s p de la zona F D G N (fig. 320) la representamos por h, tendremos:

$$\text{área de la zona esférica} = s = 2\,\pi\,R.\,h$$

En el casquete esférico si representamos por a su altura s A, tendremos:

$$\text{área del casquete esférico} = s = 2\,\pi\,R.\,a$$

Como la área de la esfera es la suma de las áreas de las diversas zonas y casquetes que la forman, y la suma de las proyecciones de todas las partes del semicírculo generador sobre el eje es el diámetro, resulta que

$$\text{la área de la esfera} = S = 2\,\pi\,R. = 4\,\pi\,R^2$$

luego la superficie de la esfera es cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos.

Si por R ponemos su valor $\frac{D}{2}$, llamando D al diámetro, tendremos por expresion del área de la esfera:

$$S = \pi\,D^2$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Se llama *huso á la porcion de la superficie de la esfera* A O B H A (fig. 320) *comprendida entre dos semicírculos máximos que terminan en el mismo diámetro* A B. Si desde el centro C de la esfera se tiran los radios C O y C H perpendiculares al diámetro comun A B, *el ángulo* O C H, que mide el ángulo diedro de los dos semicírculos que limitan el huso, *se llama ángulo del huso.*

Si el arco O H, medida del ángulo del huso, se divide en dos partes iguales y por el punto de division se tira un semicírculo que pase por A B, resultará un huso que será la mitad del primero por ser sobreponibles las porciones de la esfera de que están formados. Si el arco O H se divide en tres, cuatro ó más partes iguales, el huso quedará dividido igualmente en tres, cuatro ó más partes iguales entre sí. En consecuencia, *las superficies de los husos son proporcionales á sus ángulos, ó á los arcos que los miden.*

Si comparamos la superficie del huso con la de la esfera, tendremos: sup. huso A O B H : sup. esfera :: arco O H : circf. círc. máximo luego, *la superficie de un huso es igual á la de la esfera multiplicada por la relacion que existe entre el número de grados del ángulo del huso y* 360°

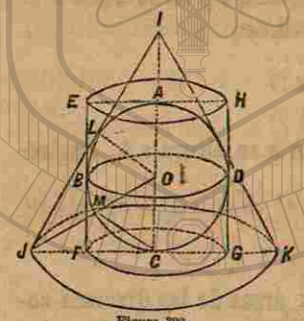


Figura 322.

685.—Si al círculo A B C D [fig. 322] circunscribimos un cuadrado E F G H y un triángulo equilátero I J K y suponemos que este sistema gira al rededor del eje I A C, resultará una esfera inscrita á un cilindro y á un cono, y vamos á determinar la relacion que existe entre la superficie de la esfera y las del cilindro y cono circunscritos á ella.

Llamando R el radio B O de la esfera, hemos visto ya que:

1° el área de la esfera $= S = 4 \pi R^2$.

Respecto al cilindro [672] tenemos:

2° área lateral del cilindro $= S' = 2 \pi R \times 2 R = 4 \pi R^2$

3° área total del cilindro $= S'' = 4 \pi R^2 + 2 \pi R^2 = 6 \pi R^2$. [673]

Para determinar la área del cono vamos á comenzar por establecer el valor del rádio de su base J C, que por razon del triángulo equilátero es la mitad de su lado I J, en funcion del rádio de la esfera. Siendo equilátero el triángulo que engendra el cono, el ángulo I J K vale 60° [465], y como los triángulos O L J y O C J son iguales, el ángulo

O J C vale 30°, y el J O C, que es su complemento valdrá 60°. Tirando la cuerda C M, ésta será igual al radio [497], y nos resulta el triángulo equilátero O M C en el que el ángulo O C M = 60°. Si del ángulo recto O C J se resta el O C M, queda el ángulo M C J = 30°. De consiguiente el triángulo M C J será isósceles, por tener iguales los ángulos M J C y M C J, y por tanto M J = M C = R. Por último se tendrá, J O = 2 R.

Considerando el triángulo rectángulo J O C, se tiene:

$$J C^2 = J O^2 - O C^2$$

y sustituyendo $\quad J C^2 = 4 R^2 - R^2 = 3 R^2$

por otra parte $\quad 2 J C = J I$

Ahora bien: la área total del cono [679] es

$$S''' = \pi J C [2 J C + J C] = 3 \pi J C^2$$

y sustituyendo $\quad S''' = 9 \pi R^2$

En resúmen: el área de la esfera $= 4 \pi R^2$
la lateral del cilindro $= 4 \pi R^2$
la total del cilindro $= 6 \pi R^2$
y la total del cono $= 9 \pi R^2$

De lo que resulta: 1° que la área de la esferra es igual á la lateral de cilindro circunscrito; 2° que es los dos tercios de la total del mismo cilindro; 3° que es los cuatro novenos de la total del cono circunscrito; y 4° que la área del cilindro es media proporcienal entre la de la esfera y la del cono, supuesto que

$$6 \pi R^2 = \sqrt{4 \pi R^2 \times 9 \pi R^2}$$

686.—*Las áreas de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Llamemos s, s', s" .... las áreas de las caras de un poliedro, y S, S', S" .... las de su semejante: l, l', l" .... las líneas del primer poliedro, y L, L', L" .... las líneas homólogas en el segundo. Se tiene [579]:

$$s : S :: l^2 : L^2 \qquad s' : S' :: l'^2 : L'^2 \text{ etc.}$$

Por ser las caras semejantes, tendremos:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$l : L :: l' : L' :: l'' : L''....$$

elevando al cuadrado $l^2 : L^2 :: l'^2 : L'^2 :: l''^2 : L''^2....$

luego $s : S :: s' : S' :: s'' : S''... :: l^2 : L^2$

y como la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á un consecuente [318—8°] resulta:

$$s + s' + s''... : S + S' + S'' + ... :: l^2 : L^2$$

que es lo que se queria demostrar.

Las áreas de dos cilindros engendrados por rectángulos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus alturas y á los de sus radios.

Si representamos por s y S las áreas laterales de los cilindros, por r y R los radios de sus bases, y por h y H sus respectivos alturas. Como los rectángulos generadores tienen por lados los radios y las alturas, y por el supuesto son semejantes, tendremos:

$$h : H :: r : R$$

por otra parte $s : S :: 2\pi r h : 2\pi R H....$ [1]

multiplicando ordenanamente, y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2$$

y si la proporcion [1] se multiplica por la siguiente:

$$r : R :: h : H$$

resulta: $s : S :: h^2 : H^2$

que es lo que se debia demostrar.

Las áreas laterales de los conos engendrados por triángulos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus generatrices y á los de sus radios.

Representando por s y S las áreas laterales de los conos, por a y A sus respectivas generatrices, y por r y R los radios de sus bases: siendo los triángulos generadores semejantes, cuyas hipotenusas y catetos homólogos son a, A y r, R, se tiene:

$$a : A :: r : R$$

por otra parte [679] $s : S :: \pi r a : \pi R A$

multiplicando ordenadamente estas proporciones y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2$$

elevando al cuadrado los términos de la 1ª proporcion:

$$a^2 : A^2 :: r^2 : R^2$$

se tiene igualmente $s : S :: a^2 : A^2$

Las áreas de las esferas son proporcionales á los cuadrados de sus radios y á los de sus diámetros.

Siendo la área de la esfera $= 4\pi R^2 = \pi D^2$, [684] si representamos por s y S las áreas de las esferas, por r y R sus radios, y por d y D sus respectivos diámetros, se tiene:

$$s : S :: 4\pi r^2 : 4\pi R^2 :: \pi d^2 : \pi D^2$$

y suprimiendo los factores comunes resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2 :: d^2 : D^2$$

687.—PROBLEMAS.—I.—*Determinar la superficie lateral de un prisma recto de base pentagonal, cuyo lado es de 8 centímetros y su arista tiene tres metros y medio.*

Para que la superficie esté valuada en una unidad dada, comenzarémos por expresar las dimensiones del prisma en la misma unidad lineal, en metros ó en centímetros. Adoptando la primera, tendrémos que el perímetro de la base será $= \overset{m}{0}'08 \times 5 = 0'40$.

La arista del prisma $= \overset{m}{3}'50$, y por último, la área lateral será

$$s = \overset{m}{0}'40 \times 3'50 = \overset{m.\,cd.}{1}'40$$

un metro cuadrado y 40 centésimos de metro cuadrado.

Si hubiésemos adoptado por unidad lineal el centímetro, la superficie la habriamos obtenido en centímetros cuadrados, é igual 1400 centímetros cuadrados.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

II.—*Se quiere determinar el lado de un cubo cuya diagonal mide* 5,1961 m.

Si llamamos l el lado del cubo y d su diagonal, hemos visto [668] que

$$d^2 = 3\,l^2$$

despejando á l y sustituyendo por d su valor, se tiene:

$$l = \sqrt{\frac{5'1961^2}{3}} = 3 \text{ metros próximamente.}$$

III.—*Determinar la área total de un cilindro recto, cuya altura es de* 1'8 m *y el radio de su base* 0'6 m.

La fórmula correspondiente [673] es:

$$s = 2\,\pi\,r\,[h + r]$$

sustituyendo los valores del problema

$$s = 2 \times 3'141593 \times 0'6^{m} \times 1'8^{m} = 6'78584^{m.\,cd.}$$

IV.—*Determinar la superficie lateral de una pirámide exagonal recta y regular, en la que el lado de la base es de 3 pulgadas y su apotema tiene 11 pulgadas.*

El perímetro de la base será $3 \times 6 = 18$ pulgadas, y la área lateral [676] es:

$$s = \tfrac{1}{2}\,p.\,A = \tfrac{1}{2}\,18 \times 11 = 99 \text{ pulg. cuadradas.}$$

V.—*Determinar la superficie lateral de un trozo de pirámide regular cuadrangular, en la que los lados de las bases son* $2\frac{1}{2}$ *piés y* 2 *piés, y la altura de uno de los trapecios que le sirve de cara* 1 *pié y* 9 *pulgadas.*

El perímetro de la base inferior será $2\frac{1}{2} \times 4 = 10$ piés.

El perímetro de la base superior $2 \times 4 = 8$ piés.

La área lateral del trozo será $= \frac{1}{2}\,[10 + 8]\,1'75 = 15'75$ piés cuadrados.

VI.—*Determinar la superficie total de un cono recto cuya generatriz es de* 11'25 m, *y el rádio de su base* 4'72 m.

La fórmula correspondiente [679] es:

$$S = \pi\,r\,(A + r)$$

sustituyendo $S = 3'141593 \times 4'72 \times 15'97 = 236{,}808^{m\,cd.}$

VII.—*Calcular la superficie de una zona glacial de la tierra, que es un casquete esférico cuya altura aproximada es de* 526'6 *kilómetros y el rádio de la esfera* 6 367 *kilómetros.*

La fórmula correspondiente (684) es

$$s = 2\,\pi\,R\,a$$

sustituyendo: $s = 2 \times 3'141593 \times 6367^{kilóms.} \times 526'6^{kilóms.}$

$= 21\,066\,657$ kilómetros cuadrados.

VIII.—*Determinar la superficie de una de las zonas templadas de la tierra, siendo su altura* 3 305 *kilómetros, y el radio de la esfera* 6 367 *kilómetros.*

La fórmula respectiva (684) es:

$$s = 2\,\pi\,R\,h$$

sustituyendo $s = 2 \times 3'141593 \times 6367 \times 3305$

próximamente $= 132\,216\,674$ kilómetros cuadrados ó miriaras.

IX.—*Dado el radio de una esfera, que es de* 6 367 *kilómetros, determinar su superficie.*

Para resolver este problema haremos uso de la fórmula:

$$S = 4\,\pi\,R^2 \quad (684)$$

sustituyendo $S = 4 \times 3'141593 \times 6\,367^2$

próximamente $= 509\,424\,070$ kilómetros cuadrados.

X.—*Se quiere determinar el diámetro de una esfera cuya superficie es de* 282 743'37 *metros cuadrados.*

Si de la fórmula (684)

$$s = \pi\,D^2$$

despejamos á D y sustituimos: $D = \sqrt{\frac{282743'37}{3'141593}} = 300$ metros.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Volúmen de los cuerpos.

688.— *Volúmen es la extension en sus tres dimensiones, longitud, latitud y grueso.*

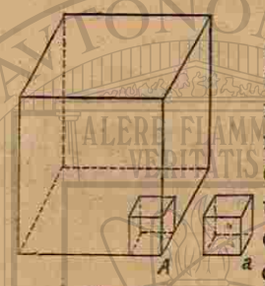


Figura 323.

El volúmen de un cuerpo es la extension comprendida entre las superficies que lo limitan. Así como la medida de una línea se obtiene refiriendo su longitud á la de otra línea tomada por unidad y determinando el número de veces que está contenida en ella, para valuar un volúmen es necesario averiguar cuántas veces contiene á la unidad de volúmen. Al explicar el sistema de pesos y medidas (182 y 185) dijimos que la unidad de volúmen es el *cubo*, que tiene la unidad lineal por lado. Así, por ejemplo, si el cubo a (figura 323) representa la unidad de volúmen, y quisiéramos determinar el volúmen del cuerpo A, tendriamos que averiguar cuántas veces el primer cubo cabe en el segundo. En la figura de que nos servimos, pueden colocarse en la base del cubo A 16 cubos iguales á a, y cabiendo 4 hiladas, una encima de otra, de 16 cubos, diriamos que el volúmen del cuerpo A es de 64 medios centímetros cúbicos; porque es el medio centímetro cúbico el volúmen que en este caso hemos tomado por unidad. La medida ó valuacion de volúmenes raras veces puede hacerse si no es valiéndose de métodos indirectos.

Cuerpos equivalentes en volúmen son los que tienen volúmenes iguales. Así, por ejemplo, un paralelipípedo, en el que quepan 64 cubos iguales á a, será equivalente á A, sin ser igual ni aun semejante á este cuerpo.

689.—*Dos paralelipípedos de la misma base é igual altura, son equivalentes en volúmen.*

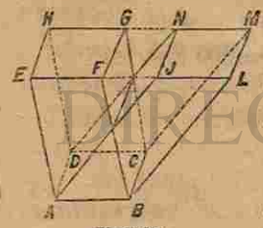


Figura 324.

Siendo las bases iguales, siempre se podrán hacer coincidir como en la figura 324, en A C, y por ser iguales las alturas, las otras bases E G y J M quedarán en el mismo plano H L.

Esto supuesto, pueden ocurrir dos casos:

1° Cuando quedan en un mismo plano las caras A F y A L de los dos prismas, los triángulos E A J y F B L son iguales por tener

iguales los ángulos en A y en B, formados por lados respectivamente iguales como lados opuestos de paralelógramos. Ahora bien: los prismas E A J H y F B L G, que tienen los expresados triángulos E A J y F B L por bases, son sobreponibles por tener todos sus elementos iguales, y si del sólido total B D H L se quitan sucesivamente los prismas triangulares iguales E A J H y F B L G, nos quedarán los paralelipípedos B D N L y B D H F, que serán equivalentes.

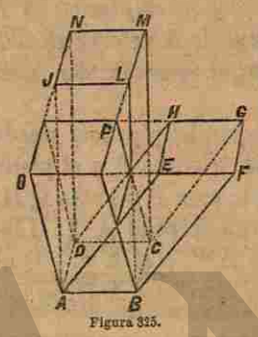


Figura 325.

2° Cuando no quedan en el mismo plano las caras A F y A L (fig. 325), si prolongamos los lados de las bases superiores E F, G H, J N y LM, por sus respectivas intersecciones se formará el paralelógramo O P igual á ellas, y por consiguiente igual á la base comun A C. Si unimos los vértices de O P con los de la base A C, se formará un nuevo paralelipípedo A P que se hallará en las circunstancias del 1er. caso con los paralelipípedos A G y A M, y será equivalente á cada uno de ellos, luego estos paralelipípedos A G y A M serán tambien equivalentes entre sí.

690.—*Un paralelipípedo cualquiera puede trasformarse en otro rectangular recto que sea equivalente á él.*

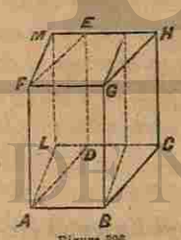


Figura 326.

En los vértices de la base A B C D (fig. 326) del paralelipípedo dado, levantemos perpendiculares á la base, iguales á la altura del mismo paralelipípedo, y se tendrá otro paralelipípedo A C H E F recto y equivalente al propuesto, que, para evitar confusion, no hemos representado en la figura. En seguida levantemos en A y B perpendiculares á A B, y sobre el rectángulo A J construiremos el paralelipípedo B M equivalente á B E, por tener ambos la misma base A G y A L por altura; luego el paralelipípedo recto y rectangular B M será equivalente al propuesto, que no se ha representado en la figura.

691.—*Dos paralelipípedos rectangulares de la misma base son proporcionales á sus alturas.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

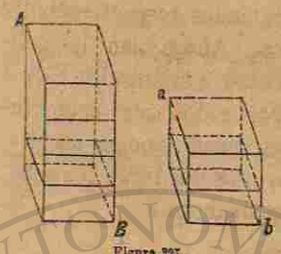


Figura 327.

Puede suceder que las alturas de los dos paralelipípedos sean conmensurables ó inconmensurables, y en uno ó en otro caso haciendo pasar planos por los puntos de division, resultarian paralelipípedos iguales (fig. 327), y repitiendo el raciocinio que hicimos en el número 557 con las figuras 234 y 235, fácilmente demostrariamos la verdad del teorema.

692.—*Los volúmenes de dos paralelipípedos A P y A p* (fig. 328) *rectangulares de la misma altura, son proporcionales á las superficies de sus bases B P y B p.*

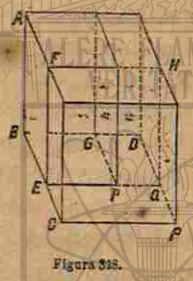


Figura 328.

Siendo rectangulares los paralelipípedos, puede hacerse coincidir uno de sus triedros B y el plano de sus bases. Prolonguemos la cara F p hasta Q H, y nos resultará un nuevo paralelipípedo A Q. Llamarémos P al paralelipípedo A P, p al A p, y Q al A Q. Comparando P con Q, que tienen la misma base A D, se tiene [691]:

$$P : Q :: BC : BE$$

Comparando Q con p, que tienen la misma base B F, se tiene:

$$Q : p :: BD : BG$$

multiplicando ordenadamente estas proporciones, resulta:

$$P : p :: BC \times BD : BE \times BG$$

que es lo que se queria demostrar.

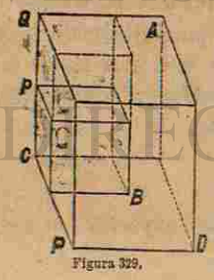


Figura 329.

693.—*Los volúmenes de dos paralelipípedos rectangulares cualesquiera A P y B p* (fig. 329), *son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

Si prolongamos las caras del paralelipípedo B p, nos resultará uno nuevo B Q. Llamando P al paralelipípedo A P, p al B p, y Q al B Q, tendrémos, comparando P con Q, que tienen la misma altura:

$$P : Q :: CD : CB$$

Comparando Q con p, que tienen la misma base, se tendrá:

$$Q : p :: CQ : Cp$$

multiplicando las proporciones, resulta:

$$P : p :: CD \times CQ : CB \times Cp$$

que es lo que se debia demostrar.

694.—Si en la última proporcion p nos representa un cubo que se tome como unidad de volúmen, por lo que sus lados serán iguales á la unidad de longitud, la expresada proporcion se cambia en

$$P : 1 : CD \times CQ : 1 \times 1$$

luego

$$P = CD \times CQ$$

Esto es, *cuando se toma por unidad de volúmen el cubo que tiene por lado la unidad lineal, el volúmen de un paralelipípedo rectangular recto tiene por valor el producto de su base por su altura;* pero debe tenerse presente que las cantidades que forman la última ecuacion son números abstractos que representan relaciones con la unidad respectiva. P representa el número de veces que el paralelipípedo que se considera contiene al cubo que se ha tomado por unidad, y expresará metros cúbicos, varas cúbicas, pulgadas cúbicas, segun que sus dimensiones se hayan estimado respectivamente en metros, en varas ó en pulgadas. La base C D expresará las veces que la unidad superficial está contenida en ella; y por último, la altura C Q expresará las veces que la unidad lineal está contenida en dicha altura. Además el número P que representa el volúmen, tiene que estar indicado en la unidad correspondiente á la lineal que ha servido para estimar las dimensiones del paralelipípedo. Por ejemplo, si éstas se han tomado en metros, el volúmen resultará valuado en metros cúbicos; si se han tomado en decímetros, el volúmen resultará en litros; si se han tomado en piés, el volúmen resultará en piés cúbicos, etc.

Siendo el *cubo* un paralelipípedo recto cuyos lados son iguales, *su volúmen tiene por valor la 3ª potencia de uno de sus lados.* De aquí la denominacion de cubo á la 3ª potencia.

Como el volúmen de un paralelipípedo oblícuo es equivalente al de uno recto rectangular de la misma altura y de base equivalente [689], resulta: que *el volúmen de un paralelipípedo cualquiera tiene por valor el producto de su base por su altura.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

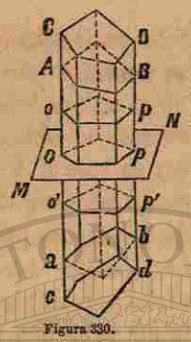


Figura 330.

695.—*Un prisma oblícuo A D* (fig. 330), *es equivalente á otro recto O p cuya generatriz P p=B D y su base O P es la proyeccion de la A B del primero.*

Prolonguemos las aristas C A, B D.... tiremos el plano M N perpendicular á estas aristas, tomemos P p = B D y hagamos pasar el plano o p paralelo á M N. De este modo resulta el prisma recto O p cuya generatriz es igual á la de A D, y su base O P es la proyeccion de la base A B. Vamos á demostrar que los prismas A D y O p son equivalentes.

Si consideramos los prismas truncados o D y O B, veremos que son iguales, pues por una parte sus bases O P y o p lo son como bases de un mismo prisma O p, y por otra sus aristas respectivas tambien lo son, esto es, P B = p D, O A = o C, etc. En efecto, por construccion P p=B D agregando á estas rectas la parte p B resulta P B=p D, y lo mismo con las demás aristas. Ahora bien, si de los prismas truncados O B y o D se quita la parte comun o B, resulta: prisma recto O p = al oblícuo A D; que es lo que teniamos que demostrar.

696.—*Los prismas simétricos A D y a d* (fig. 330) *son equivalentes.*

Para que el prisma a d sea simétrico á A D, se necesita que las rectas D d, C c.... sean perpendiculares al plano M N, y además que D P = d P, O C = O c, P B = P b, O A = O a....

Tomemos P p=P p'=D B y hagamos pasar por p y p' planos paralelos á M N. Nos resultarán los prismas O p y O p' iguales, por ser rectos, por tener la misma base é iguales sus generatrices. Ahora bien: O p es equivalente á A D (695), y O p' lo es á a d, luego A D y a d serán equivalentes; que es lo que se tenia que demostrar.

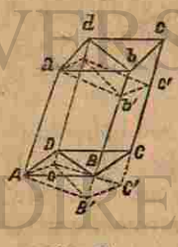


Figura 331.

697.—*Un paralelipípedo cualquiera A c* (fig. 321) *está formado de dos prismas triangulares A B D b d a y C B D d b c, equivalentes entre sí.*

Si por las diagonales d b y D B de las bases se hace pasar un plano, resultarán dos prismas triangulares A D B a y C D B c, cuyas partes constitutivas son iguales, pero que, por no estar dispuestas en el mismo órden, no serán sobreponibles. Para demostrar que los volúmenes de estos prismas son equivalentes, tiremos dos planos a c' y A C' perpendiculares á las aristas, y prolongando éstas nos resultarán el paralelipípedo recto A c' y los prismas triangulares rectos A B' O a y C' B' O c'. Estos prismas son iguales por serlo las partes de que se componen, y estar en ambos distribuidas en el mismo órden (666). Además, el prisma recto A B' O a es equivalente al oblícuo A B D b d a, porque tienen la misma generatriz A a y su base A B' O es la proyeccion de la A B D (695). Por igual razon, el prisma recto C' B' O c' es equivalente al C B D b d c; luego siendo iguales los prismas rectos, serán equivalentes entre sí los prismas A B D b d a y C B D b d c, y por lo mismo equivalentes á la mitad del paralelipípedo A c.

698.—*El volúmen de un prisma cualquiera tiene por valor el producto de la superficie de su base por su altura.*

1° Si el prisma es un paralelipípedo recto, hemos visto [694] que esa es la medida de su volúmen.

2° Si es un paralelipípedo oblícuo, su volúmen es equivalente al de uno recto de la misma altura y de base equivalente en superficie [689].

3° En el caso de que el prisma tenga por base un triángulo como A B D b d a (fig. 331), segun acabamos de verlo, éste será la mitad del paralelipípedo cuya base fuera un paralelógramo A B C D doble del triángulo. Ahora bien, como el volúmen del paralelipípedo tiene por expresion el producto de la superficie del paralelógramo de su base por su altura, el volúmen del prisma triangular será igual á la mitad de esta expsesion; ó lo que es lo mismo, al producto de la superficie del triángulo que le sirve de base por la altura del prisma.

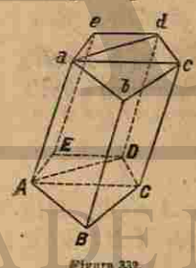


Figura 332.

4° Si la base del prisma es un polígono, podemos descomponerlo en prismas triangulares, haciendo pasar planos por una de sus aristas laterales A A' (fig. 332) y todas las opuestas. Siendo el volúmen del prisma poligonal A C' la suma de los prismas triangulares en que ha quedado descompuesto, si representamos por V el volúmen total, y por v, v', v'' los volúmenes respectivos de los prismas triangulares, tendrémos:

$$V = v + v' + v''$$

Por otra parte, el volúmen de cada prisma triangular tiene por valor el producto de su base por su altura. Así es que si observamos que las alturas de todos los prismas parciales son iguales á la del prisma total, en razon de ser paralelas las bases A C y A' C', representando por a esta altura comun y sustituyendo en la ecuacion anterior, resulta:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$V=A\,B\,C\times a+A\,C\,D\times a+A\,D\,E\times a$$

y sacando á a como factor comun y reemplazando la suma de los triángulos por el polígono que forman, se tiene:

$$V=A\,B\,C\,D\,E\times a$$

que es lo que debiamos demostrar.

699.—Si llamamos P el volúmen de un prisma cuya base es B y A su altura; y representamos por p el volúmen de otro prisma cuya base sea b y a su altura, tendrémos:

$$P : p :: B\times A : b\times a$$

luego *los volúmenes de dos prismas cualesquiera son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Si las bases son iguales, esto es, si B=b los volúmenes de los prismas serán proporcionales á sus alturas; y si por el contrario, lar alturas son iguales, sus volúmenes serán proporcionales á sus bases.

700.—*El volúmen de un cilindro, recto ú oblícuo, tiene por valor el producto de la área de su base por su altura.*

Supuesto que un cilindro no es mas que un prisma cuya base es un polígono regular de una infinidad de lados. Si representamos por v el volúmen del cilindro, por r el radio de su base, y por h su altura, tendrémos como expresion del volúmen del cilindro $v=\pi\,r^2\,h$.

701.—*El volúmen de un tetraedro D A B C* (fig. 333) *es la tercera parte del de un prisma A B C F D E de la misma base y altura que él.*

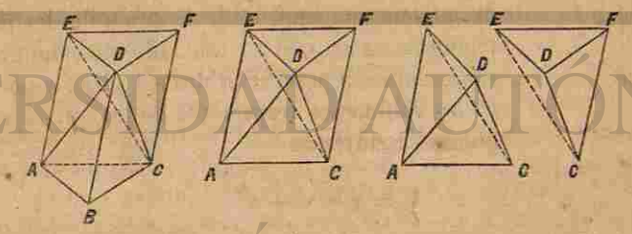


Figura 333.

Sobre la base A B C de nuestro tetraedro, levantemos aristas iguales y paralelas á D B, con lo que se formará el prisma A B C E D F de la misma base y altura que el tetraedro. Si quitamos éste nos quedará la

pirámide cuadrangular D A C F E, que para mayor claridad hemos representado en la figura 2ª. En esta pirámide el plano D C E la divide en dos tetraedros, representados por separado en las figuras 3ª y 4ª, de los que el C D E F es equivalente tanto al D A B C como al D A C E. En efecto, C D E F es equivalente á D A B C por tener sus bases E D F y A B C iguales (658) y la misma altura, que es la distancia de las bases del prisma. El mismo tetraedro D C E F es equivalente al D A C E porque sus bases E C F y A C E son triángulos iguales y tienen la misma altura, que es la distancia de D á la cara A C F E. Luego siendo equivalentes entre sí los tres tetraedros en que hemos dividido el prisma, el volúmen de uno de ellos D A B C será la tercera parte del del prisma.

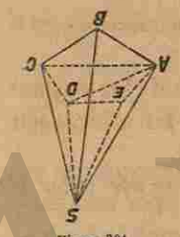


Figura 334.

702.—Haciendo pasar planos por las aristas de una pirámide S A B C.... (fig. 334) puede descomponerse en tetraedros, que tienen la misma altura que la pirámide. El volúmen de la pirámide es la suma de los volúmenes de los tetraedros, así como su base es la suma de los triángulos que sirven respectivamente de bases á los tetraedros, y como el volúmen de cada tetraedro tiene por valor la tercera parte del producto de su base por su altura, se infiere que el *volúmen de una pirámide cualquiera tiene por medida la tercera parte del producto de su base por su altura.*

703.—Como el cono es una pirámide de base circular, *el volúmen del cono recto ú oblícuo tiene por valor la tercera parte del producto de su base por su altura.*

Si representamos por v el volúmen del cono, por r el radio de su base y por h su altura, tendrémos con expresion del volúmen del cono:

$$v=\tfrac{1}{3}\,\pi\,r^2\,h$$

704.—El volúmen de un poliedro cualquiera se obtiene descomponiéndolo en pirámides y valuando en seguida el volúmen de éstas: su suma dará el volúmen del poliedro.

705.—*Las pirámides de igual altura y de bases equivalentes, tienen el mismo volúmen.*

Supuesto que el volúmen de las pirámides tendrá por valor la tercera parte del producto de factores iguales.

706.—*El volúmen de un trozo de prisma triangular A B C F D E* (fig. 335) *tiene por valor la tercera parte del producto de su base A B C*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

por la suma de las distancias de los tres vértices D, E y F á la misma base.

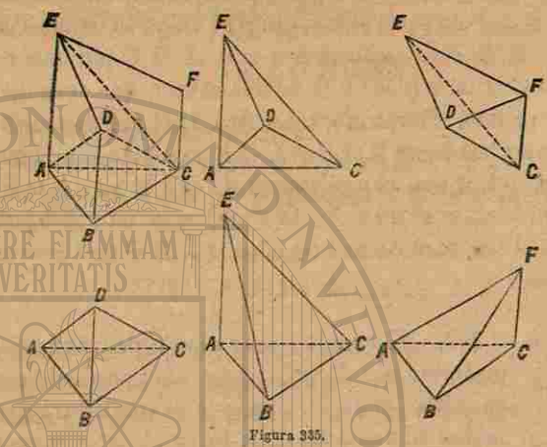


Figura 335.

Si en el prisma truncado A B F hacemos las mismas secciones que en el número 701, primero con el plano D A C nos resultará por una parte el tetraedro D A B C, que hemos representado en la figura 1ª de abajo, y la pirámide cuadrangular D A C F E. Esta pirámide cuadrangular, cortada por el plano D C E, se descompone en los tetraedros D C A E y D C F E. Así es que el volúmen del trozo será la suma de los volúmenes de los tres tetraedros D A B C, D C A E y D C F E. El primer tetraedro de la figura 1ª tiene por base la del trozo A B C, y por altura la distancia del vértice opuesto D á esta misma base, y su volúmen será el tercio del producto de estas dos cantidades, lo cual está conforme con el enunciado del teorema que venimos demostrando. El segundo tetraedro D C A E es equivalente al B C A E representado en la figura 2ª de abajo, que resultaria haciendo pasar un plano por los vértices B E C del trozo de prisma, porque tiene la misma base C A E é igual altura por ser la arista B D paralela á la cara A E. El tercer tetraedro D C F E es equivalente al B C F A, representado en la figura 3ª de abajo, que resultaria al cortar el trozo por un plano que pasara por los vértices F, A y B, porque tienen bases equivalentes y la misma altura. Los triángulos C F E y C F A que sirven de bases á estos tetraedros son equivalentes, porque tienen la misma base C F, y por altura la distancia de las dos aristas paralelas C F y A E. Las alturas de los tetraedros D C F E y B C F A son iguales, porque la arista D B es paralela á la cara A F del trozo. En último análisis, el volúmen del

trozo A F es equivalente á la suma de los volúmenes de los tetraedros de las figuras 1ª, 2ª y 3ª de abajo, que tienen por base la del trozo A B C y por alturas respectivamente las distancias de los vértices opuestos D, E y F á esta base; luego el volúmen del prisma truncado tendrá por valor lo que expresa el teorema.

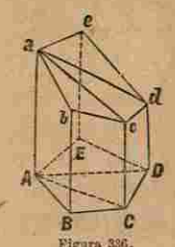


Figura 336.

707.—*El volúmen de un prisma truncado* A D' (figura 336) *de base cualquiera, tiene por valor la suma de los volúmenes de los trozos de los prismas triangulares* A B C A', A C D A', y A D E A' *en que se puede descomponer haciendo pasar planos por una arista* A A' *y las opuestas* C C', D D'.

708.—*El volúmen de un trozo de pirámide de bases paralelas, es igual á la tercera parte del producto de la altura del trozo por la suma de la base inferior, más la superior, más una média proporcional entre ambas.*

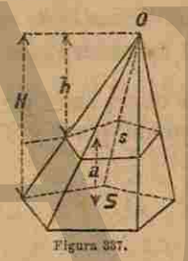


Figura 337.

Llamemos S la base inferior del trozo (fig. 337), S' su base superior y a su altura. Completando la pirámide de que forma parte del trozo, llamarémos: V el volúmen de la pirámide total O S, y H su altura: v el volúmen de la pirámide superior O S' y H' su altura. El volúmen del trozo que representarémos por T, será igual á V—v. Esto supuesto, tendrémos

$$V = \tfrac{1}{3} S H,\ v = \tfrac{1}{3} S' H',\ V - v = \tfrac{1}{3} S H - \tfrac{1}{3} S' H'$$

Como $H = a + H'$ sustituyendo en el último valor

$$V - v = T = \tfrac{1}{3} S (a + H') - \tfrac{1}{3} S' H'$$

ejecutando la multiplicacion $T = \tfrac{1}{3}\left(S a + H' (S - S') \right) \ldots$ (1)

Vamos á determinar el valor de H' en funcion de a, S y S' para sustituirlo en esta ecuacion. Conforme á lo demostrado en el número 644, se tiene:

$$S : S' :: H^2 : H'^2$$

extrayendo raíz y sustituyendo

$$\sqrt{S} : \sqrt{S'} :: a + H' : H'$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

formando é igualando el producto de extremos y medios,

$$H' \sqrt{S} = a \sqrt{S'} + H' \sqrt{S'}$$

despejando á $$H' = \frac{a \sqrt{S'}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}} \ldots . (2)$$

sustituyendo este valor en la ecuacion (1)

$$T = \tfrac{2}{3} \left(S a + \frac{a \sqrt{S'} (S - S')}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}} \right)$$

sacando a como factor comun y considerando que

$S = \sqrt{S^2}$, $S' = \sqrt{S'^2}$ y que $S - S' = (\sqrt{S} + \sqrt{S'})(\sqrt{S} - \sqrt{S'})$, (251-3°)

tendremos:

$$T = \tfrac{1}{3} a \left(S + \frac{\sqrt{S'} (\sqrt{S} + \sqrt{S'}) (\sqrt{S} - \sqrt{S'})}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}} \right)$$

y finalmente $$T = \tfrac{1}{3} a (S + S' + \sqrt{S S'}) \ldots . (3)$$

que es lo que teniamos que demostrar.

709.—Como el trozo de cono, lo es de una pirámide cuyas bases paralelas son círculos, llamando t su volúmen y sustituyendo por S y S' sus valores, se tiene:

$$t = \tfrac{1}{3} a (\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi^2 R^2 r^2})$$

ó

$$t = \tfrac{1}{3} \pi a (R^2 + r^2 + R r)$$

expresion que servirá para valuar el volúmen de un trozo de cono.

710.—*Un triángulo* A B C (fig. 338) *que gira al rededor de una recta cualquiera* C I *situada en su plano y que pasa por uno de sus vértices* C, *engendra un volúmen que tiene por valor la tercera parte del producto de la perpendicular* C D *bajada de este vértice sobre la base* A B, *multiplicada por la superficie engendrada por esta base* A B.

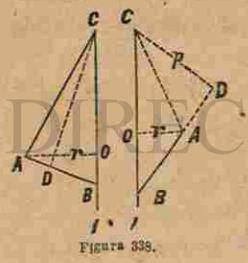


Figura 338.

Llamarémos p á la perpendicular C D bajada sobre la base A B, R á la A O, y para simplificar dirémos vol. B A C para expresar el volúmen engendrado por la rotacion del triángulo B A C al rededor de C I, y sup. A B para indicar la superficie engendrada por la rotacion de la recta A B. Esto supuesto, considerarémos tres casos:

1° Cuando el triángulo C A B gira al rededor de uno de sus lados C B (fig. 338). Se tiene:

vol. C A B = cono C O A + cono B O A

vol. C A B = $\frac{1}{3} \pi R^2 (C O + O B) = \frac{1}{3} \pi R . R \times C B$

R × C B, que es el duplo de la superficie del triángulo C A B, es igual á A B × p, y sustituyendo se tiene:

$$\text{vol. C A B} = \tfrac{1}{3} \pi R . A B \times p$$

pero como π R. A B expresa la superficie cónica engendrada, por la rotacion de A B (679), finalmente resulta:

$$\text{vol. C A B} = \tfrac{1}{3} \text{ sup. A B} \times p$$

que es lo que expresa el teorema. Cualquiera que sea el valor del ángulo en A, serán aplicables los raciocinios de esta demostracion.

2° Cuando el triángulo C A B (fig. 339) gira al rededor de una línea exterior C I. En este caso tendrémos.

$$\text{vol. C A B} = \text{vol. C A I} - \text{vol. C B I}$$

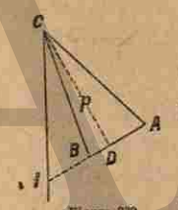


Figura 339.

sustituyendo los valores de vol. C A I y de vol. C B I conforme á lo demostrado en el primer caso, se tiene:

vol. C A B = $\frac{1}{3}$ p. sup. A I — $\frac{1}{3}$ p. sup. B I

ó vol. C A B = $\frac{1}{3}$ p. (sup. A I — sup. B I) = $\frac{1}{3}$ p. sup. A B

que es lo que se tenia que demostrar.

3° Cuando la base A B (fig. 340) es paralela al eje de rotacion. En este caso se tiene:

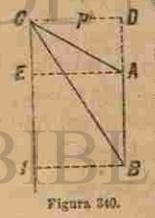


Figura 340.

vol. C A B = cilindro A B I E + cono C A E — cono C B I

sustituyendo los valores respectivos tendremos:

vol. C A B = $\pi p^2 E I + \frac{1}{3} \pi p^2 C E - \frac{1}{3} \pi p^2 C I$

$= \pi p^2 (E I + \frac{1}{3} C E - \frac{1}{3} C I) = \frac{1}{3} \pi p^2 (3 E I + C E - C I)$

$= \frac{1}{3} \pi p^2 (3 E I - E I) = \frac{1}{3} \pi p^2 2 E I$

ó vol. C A B = $2 \pi p E I \times \frac{1}{3} p = \frac{1}{3}$ sup. A B × p.

que es lo que se tenia que demostrar.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

711.—Este teorema nos servirá de fundamento para determinar el volúmen de la esfera, del *sector* y del *segmento* esférico.

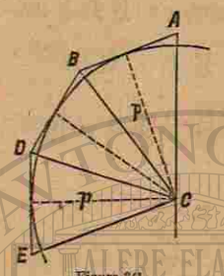


Figura 341.

En efecto, si nos imaginamos un polígono regular A B D E.... (fig. 341) circunscrito á un círculo, y que éste gire al rededor de un diámetro A C, el volúmen engendrado por la rotacion del polígono será igual á la suma de los volúmenes producidos por los triángulos A B C, B D C, D C E.... y tendrá por expresion $\frac{1}{3}$ p (sup. A B + sup. B D + sup. D E....) Esto es, el volúmen engendrado por el polígono tiene por valor la tercera parte del producto del rádio por la superficie engendrada por los lados del polígonos. Cuando los lados de éste sean infinitamente pequeños *el volúmen se convertirá en el de la esfera cuyo valor será la tercera parte del producto de su superficie por el rádio.*

Y como la superficie de la esfera es cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos (684), el volúmen de la esfera tendrá por expresion:

$$v = 4\pi R^2 \times \tfrac{1}{3} R = \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

ó

$$v = \tfrac{1}{6}\pi D^3$$

sustituyendo por R su valor en funcion del diámetro, que es $\frac{D}{2}$.

712.—*Se llama sector esférico la porcion de la esfera* C D E A (fig. 342) *limitada por la superficie cónica* D C E *que tiene por vértice el centro de la esfera y por el casquete esférico* A D E. El sector esférico puede concebirse engendrado por la rotacion del sector circular A C D al rededor del radio A C.

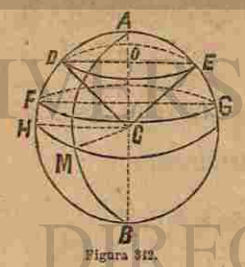


Figura 342.

El volúmen del sector esférico, conforme al teorema demostrado (710), *tendrá por valor la tercera parte del producto del radio de la esfera por la superficie del casquete esférico D E A.*

Llamando *a* la altura A O del casquete esférico, y recordando (684) que la área de éste está expresada por $2\pi R.\ a$, el volúmen del sector esférico tendrá por expresion:

$$v = \tfrac{2}{3}\pi R^2 a$$

713.—Se llama *segmento esférico* la porcion de la esfera D E A (fig.

342), engendrada por la rotacion del segmento circular D O E A al rededor de la flecha O A.

El volúmen del segmento esférico es igual al del sector C D E A ménos el del cono C D E, y tendrá por valor:

$$v = \tfrac{2}{3}\pi R^2 a - \tfrac{1}{3}\pi D\ O^2 \times O\ C \ldots . (1)$$

$$D\ O^2 = B\ O \times O\ A\ (538) = (2R - a)\ a = 2R\ a - a^2$$

$$O\ C = R - a$$

$$D\ O^2 \times O\ C = (2R\ a - a^2)\ (R - a) = 2R^2 a - 3R\ a^2 + a^3$$

sustituyendo en [1]

$$v = \tfrac{2}{3}\pi R^2 a - \tfrac{1}{3}\pi\ [2R^2 a - 3R\ a^2 + a^3]$$

ejecutando la multiplicacion, reduciendo y sacando como factor comun á $\frac{1}{3}\pi a^2$, se tiene finalmente:

$$\textit{volúmen del segmento esférico} = v = \tfrac{1}{3}\pi a^2\ [3R - a]$$

El volúmen de un segmento de dos bases paralelas F G E D, es igual á la diferencia de los volúmenes de los segmentos que se apoyan sobre los círculos que respectivamente le sirven de bases.

Para determinar el volúmen engendrado por la revolucion del segmento circular A i B D [fig. 342 bis] girando al rededor del diámetro E F, supondremos que para fijar la magnitud del segmento se conozca la cuerda A B, y que para determinar la posicion del mismo segmento con relacion al eje de revolucion se da la proyeccion O H de su cuerda A B. Esto supuesto el volúmen engendrado por la revolucion del segmento A i B D es igual al engendrado por el sector A C B D ménos el engendrado por el triángulo A C B girando ambas figuras al rededor de E F. Así pues:

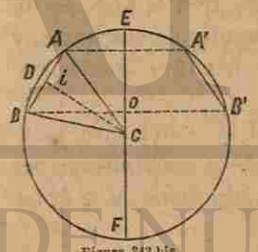


Figura 342 bis.

vol. seg. A i B D = vol. sector A C B D — vol. triángulo A C B.... [1]

conforme á lo demostrado [710]

vol. sector A C B D = sup. zona A D B $\times \frac{R}{3}$ = 2π R $\times$ H O $\times \frac{R}{3}$ [684]

vol. sector A C B D = $\frac{2}{3}\pi$ R$^2 \times$ H O..... [2]

Ahora conforme á lo demostrado [683 y 710]

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

vol. triáng. A C B$=2\pi$ Ci$\times$H O$\times\frac{Ci}{3}=\frac{2}{3}\pi$ Ci$^2\times$H O

como en el triángulo rectángulo A i C

$$Ci^2=A\ C^2-A\ D^2=R^2-\frac{A\ B^2}{4}$$

tendremos:

vol. triáng. A C B$=\frac{2}{3}\pi$ H O $\left(R^2-\frac{A\ B^2}{4}\right)$ ..... [3]

sustituyendo los valores de las ecuaciones [2] y [3] en la [1] resulta:

$$\text{vol. seg. A i B D}=\frac{2}{3}\pi R^2\ H\ O-\frac{2}{3}\pi H\ O\left(R^2-\frac{A\ B^2}{4}\right)$$

ejecutando las operaciones y reduciendo:

$$\text{vol. seg. A i B D}=\frac{1}{6}\pi H\ O\times A\ B^2$$

que es la expresion del volúmen engendrado por la rotacion de un segmento circular en funcion de su cuerda y de la proyeccion de esta sobre el eje de rotacion.

Se llama cuña á la porcion del volúmen de la esfera A B M A H (figura 342) *comprendida entre dos semicírculos máximos que terminan en el mismo diámetro A B y la superficie de un huso A H B M.*

Como si dividimos en dos, tres ó más partes iguales el ángulo H C M del huso que fija la magnitud de la cuña, resultará ésta dividida en dos, tres ó igual número de partes, por ser sobreponibles las cuñas de la misma esfera que corresponden á husos iguales, resulta que los volúmenes de las cuñas son proporcionales á los ángulos de sus husos, y siendo la esfera el conjunto de un número dado de cuñas iguales, resulta:

vol. cuña A B M A H : vol. esfera :: como arco H M : circf. círc. máx.

luego *el volúmen de una cuña es igual al de la esfera multiplicado por la relacion que existe entre el número de grados del ángulo H C M del huso de la cuña y* 360°.

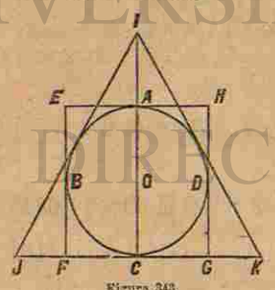


Figura 343

714.—Si al círculo A B C D (fig. 343) circunscribimos un cuadrado E F G H y un triángulo equilátero I J K, y nos imaginamos que gira este sistema al rededor del eje I A C, resultarán un cilindro y un cono circunscritos á la esfera, y tendrémos:

1° El volúmen de la esfera que lo representaremos por v,

$$v=\frac{4}{3}\pi R^3$$

2° El del cilindro que lo llamarémos v',

$$v'=\pi R^2\times 2\ R=2\pi R^3$$

3° El volúmen del cono circunscrito que representarémos por

$$v''+\frac{1}{3}\pi\ C\ J^2\times C\ I$$

Ahora bien, hemos visto (685) que J C^2=3 R^2 y que J I=2 J C, luego J I^2=4 J C^2=12 R^2

Para determinar el valor de C I, considerarémos el triángulo rectángulo I C J, en el que

$$I\ C=\sqrt{J\ I^2-J\ C^2}=\sqrt{12\ R^2-3\ R^2}=3\ R$$

sustituyendo en el valor de v'' los de C J^2 y de C I, se tiene:

$$v''=\frac{1}{3}\pi\ 3\ R^2\times 3\ R=3\pi R^3$$

En resúmen, el volúmen de la esfera $=\frac{4}{3}\pi R^3$
,, del cilindro $=2\pi R^3$
,, del cono $=3\pi R^3$

Comparando estas cantidades, se ve que son entre sí como 4 : 6 : 9, de lo que se deduce: 1° que el volúmen de la esfera es los dos tercios de el del cilindro circunscrito: 2° que es igual á los cuatro novenos de el del cono; y 3° que el volúmen del cilindro es medio proporcional entre el de la esfera y el del cono, supuesto que $6=\sqrt{4\times 9}$.

715.—*Los volúmenes de dos pirámides cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

Si representamos por P el volúmen de una pirámide cuya base sea B y A su altura, tendrémos (702): P$=\frac{1}{3}$ B. A; y llamando p el volúmen de la otra pirámide, b su base y a su altura, se tiene: p$=\frac{1}{3}$ b. a. Luego

$$P : p :: \tfrac{1}{3}\ B.\ A : \tfrac{1}{3}\ b.\ a.$$

multiplicando por 3 la 2ª razon

$$P : p :: B.\ A : b.\ a$$

que es lo que se queria demostrar.

716.—*Los volúmenes de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cubos de sus alturas ó al de sus líneas homólogas.*

Conforme al teorema del número anterior, se tiene:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$P : p :: B \times A : b \times a$$

por ser las pirámides semejantes (644)

$$B : b :: A^2 : a^2$$

multiplicando estas proporciones y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$P : p :: A^3 : a^3$$

y como por ser las pirámides semejantes, todas sus líneas homólogas son proporcionales entre sí; llamando L y l las líneas que se escojan, se tiene:

$$A : a :: L : l$$

ó $$A^3 : a^3 :: L^3 : l^3$$

luego $$P : p :: A^3 : a^3 :: L^3 : l^3$$

717.—*Los volúmenes de los poliedros semejantes son entre sí como los cubos de sus líneas homólogas.*

Llamemos V y v los volúmenes de los poliedros; P, P', P''..... las pirámides en que se puede descomponer el primer poliedro V, y p, p', p''.... las pirámides semejantes de que se compone el segundo poliedro v; L, L', L''.... las líneas de uno, y l, l', l''..... las homólogas del otro. Se tiene (716):

$$P : p :: L^3 : l^3 \qquad P' : p' :: L'^3 : l'^3 \text{ etc.}$$

por ser semejantes los poliedros, lo serán sus caras y tendrémos:

$$L : l :: L' : l'....$$

elevando al cubo $$L^3 : l^3 :: L'^3 : l'^3....$$

luego $$P : p :: P' : p' :: P'' : p''.... :: L^3 : l^3$$

y como la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente (318—8°) resulta:

$$P+P'+P''.... : p+p'+p''.... :: L^3 : l^3$$

ó $$V : v :: L^3 : l^3$$

que es lo que debiamos demostrar.

718.—*Los volúmenes de los cilindros rectos engendrados por rectángulos semejantes son proporcionales á los cubos de sus radios ó á los de sus alturas.*

Representarémos por V el volúmen de un cilindro, por R el radio de su base, y por H su altura; por v el volúmen del otro cilindro, por r el radio de su base, y por h su altura. Tendrémos (700):

$$V : v :: \pi R^2 H : \pi r^2 h....[1]$$

como los rectángulos generadores son semejantes, y los lados de estos rectángulos son los radios y las alturas de los respectivos cilindros, se tiene:

$$H : h :: R : r$$

multiplicando ordenadamente y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$V : v :: R^3 : r$$

Igualmente, si la proporcion [1] se multiplica por la

$$R^3 : r^3 :: H^3 : h^3$$

resulta: $$V : v :: H^3 : h$$

que es lo que se debia demostrar.

719.—*Los volúmenes de los conos rectos engendrados por triángulos rectángulos semejantes, son proporcionales á los cubos de sus líneas homólogas.*

Llamemos V y v los volúmenes de los conos, H y h sus respectivas alturas, R y r sus radios, y A, a sus generatrices. Por ser semejantes sus triángulos generadores, se tiene:

$$R : r :: H : h :: A : a....[1]$$

Por otra parte (703) $$V : v :: \tfrac{1}{3}\pi R^2 H : \tfrac{1}{3}\pi r^2 h....[2]$$

Elevando al cuadrado la primera proporcion de la série de razones [1]

$$R^2 : r^2 :: H^2 : h^2$$

multiplicando los términos de esta proporcion por los de la [2] y suprimiendo los factores comunes, resulta:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$V : v :: H^2 : h^2$$

si elevamos al cubo los términos de las razones iguales [1] se tiene:

$$R^3 : r^3 :: H^3 : h^3 :: A^3 : a^3$$

luego $$V : v :: R^3 : r^3 :: H^3 : h^3 :: A^3 : a^3$$

que es lo que se queria demostrar.

720.—*Los volúmenes de las esferas son proporcionales á los cubos de sus radios ó á los de sus diámetros.*

Hemos visto (711) que el volúmen de la esfera tiene por expresion $\frac{4}{3}\pi R^3$ ó $\frac{1}{6}\pi D^3$, así es que si representamos por V y v los volúmenes de las esferas, por R y r sus respectivos radios, y por D y d sus diámetros, tendrémos:

$$V : v :: \tfrac{4}{3}\pi R^3 : \tfrac{4}{3}\pi r^3 :: \tfrac{1}{6}\pi D^3 : \tfrac{1}{6}\pi d^3$$

y suprimiendo los factores comunes

$$V : v :: R^3 : r^3 :: D^3 : d^3$$

que es lo que se queria demostrar.

721.—*Los volúmenes de los poliedros simétricos son iguales.*

Si imaginándonos dos poliedros P y P' simétricos con relacion á un plano, tomamos un punto O en el interior de uno de ellos, y su simétrico o' en el otro, y desde estos puntos tiramos rectas á todos los vértices, nos resultarán divididos los dos poliedros en el mismo número de pirámides respectivamente simétricas. Estas pirámides tienen sus bases y sus alturas iguales [657], luego serán equivalentes en volúmen considerándolas de dos en dos, y en consecuencia la suma de todas las que forman el poliedro P será igual á la suma de las pirámides que constituyen el poliedro P'.

722.—PROBLEMAS.—I.—*Determinar el volúmen de un paralelipípedo rectangular, en el que los tres lados de uno de sus triedros miden:* $\overset{m}{1}$'50, 42 *centímetros y* 50 *centímetros.*

Comenzarémos por expresar las dimensiones lineales referidas á la misma unidad. Elegirémos el metro para que el volúmen resulte en metros cúbicos. Llamando V el volúmen que buscamos, tendrémos (694):

$$V = \overset{m}{1}'50 \times \overset{m}{0}'42 \times \overset{m}{0}'50 = \overset{\text{m cúb.}}{0}'315$$

Si hubiéramos querido determinar el volúmen en litros, las dimensiones lineales las habriamos reducido á decímetros, y nos habria resultado: $V = \overset{d}{15} \times 4'2 \times 5 = 315$ litros.

II.—*Determinar el volúmen de un cilindro cuya base tiene 40 centímetros de rádio, y 60 centímetros de altura.*

La fórmula correspondiente es [700]:

$$v = \pi r^2 h$$

sustituyendo $$v = 3'141593 \times 40^2 \times 60 = \overset{\text{cent. cúb.}}{301\,592'928}$$

$$v = \overset{\text{litros}}{301'592\,928}$$

III.—*Calcular el volúmen de un cono cuya altura es de* $\overset{m}{2}'5$ *y el radio de su base de* $\overset{m}{0}'30$.

La fórmula que expresa el volúmen de un cono es [703]:

$$v = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

sustituyendo $$v = \tfrac{1}{3}\,3'141\,593 \times \overset{m}{0}'30^2 \times 2'5$$

de donde $$v = \overset{\text{m. cúb.}}{0}'235\,619\,475 = \overset{\text{litros.}}{235}'619\,475$$

IV.—*Calcular el volúmen de un trozo de cono, cuya altura es de* $\overset{m}{1}'2$, *y los radios de sus bases son* $\overset{m}{0}'7$ *y* $\overset{m}{0}'9$.

La fórmula respectiva es [709]:

$$v = \tfrac{1}{3}\pi a\,(R^2 + r^2 + R\,r)$$

sustituyendo $$v = \tfrac{1}{3}\,3'141593 \times 1'2\,(0'9^2 + 0'7^2 + 0'9 \times 0'7)$$

ó $$v = \overset{\text{m. cúb.}}{2}'425309796$$

V.—*Calcular el volúmen de una esfera cuyo diámetro es de* $\overset{m}{1}2'5$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La fórmula que expresa el volúmen de la esfera es [711]:

$$v = \frac{1}{6}\pi D^3$$

sustituyendo $v = \frac{1}{6}\,3'141593 \times 12'5^3$

y resulta $v = 1026'537$ m. cúb.

VI.—*Determinar el radio de una esfera cuyo volúmen es de 2144'661 litros.*

De la fórmula que expresa el volúmen de la esfera [711]:

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

despejarémos á $r = \sqrt[3]{\frac{3\,v}{4\,\pi}}$

sustituyendo $r = \sqrt[3]{\frac{3 \times 2144'661}{4 \times 3'141593}}$

ejecutando la operacion resulta:

$r = 8$ que serán decímetros, por estar estimado el volúmen en litros.

VII.—*Determinar el volúmen de un sector esférico cuya altura es de 4'5 m, y el radio de la esfera 12 metros.*

La fórmula que expresa el valor del volúmen del sector esférico es (712):

$$v = \frac{2}{3}\pi R^2 a$$

sustituyendo $v = \frac{2}{3}\,3'141593 \times 12^2 \times 4'5$

ó $v = 1357'168$ m. cúb.

VIII.—*Determinar el volúmen de un segmento esférico cuya altura es la mitad del radio de la esfera, que tiene 16 decímetros.*

El volúmen del segmento esférico está expresado por la fórmula (713)

$$v = \frac{1}{3}\pi a^2 (3R - a)$$

sustituyendo $v = \frac{1}{3}\,3'141593 \times 8^2 (3 \times 16 - 8)$

ó $v = 2680'826$ litros.

IX.—*Se quiere determinar el volúmen de un cubo cuya diagonal es de 8 decímetros.*

Representando por d la diagonal del cubo, y por a una de sus aristas, tendrémos:

$$d^2 = 3\,a^2 \quad (668)$$

y el volúmen del cubo $v = a^3$ (694)

despejando en la primera ecuacion á a, y sustituyendo su valor en la segunda, resulta:

$$v = \frac{d^3}{\sqrt{27}}$$

sustituyendo el valor numérico de la diagonal del cubo en nuestro problema, se tiene:

$$v = \frac{8^3}{\sqrt{27}} = 98'5344 \text{ litros}$$

X.—*Determinar gráficamente el radio de una esfera* C (fig. 344).

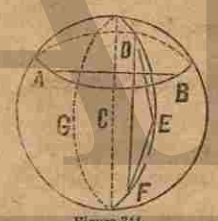


Figura 344.

Tomemos dos puntos cualesquiera sobre la esfera, A y B, haciendo centro en ellos, y con un compás de puntas curvas determinemos sucesivamente con tres radios diferentes tres puntos D, E y F equidistantes de A y B, por lo cual el plano que pasa por D, E y F será perpendicular al medio de la recta A B, y todos sus puntos estarán equidistantes de A y de B; luego pasará por el centro de la esfera, siendo un círculo máximo de ésta la seccion D E F G. Esto supuesto, si sobre un plano llevamos las distancias D E, E F y D F construirémos el triángulo D E F, y si circunscribimos al triángulo un círculo, determinando el radio de este círculo obtendrémos el de la esfera.

FIN.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ÍNDICE.

GEOMETRIA.

Págs.

Introduccion 7

DEFINICIONES Y NOCIONES PRELIMINARES.

Definicion y objeto de la Geometría 12
Puntos 13
Línea recta 14
Línea quebrada 18
Línea curva 18
Línea mixta 18
Circunferencia del círculo 18
Superficies 19
Axiomas fundamentales 21
Métodos de demostracion 21

ÁNGULOS.

Definiciones 24
Medida de los ángulos 26
De la escuadra y del trasportador 28
Problemas de ángulos 29
Principales casos de igualdad de los triángulos 30

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Págs.

PERPENDICULARES Y OBLICUAS.

Definiciones 32
Teoremas 32
Problemas 39

PARALELAS.

Definiciones y teoremas 41
Problemas 46

TRIÁNGULOS.

Definiciones 47
Teoremas 48
Casos de igualdad de los triángulos 52
Problemas 53

CUADRILÁTEROS.

Definiciones 58
Propiedades de los cuadriláteros 59
Paralelógramos 59
Rombos 62
Rectángulos 62
Cuadrados 62
Trapecios 63
Problemas de cuadriláteros 63

POLÍGONOS.

Definiciones 66
Teoremas 67
Problemas 69

CIRCUNFERENCIA DEL CÍRCULO.

Teoremas de líneas rectas en el círculo 71
Problemas 75
Teoremas de ángulos en el círculo 78
Problemas de medida de ángulos 80
Triángulos en el círculo 83

Págs.

Cuadriláteros en el círculo 84
Polígonos en el círculo 85
Problemas de polígonos en el círculo 87

INTERSECCION Y CONTACTO DE DOS CÍRCULOS.

Teoremas 90
Problemas 92

LÍNEAS PROPORCIONALES.

Teoremas 94
Problemas 98

SEMEJANZA DE FIGURAS.

Casos de semejanza de los triángulos 100
Semejanza de los polígonos 102
Problemas de semejanza de figuras 104

LÍNEAS PROPORCIONALES EN LOS TRIÁNGULOS.

Teoremas 105
Problemas 111
Líneas proporcionales en el círculo 114
Problemas 117

RAZON DEL DIÁMETRO Á LA CIRCUNFERENCIA.

Determinacion del valor numérico de la razon de la circunferencia al diámetro 122
Problemas 125

SUPERFICIES.

Preliminares y teoremas fundamentales 127
Problemas de figuras equivalentes 132
Valuacion de las superficies 133
Expresiones de la área del círculo 136
Area de la corona, sector, segmento y trapecio circular 136
Problemas de valuacion de áreas 139
Comparacion de áreas 145

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ÍNDICE.

	Págs.
Relaciones de algunas figuras equivalentes	150
Problemas de comparacion de áreas	153

VOLÚMENES.

Planos y rectas	157
Problemas	164
Angulos diedros	166
Triedros y poliedros	171
Cuerpos regulares	178
Semejanza de los cuerpos sólidos	180
Figuras simétricas	184
Superficies de los cuerpos	186
Problemas de superficies de los cuerpos	203
Volúmen de los cuerpos	206
Problemas de volúmenes de los cuerpos	224

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



OBRAS DEL MISMO AUTOR.

	Precios á la rústica: En México.	En los Estados
N. 2. Aritmética para los niños (pasta carton)..	$ 0 50	0 62
N. 3. Elementos de Aritmética razonada.....	1 50	1 75
Tratado de Algebra.....	1 50	1 75
Tratado de Geometría plana y en el espacio....	2 00	2 25
Tratado de Trigonometría rectilínea.....	1 00	1 25
Memoria sobre el empleo de los ensayes de pella y resíduos en el beneficio de patio.....	0 25	0 30
Observaciones relativas al empleo de la concentracion de los minerales	0 25	0 30
Apuntes sobre el micrómetro de Rochon.....	0 25	0 30

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS