ta el centro del sistema solar y el curso de los cometas periódicos conocidos.

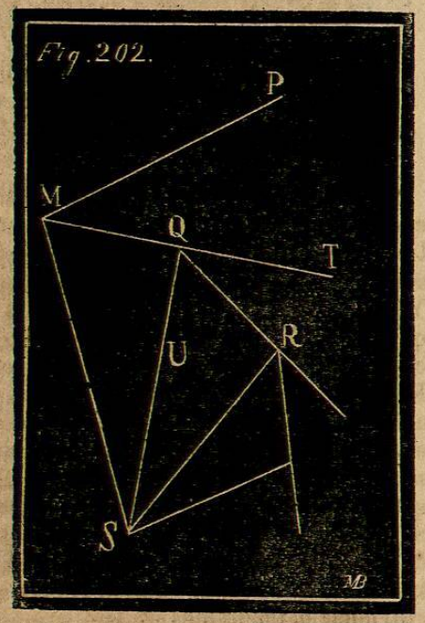
Otros cometas periódicos han descubierto los astrónomos Brorsen, D'Arresti, De Vico, cuyos elementos han podido calcularse despues de las acostumbradas observaciones, pero por causas, extrañas quizás á los mismos cometas, no han podido ser vistos á su vuelta: el del P. De Vico p. e. que fué descubierto por primera vez en 1844, en la que debia de ser segunda aparicion, la distancia perigea fué mucho mayor que la distancia á que se hallaba el cometa de la tierra, cuando desapareció la primera vez. Posteriormente no se le ha visto más. Por tanto, no se hallan estos cometas menores en el número de los periódicos constantes que forman parte del sistema solar.

CAPITULO V.

Gravitacion Universal.

§ UNICO.

299. De todo lo que hemos dicho sobre los movimientos de los cuerpos celestes, aparece claro que estos se rigen por ciertas leyes, las cuales tienen por base fundamental las que dedujo Kepler de sus prolongados estudios sobre los movimientos del planeta Marte. Ya desde esa época varios astrónomos y matemáticos sospecharon que habia alguna ley fija, no sólo entre las moléculas de un mismo cuerpo entre sí, sino tambien entre cuerpos de masas diferentes. Kepler, en consecuencia de las leyes de los movimientos celestes, admitió la hipótesis de que, al ménos en nuestro sistema existia en el Sol una fuerza que atraía á los planetas con una intensidad inversamente proporcional á la distancia. El matemático Borelli sostuvo que los planetas, siguiendo *una ley general*, se movían al rededor del Sol, así como los satélites al rededor de los planetas, solicitados por una fuerza tal, que nunca pudieran sustraerse á la influencia del centro de accion. Horke que fué el primero que, por medio de las oscilaciones del péndulo, exploró la intensidad de la gravedad terrestre, propuso tres hipótesis que podrian considerarse como base del sistema, á saber: 1º Que los cuerpos celestes tienden hácia un centro, el cual ejerce una fuerza atractiva, ya sobre sus moléculas, ya sobre los demás cuerpos que se hallan comprendidos en su esfera de accion. 2º Que estos cuerpos moviéndose en virtud de su propia inercia, en los espacios debieran describir una línea recta, pero como describen una curva, preciso es reconocer que *obedecen* tambien á otra fuerza componente. 3º Que el efecto de esta fuerza deberá ser tanto mayor cuanto más cerca del centro se halle el cuerpo atraido. Posteriormente Bonillaud, suponiendo elípticas las órbitas planetarias, sostuvo, que admitida la atraccion hácia un centro, debia esta disminuir segun el cuadrado de la distancia. Todas estas hipótesis, aunque vagas, iban insensiblemente allanando el camino hácia la fórmula general de atraccion, que al grande ingenio de Newton cupo la suerte de hallar, no solo independientemente de los que le habian precedido, sino tambien siguiendo en su raciocinio un camino muy diferente. Supuesta en un cuerpo una fuerza impulsiva que lo haga moverse en una línea, si recibe un impulso en direccion inclinada á ella, seguirá en su movimiento una resultante determinada por la diagonal del paralelógramo, cuyos lados representen la direccion é intensidad de las dos fuerzas. Apoyado en este principio tan sencillo, demostró hasta la evidencia que si la fuerza es central y contínua, un cuerpo cualquiera que describiera una línea recta en virtud de una impulsion primitiva, describirá una curva, la cual en caso de variar la fuerza en razon inversa del cuadrado de la distancia al foco, será una elipse ú otra seccion cónica. En efecto: sea un centro S que obra sobre el cuerpo M (fig. 202) en un instante dado en el sentido MS. Puesto que el cuerpo se halla impulsado por una fuerza primitiva hácia P, teniendo que obedecer á esta segunda fuerza, se desviará de su camino, describiendo la diagonal MQ del paralelógramo construido sobre dichas fuerzas. Si en el punto Q cesara la fuerza MS, el cuerpo en virtud de su inercia seguiria la direccion MT determinada por la impulsion primitiva, á la cual solo obedeceria en este caso. Pero supongamos que en dicho punto Q vuel-



va el centro S á obrar sobre el cuerpo; la accion del centro será representada entonces por la fuerza QS con una intensidad que podemos suponer igual QU: en este caso se hallará de nuevo el cuerpo solicitado por las dos fuerzas QT, QU, y la resultante QR representará el efecto producido por ellas sobre el cuerpo M. Si se repiten á cada instante nuevas impulsiones sobre el cuerpo por la accion del centro, claro está que variará tambien á cada instante en la direccion y en la intensidad de la velocidad, segun que vaya aumentando la accion del centro, y por lo tanto, el cuerpo describirá un polígono é irá acercándose al centro ó alejándose de él en proporcion á la mayor ó menor fuerza con que este obra. Todo este raciocinio supone instantánea la accion del centro; mas si la suponemos contínua, los lados del polígono serán infinitamente pequeños, y por lo tanto, llegará el cuerpo á describir el perímetro, límite del polígono, que es una línea curva; en cuyo caso se verificarán sin modificacion alguna las mismas condiciones de la proporcionalidad de las áreas á los tiempos empleados en recorrerlas, que es la misma ley que rige la accion instantánea (1). Aplicando ahora este teorema á los cuerpos celestes, como los planetas describen una curva al rededor del sol, es necesario admitir no solo que la fuerza á que están sometidos existe en el sol, sino tambien que en virtud de la segunda ley de Kepler debe esta ser dirigida constantemente segun la línea recta que une el planeta al sol.

300. Esto supuesto, no será difícil probar que dicha fuerza está en razon inversa del cuadrado de la distancia. En efecto, por la mecánica sabemos que en todo movimiento circular, existiendo en el centro del círculo el centro de accion, la fuerza acceleratriz está en razon directa del radio, é inversa del cuadrado del tiempo empleado por el móvil en recorrer toda la circunferencia; de modo que su expresion es $\varphi = \frac{4\pi^2 R.}{T^2}$ Aplicando dicha fórmula á los planetas, cuyas órbitas, por el movimiento, podemos suponer circulares, será representada la fuerza acceleratriz por $\varphi = \frac{4\pi^2 R,}{T^2}, \varphi' = \frac{4\pi^2 R'}{T'^2}$ etc. dividiendo, tendremos $\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{R'}{T^2} : \frac{R'}{T'^2}$ ó sea $\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{RT'^2}{R'T^2}$: ahora bien, por la tercera ley de Kepler tenemos $\frac{T^2}{T'^2} = \frac{R^3}{R'^3}$ luego sustituyendo

[1] Véase el cap. I § 3º del Libro III la demostracion en la nota, pág. 111.

será $\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{R.R'^3}{R'R^3} = \frac{R'^2}{R^2}$, es decir, que la fuerza está en razon inversa del cuadrado del radio, ó sea, de la distancia.

301. Mas puesto que las órbitas de los planetas son elípticas, el radio será variable; pero en este caso, como el radio vector describe las áreas proporcionales á los tiempos, la fuerza que solicita al planeta se dirigirá siempre hácia el Sol, y ocupando el Sol el foco de la elipse, esta fuerza variará tambien segun el cuadrado de la distancia del planeta al Sol. Por medio de este raciocinio llegó Newton al descubrimiento de la ley fundamental que rige los movimientos de los cuerpos celestes; pero su perspicaz ingenio no estaba todavía satisfecho: queria hallar el modo de comprobarla. Un dia mientras estaba descansando en su jardin, una bellota le cayó casualmente sobre la cabeza: esto fué suficiente para que le diera motivo á reflexionar si la luna podria del mismo modo caer sobre la tierra, como un cuerpo cualquiera que obedece á la ley de la gravedad terrestre, ó en otros términos, si la fuerza que detiene á la luna en su órbita seria de la misma naturaleza de aquella, por la cual los cuerpos caen sobre la superficie. Comparando pues las leyes de la caida de los cuerpos con las que rigen los movimientos de la Luna, halló que la accion terrestre sobre la Luna no era más que la misma gravedad terrestre disminuida en razon inversa del cuadrado de la distancia, es decir, segun la ley que habia hallado. En efecto, tratemos de averiguar la relacion de la velocidad adquirida en un segundo de tiempo por un cuerpo que cae en la superficie de la tierra, con la que tendria otro cuerpo á la distancia lunar, en el caso de disminuir la fuerza segun el cuadrado de la distancia. Sabemos que la velocidad adquirida por un cuerpo que abandonado á sí mismo, cae sobre la superficie terrestre al cabo de un segundo, está expresada por el espacio que recorreria con movimiento uniforme cesando al mismo tiempo la accion de la gravedad, es decir, $9^m,8088$. Si ahora suponemos un cuerpo que caiga á la distancia lunar, admitida la ley del cuadrado de la distancia, para tener la expresion de la velocidad adquirida por dicho cuerpo al cabo de un segundo, bastará dividir $9^m,8088$ por el cuadrado de 60 que es 3600, siendo la distancia igual á 60 radios terrestres, el cociente 0.002724 será la expresion buscada. Comparemos esta velocidad con la que en realidad tiene la Luna al cabo de un segundo. Para esto sea T la Tierra [fig. 203] LB'L' la órbita lunar; sea LB' el arco descrito por la Luna en un segundo: la fuerza que solicita á la Luna hácia la Tierra está representada por NB' que por la pequeñez del arco, viene á ser igual á LB. Ahora bien; por la mecánica sabemos que

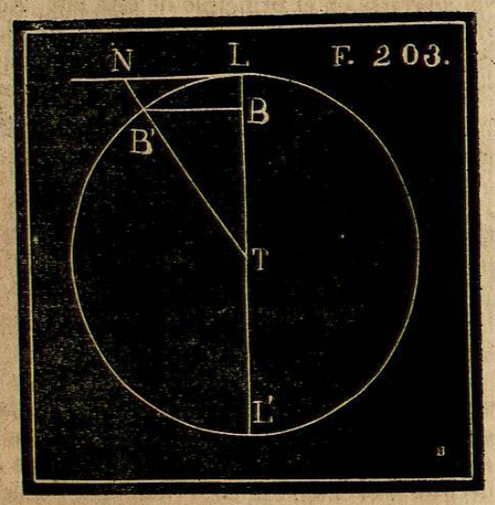
UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

$\frac{LB}{LB'} = \frac{LB'}{LB'}$: de aquí resulta que $LB = \frac{LB'^2}{2R}$. Siendo LB′ la velocidad de la Luna en un segundo, la fuerza que obra sobre la unidad de su masa, segun la ley de la caida de los cuerpos, será medida por el doble de LB, ó sea por $\frac{LB'^2}{R}$. Para hallar el valor de LB′, formaremos el siguiente raciocinio: la circunferencia de la tierra es de 40.000.000 de metros: la circunferencia de la órbita lunar será 60 veces más grande, ó más exactamente,

$$= 2\pi \times 60 \times 6.366.778,^{m}5 = 2.399.002.138^{m},8,$$

dividiendo esta cantidad por 2.360.448″, que son los segundos contenidos en una revolucion sideral (=27°,321,661), tendremos en metros el espacio recorrido en un segundo por la Luna, á saber, 1.016^{m}08: por lo tanto será

$LB' = \frac{1.016^{m},08^2}{6.336.778.5 \times 60} = \frac{1.032.418.5664}{382.006.710} = 0.002702$. Este último número expresa la velocidad adquirida por la Luna al cabo de un segundo en virtud de la atraccion terrestre. Ahora bien, esta expresion bien poco difiere de la que hemos hallado más arriba para un cuerpo cualquiera, que obedezca á la gravedad terrestre desde la distancia lunar: portanto, despreciando la pequeña diferencia que existe entre los números 0.002724 y 0.002 702, debida á las pequeñas perturbaciones de los movimientos de la Luna y de la Tierra, aparece claro que la fuerza atractiva de la tierra sobre la Luna, sigue la ley de la razon inversa del cuadrado de la distancia.



F. 203.

302. Ahora bien, puesto que la gravedad terrestre obra en razon directa de la masa de un cuerpo, se infiere justamente que la fuerza atractiva de los cuerpos celestes es tambien proporcional á la masa

atraida; de modo que, si C expresa el coeficiente de la atraccion de la unidad de masa en la unidad de tiempo, esta fuerza será expresada por $\varphi = \frac{mC}{r^2}$. De esto se deduce que ó las masas de los diversos planetas son todas iguales, ó no es exacta la 3ª ley de Kepler. Mas como sabemos que las masas de los planetas son desiguales, siendo, por otra parte muy pequeñas con relacion á la inmensa masa del sol, la tercera ley de Kepler en realidad no es más que aproximada.

303. Que esta ley de atraccion sea una propiedad inherente á toda la materia que existe en el universo, y no solo perteneciente á los cuerpos celestes, por lo cual se le dá el nombre de *Gravitacion universal*, lo prueba una multitud de hechos, que la ciencia no puede menos de admitir como consecuencia necesaria de dicha atraccion. Así, la atraccion de dos balas de plomo de diferente diámetro, la desviacion de la plomada por la cercanía de las grandes masas de las montañas, el fenómeno de las mareas, de la precesion de los equinoccios, y la nutacion del eje terrestre no pueden explicarse, sin apoyarse en el principio de esta ley. Además, no solo considerando nuestro sistema observaremos que los satélites de Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno, la Luna con respecto á la Tierra obedecen á las mismas leyes que rigen los planetas primarios con relacion al sol, sino que tambien examinando fuera de dicho sistema los movimientos de las estrellas dobles, triples etc., no podemos menos de reconocer en conjunto la existencia de este principio. Las mismas perturbaciones que se observan en los movimentos de los cuerpos celestes, no solo son una consecuencia necesaria de este hecho, sino que han dado motivo á la prueba más irrefragable de su existencia con el descubrimiento del planeta Neptuno, hecho únicamente por medio del cálculo, fundado en la fórmula de la ley universal, hallada por el inmortal génio de Newton.

304. Aunque esto se nos manifiesta tan claramente que negarlo seria admitir el absurdo más grande en la ciencia, ¿podemos sin embargo, decir que esta fuerza es un principio activo en la materia? ¿O podriamos explicar en qué consiste esta fuerza? Preciso es decirlo: si el entendimiento humano puede discurrir sobre los hechos y las observaciones, si de los efectos puede remontarse á la existencia de una causa que los produce, con todo está muy lejos de penetrar en el fondo de la naturaleza íntima de esa misma causa, que solo puede conocer aquella Mente infinita que en su omnipotencia, con un simple acto de su voluntad, crió la materia y determinó sus leyes. Por tanto, debemos contentarnos con poseer y perfeccionar por medio de la observacion y el raciocinio, todo aquello

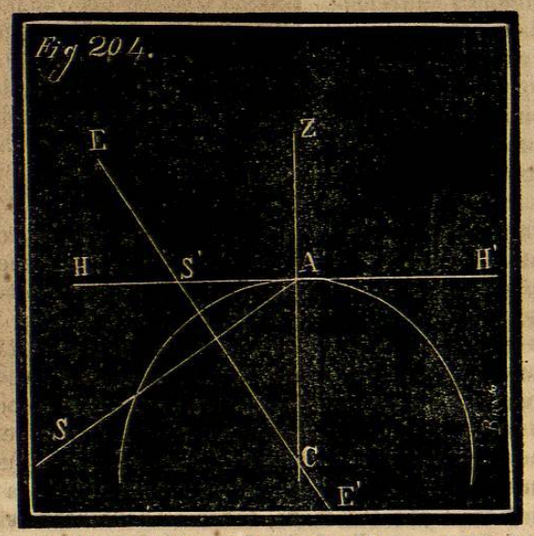
que podemos alcanzar sin pretender penetrar más allá de lo que el Criador permite á nuestro entendimiento limitado.

Para satisfacer el deseo de aquellos que, gustando de esta especie de estudios, quisieran tener conocimientos más extensos, é investigar por sí mismos algunos de los resultados que se deducen de los principios expuestos en el texto, he querido añadir algunas notas en forma de problemas, los cuales, aunque por sí no sean del dominio de la Cosmografía, sin embargo exponiéndolos de un modo fácil y llano, sin dejar de ser como un complemento de dicho estudio, serán de una utilidad no pequeña á los eclesiásticos especialmente á quienes importa no poco tener ciertos conocimientos sobre la materia como la division del tiempo, que por ley eclesiástica, se halla íntimamente ligada con la observancia de ciertos preceptos, y la confeccion del directorio del oficio divino, en cuya formacion tiene tanta parte la Cosmografía.

Nota A.

Averiguar la hora de la salida del sol y la duracion del crepúsculo.

Dijimos que el crepúsculo empieza ó acaba, cuando el sol se halla á 18° bajo del horizonte, cuyos grados hay que contar sobre el círculo de altura; ahora bien; sea (fig. 204) la posicion del sol á 18° bajo del horizonte, la distancia zenital será expresada por la fórmula general: $\cos. Z = \text{sen. } \lambda. \text{ sen. } D + \cos. \lambda. \cos. D \cos. h$, siendo λ la latitud del lugar D la declinacion del sol, h el arco semidiurno. Para averiguar el valor del arco h en su movimiento diurno, será preciso fijar el valor de la variable Z. Para esto sabemos que hallándose el sol á 18° debajo del horizonte $Z = 90° + 18° = 108°$, y que habiendo descrito el arco SS' en un tiempo determinado que representa la duracion del crepúsculo, será $Z = 90°$,



hallándose el sol en el horizonte. En este último caso, la fórmula se convertirá en $\cos. h = -\text{cotg. } \lambda. \text{ cotg. } D = -\text{ tg. } \lambda. \text{ tg. } D$, y en el primero será $\cos. h = \dfrac{\cos. Z}{\cos. \lambda. \cos. D} - \text{tg. } \lambda. \text{ tg. } D$.

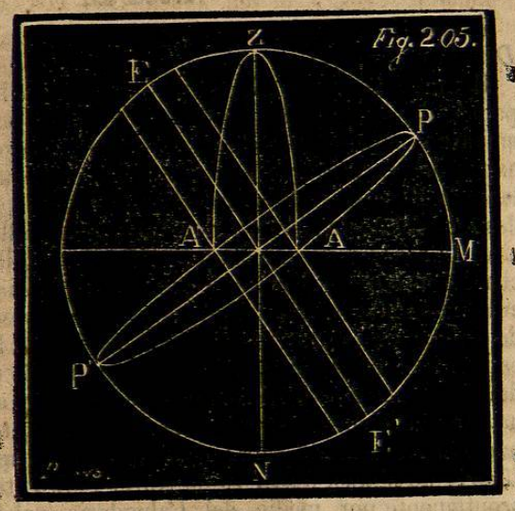
Por lo tanto habiendo calculado el valor $-\text{cotg. } \lambda. \text{ cotg. } D$, para la salida del sol, se hallará la duracion del crepúsculo por la otra

$$\cos. h = \frac{\text{sen. } 18°}{\cos. \lambda. \cos. D}.$$

Es de advertir que el valor de h es variable; pues puede ser $h > 90°$, $h < 90°$, $h = 90°$. Si $h = 90°$, el arco semidiurno del dia será exactamente de 6^h, y el sol se hallará en el mismo ecuador. Si $h > 90°$, dicho arco será mayor de 6^h, pues el paralelo del sol se halla entre el ecuador y el polo del hemisferio en que está el observador. Si finalmente $h < 90°$, el arco semidiurno del dia será menor de 6^h, hallándose el sol entre el ecuador y el polo del hemisferio opuesto. Por lo tanto, si $h = 180° - PA$ [fig. 205], tendremos

$$\cos. P = -\text{ cot. } PZ. \text{ cot. } PA$$
$$\text{ó sea, } \cos. h = -\text{ cot. } \lambda. \text{ cot. } D$$
$$\text{y } \cos. P' = +\text{ cot. } PZ. \text{ cot. } PA,$$
$$\text{ó sea, } \cos. h' = +\text{ cot. } \lambda. \text{ cot. } D.$$

Teniendo, pues, $\cos. h$ y $\cos. h'$ el mismo valor numérico con signo contrario, los dos ángulos serán complemento el uno del otro: de consiguiente, cuando las declinaciones del sol son iguales, pero de signo contrario, lo que se verifica en dos estaciones distantes entre sí seis meses, el arco diurno de una estacion es igual al arco nocturno de la otra y los arcos diurnos y nocturnos de las dos estaciones son complementarios entre sí.



Trátese ahora de hallar la hora de la salida del sol el 21 de Diciembre para una latitud $= -36°,49'$, tendremos: