

11. Del uno al seis.
12. Del uno al siete.
13. Del uno al ocho.
14. Del uno al nueve.
15. Del uno al diez.
16. Uso del metro lineal para medir con él y con el decímetro. En los objetos pequeños se usará también el centímetro.
17. Observación del metro cuadrado, el decímetro cuadrado y el centímetro cuadrado. Ejercicios de medición. Representación gráfica en el pizarrón y en las pizarras, de superficies cuadradas y rectangulares exactas.
18. El metro cúbico, el decímetro cúbico y el centímetro cúbico. Construcciones objetivas de cubos y paralelepípedos de volúmenes exactos.
19. Uso del litro, medio litro, cuarto de litro, décimo de litro, para líquidos y para semillas. Su comparación con el decímetro y centímetro cúbicos.
20. Uso de las balanzas para pesar objetos pequeños ó bien agua destilada á la temperatura de cuatro grados del termómetro centígrado. Uso práctico de las pesas correspondientes.
21. Observación de las monedas modernas de cobre y plata, indicando su valor y las particularidades del cuño en ambas caras.
22. Ejercicio objetivo de divisibilidad de la unidad por medio de diez tiras de papel de un metro de largo y cinco centímetros de ancho; de manera que una tira represente mitades, otra tercios, otra cuartos, etc., hasta décimos.
23. Ejercicio de comparación respecto de las partes de que se forma una tira en relación con las demás

partes, comenzando con las mitades y acabando con los décimos.

24. Ejercicio de equivalencia de las partes menores de una tira con las mayores de otra; pero que sean divisiones exactas; por ejemplo, la mitad reducirla á cuartos, sextos, octavos ó décimos.

25. Ejercicio objetivo de comparación con las fracciones de una misma tira, por ejemplo, un quinto con dos, tres ó cuatro quintos, etc.

26. Ejercicio objetivo de comparación con las fracciones de dos tiras diferentes, por ejemplo, una mitad con un tercio, un cuarto, un quinto, etc.

27. Ejercicio de divisibilidad con números exactos, en esta forma: ¿qué números del uno al diez tienen mitad exacta, tercera, cuarta, etc., hasta décima? ¿cuál es la mitad de dos, cuatro, etc.?

28. Ejercicio de divisibilidad con números inexactos, en esta forma: mitad de uno, tres, cinco, siete, nueve; tercera de uno, dos, cuatro, cinco, siete, ocho, diez, etc.

29. Cálculo objetivo de adición y substracción con fracciones de una misma tira.

30. Cálculo objetivo de adición y substracción con fracciones de dos tiras diferentes, por ejemplo, mitades con tercios, mitades con cuartos, etc.

31. Ejercicio de divisibilidad de fracciones con las tiras de papel de esta manera: la mitad de una mitad, de un tercio, de un quinto; la tercera de una mitad y de un tercio, etc. O bien, en esta otra forma: dividir uno entre dos, tres, hasta diez, dividir una mitad entre dos, tres, hasta diez, dividir una mitad entre dos, tres, cuatro, cinco, etc.

32. Ejercicio de relación de una fracción con otra ó con la unidad, de esta manera: ¿qué es el cuarto, el sex-

to, el octavo y el décimo, respecto de la mitad? etc.

33. Ejercicios objetivos y representativos para medir la superficie de un cuadrado de una, dos, y tres dimensiones lineales. Formar el cuadrado de los números 1, 2 y 3 y uso de los signos respectivos. Problemas relativos al cuadrado.

34. Ejercicio para determinar de una manera objetiva y gráfica, el lado lineal de un cuadrado de 1, 4, y 9 dimensiones cuadradas. Uso de los signos, problemas relativos.

35. Ejercicio objetivo y representativo para medir el volumen de una y dos dimensiones lineales. Formar el cubo de los números 1 y 2, empleando los signos correspondientes. Problemas relativos al cubo.

36. Ejercicio para determinar de una manera objetiva y gráfica el lado lineal de un cubo que mida 1 ó 8 dimensiones cúbicas. Uso de los signos, problemas relativos.

37. Ejercicios mentales con unidades enteras, haciendo cálculos de adición, substracción, multiplicación y división combinadas; análisis y síntesis mental; igualaciones y desigualaciones también mentales.

38. Cálculo mental con unidades fraccionarias; haciendo todos los ejercicios del número anterior.

39. Cálculo escrito con rayas ó puntos, usando las palabras: *más, menos, veces, entre, igual, mayor que y menor que*. Sumar, restar, multiplicar y dividir; análisis y síntesis escrita; ecuaciones y desigualdades escritas.

40. Conocimiento de las diez cifras arábigas y de los signos aritméticos. Ejercicios escritos correspondientes.

41. Uso de los términos sumando y suma; minuyendo, substrayendo y resta; multiplicando, multiplicador y producto; dividiendo, divisor, cociente y residuo.

42. Ejercicios para distinguir en un problema los datos conocidos y la incógnita. Este ejercicio se aplicará á los problemas de sumar, restar, multiplicar y dividir.

43. Ejercicios para iniciar al alumno en el razonamiento de cada problema, á fin de que distinga si se trata de un aumento ó de una disminución ya sea de unidades absolutas, proporcionales ó trascendentes.

44. Ejercicios para iniciar al niño en el planteo de los problemas.

45. Ejercicio para que el alumno ejercite, con rapidez, las operaciones que resulten indicadas en el planteo.

46. Problemas escritos en forma de ecuaciones numéricas, despejando la incógnita en la suma y en la resta.

47. Problemas escritos en forma de ecuaciones numéricas, despejando la incógnita en la multiplicación y división.

48. Problemas escritos en forma de ecuaciones, despejando la incógnita, en el cuadrado y en el cubo y en la raíz cuadrada y cúbica.

49. Conocimiento objetivo de los números del uno al cien, usando las siguientes monedas: diez centavos de cobre, diez décimos de plata y un peso. Pueden también substituirse con otros objetos.

50. Ejercicio final objetivo de los cien primeros números. Dadas las monedas respectivas, designar el número. Dado el número, designar las monedas correspondientes.

Este sencillo bosquejo de programa, puede desarrollarse mucho más; pero si mis lectores desean mayores detalles, consulten mi obra "El primer año de Aritmética" y, en ella, los encontrarán.

IV

Antes de pasar al análisis del segundo grado de cálculo aritmético y algebraico en la Escuela Primaria, vamos á hacer algunas explicaciones finales acerca del primer grado, sobre los puntos que en nuestro concepto hayan podido causar alguna sorpresa á nuestros lectores, no sólo por la novedad de nuestros programas y su desarrollo, sino porque á su juicio los crean irrealizables en la práctica ó les parezcan contrarios á las tendencias de la pedagogía moderna.

Desde luego, los ejercicios de observación marcados con los números 1, 2, 3 y 4 son en extremo sencillos, y su objeto fundamental es dar al niño la noción indefinida de la cantidad.

Los ejercicios 5 y 6 dan principio al análisis de la cantidad y proporcionan al alumno tres nuevas é importantes nociones: la unidad, la pluralidad y el número.

Los ejercicios designados con los números del 7 al 15, dan comienzo al cálculo objetivo, no sólo combinando gradualmente los números del uno al diez en las cuatro operaciones fundamentales; sino haciendo además ejercicios objetivos de composición y descomposición por medio del análisis y de la síntesis y ejercicios de comparación por medio de igualaciones y desigualaciones, también objetivas. Aunque estos dos últimos ejercicios no son una novedad en pedagogía; sí lo son para la enseñanza de la aritmética y desconocidos por completo en nuestras Escuelas. Estamos, pues, obligados á dar de ellos algunas breves explicaciones.

ANÁLISIS Y SÍNTESIS.—Todos los alumnos estarán provistos de una cajita con diez semillas.

Primer ejercicio.—Coloquen sobre la mesa una semilla ¿cuántas semillas son? ¿cuántas semillas se necesitan para formar el número uno? Pongan otra semilla ¿cuántas semillas son? ¿cuántas semillas se necesitan para formar el número dos? Coloquen una nueva semilla ¿cuántas semillas son? ¿cuántas semillas se necesitan para formar el número tres? Así se continuará hasta el diez. ¿Cuántos unos hay en diez? ¿cuántos unos hay en siete? ¿en cinco? etc.

Segundo ejercicio.—Coloquen dos semillas sobre la mesa ¿cuántos unos hay en dos? ¿cuántos dos hay en dos? Pongan tres semillas ¿cuántos unos hay en tres? ¿cuántos dos hay en tres? Pongan cuatro semillas ¿cuántos unos hay en cuatro? ¿cuántos dos? Después se analizarán los números del cinco al diez en unos y en dos. ¿Con cuántos dos se forma el diez? ¿cuántos dos hay en siete? ¿en nueve? ¿en cinco? etc.

Tercer ejercicio.—Coloquen tres semillas sobre la mesa ¿cuántos unos hay en tres? ¿cuántos dos? ¿cuántos tres? Pongan cuatro semillas ¿cuántos unos hay en cuatro? ¿cuántos dos? ¿cuántos tres? Sígase el análisis del cinco al diez en unos, dos y tres. ¿Cuántos tres hay en diez? ¿cuántos tres hay en siete? ¿en nueve? ¿en ocho? etc.

El cuarto ejercicio comprende el análisis de los diez primeros números en unos, dos, tres y cuatros y la síntesis correspondiente. Así se continuará hasta el décimo ejercicio, que comprenderá el análisis del diez en unos, en dos, en tres, etc., hasta diez.

Como se verá por estos ejercicios, son innegables las ventajas del análisis y la síntesis en la composición y descomposición de los diez primeros números; y el educando, al practicarlos, ha comprobado hasta la evidencia la siguiente ley matemática: "todo número es

un compuesto ó de unidades ó de sumandos, ó de factores," y con la posesión de esa ley, tiene la clave del mecanismo concreto de todas las operaciones numéricas.

IGUALACIONES Y DESIGUALACIONES.—Los alumnos tendrán dos cajitas, cada una con diez semillas.

Primer ejercicio.—Pongan dos grupos separados de cinco semillas cada uno. ¿Son iguales ó desiguales? ¿Por qué son iguales? Quiten de cada grupo dos semillas ¿cuántas quedan? ¿Los grupos de tres que quedan son iguales ó desiguales? Agreguen á esos grupos cuatro semillas más á cada uno ¿cuántas quedan? ¿son iguales los nuevos grupos ó desiguales? Háganse otras observaciones, agregando y quitando un mismo número á ambos grupos de semillas.

Segundo ejercicio.—Pongan un grupo de cinco semillas y otro de siete ¿son iguales ó desiguales? ¿por qué son desiguales? Quiten dos semillas á cada grupo. ¿Los resultados son iguales ó desiguales? Agreguen á los nuevos grupos tres semillas más á cada uno. Los resultados que quedan ¿son iguales ó desiguales? Háganse nuevas observaciones.

Tercer ejercicio.—En esta cajita de cartón he depositado cierto número de semillas; si á ese número le agrego otras cuatro, juntaría siete ¿cuántas semillas hay en la cajita? Antes de resolver van á contestarme primero algunas preguntas. Las semillas de la cajita más las cuatro que están fuera, hacen una suma de siete, grupo que ven ustedes delante, ¿cómo harán para dejar sola aquí, esta cajita, sin que la igualdad se altere?—Quitando las cuatro semillas de afuera y quitando también otras cuatro semillas del segundo grupo.—Muy bien ¿cuántas quedaron en el segundo grupo?—Tres.—¿Y los resultados obtenidos son iguales ó desi-

guales?—Iguales.—Luego, ¿cuántas semillas hay dentro de la cajita?—Debe haber tres.—Vamos á abrirla. En efecto; hay tres semillas, aquí las tienen ustedes...

En la misma forma que el tercer ejercicio se harán los que sigan, considerando como incógnita una cajita de cartón dentro de la cual se depositará cierto número de semillas, y en la formación de los problemas respectivos, esa cajita podrá ser un sumando, una suma, una resta, un factor ó un divisor que despejados convenientemente por medio de agregaciones ó desagregaciones, se dará con dichos ejercicios una idea exacta al educando de este gran axioma matemático: "si á cantidades iguales se agregan ó quitan cantidades iguales, los resultados serán iguales," y este principio es la base para la solución de todos los problemas, cuyo planteo se haga en forma de ecuación numérica.

Los ejercicios marcados con los números del 16 al 21 tienen por objeto el uso práctico de las medidas métricas fundamentales; como el metro, el litro, el kilo y las monedas de cobre y plata.

Los ejercicios marcados con los números del 22 al 32 tienen por objeto el estudio de la unidad en relación con cada una de las partes en que pueda dividirse; es decir, en dos, en tres, etc., hasta diez partes; ya sea sirviéndose del ábaco de fracciones, ó bien por medio de tiras de papel, las cuales se someterán á la observación directa de los niños. Estos nuevos ejercicios se harán en la misma forma que los anteriores; se contará del uno al diez, se analizará la unidad y se sintetizará con las partes en que dicha unidad se descomponga; se harán comparaciones de las partes entre sí y con el todo, y se ejecutarán cálculos de las cuatro operaciones. Los fenómenos numéricos de esta especie, son de antemano ya conocidos del niño; todos saben

dividir un pan en dos mitades; de una mitad saben hacer otras dos partes y así sucesivamente; ignoran tan sólo los términos, las palabras adecuadas con que designar esas partes; es, pues, la primera lección un ejercicio de lenguaje, con el cual hay que explicar objetivamente que las dos partes de la primera tira de papel, se llaman mitades, las tres de la segunda, tercios, y las que siguen se denominan respectivamente cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos y décimos. Haced en seguida observar á vuestros discípulos, por comparación, si los décimos son más grandes que los quintos, ó si las mitades son más pequeñas que los séptimos. Que digan qué relación hay entre el cuarto y la mitad, ó entre el décimo y el quinto. Que calculen por superposición, qué suma darán media tira con un tercio de tira, ó cuál será la diferencia entre tres cuartos de tira y cinco octavos de tira. Cuál podrá ser la tercera parte de una mitad, ó cómo se partirá un tercio de tira entre tres personas. Pero no quiero abrumar á mis benévolos lectores con una serie ilimitada de ejercicios que en el momento se me ocurren, y que por otra parte, existen ya escritos en otro de mis libros, sólo haré constar que dichos ejercicios han sido el encanto de mis discípulos, que han experimentado con ellos un placer inmenso, y que más de una vez los he visto afanosos y rebosando alegría, superponer sus tiras de papel unas con otras ó compararlas entre sí, quedando después profundamente satisfechos de sus importantes descubrimientos, que no son otra cosa, que leyes y fenómenos numéricos desconocidos en su mayor parte, por los que jamás han explorado ni superficialmente, los campos vastísimos que en el orden puramente concreto, son del dominio exclusivo de las matemáticas.

Los números 33 y 34 son ejercicios objetivos y gráficos que consisten en trazar un cuadrado perfecto de un decímetro lineal por lado, otro de dos decímetros lineales, y otro de tres. En seguida se trazarán las dimensiones cuadradas que resulten en cada cuadrado, y el alumno podrá observar: que sobre la base lineal de un decímetro, se construye un decímetro cuadrado de superficie; que sobre la base lineal de dos decímetros, se construye un cuadrado que mide cuatro decímetros cuadrados de superficie, y que sobre la base lineal de tres decímetros, se construye un cuadrado que mide nueve decímetros cuadrados de superficie.

Los números 35 y 36 son ejercicios objetivos en los cuales el alumno observará que sobre un decímetro cuadrado de superficie, se puede colocar un decímetro cúbico de volumen, y que sobre una superficie de cuatro decímetros cuadrados, se puede colocar un cubo que mida ocho decímetros cúbicos de volumen.

Hasta aquí termina en el primer año la parte de cálculo objetivo; hay que prescindir ahora de los objetos por un momento, y hacer los mismos ejercicios anteriores, por medio del cálculo mental; es la primera transición al cálculo abstracto, pero sin olvidar los nombres de los objetos. A este fin se dirigen los ejercicios marcados con los números 37 y 38 de nuestro programa.

Tanto la carencia de objetos como las dificultades intrínsecas del cálculo mental, hacen sentir en el niño la necesidad de representar los números por escrito, y esta necesidad se satisface en el número 39, expresando por medio de puntos ó rayas en el pizarrón y en las pizarras los números del uno al diez, así como la indicación de las relaciones numéricas con las palabras: *más, menos, veces, entre, igual, mayor que y menor que.*

Como esta forma de representar los números es en extremo laboriosa, el alumno se verá obligado á inventar símbolos abreviados que los representen de una manera sencilla, y entonces será el momento oportuno en que el Profesor dé á conocer las diez cifras arábigas y los signos de relación correspondientes, con todo lo cual se calcularán, con excepción de las fracciones, la serie de ejercicios objetivos y mentales anteriormente ejecutados. Tal es el objeto del número 40.

El número 41 se destinará á dar á conocer algunos términos técnicos, como: sumando y suma; minuendo, sustraendo y resta; multiplicando, multiplicador y producto; dividendos, divisor, cociente y residuo; pero todo indicado en forma de ecuación numérica.

Los números del 42 al 45 son ejercicios, cuyo objeto es poner á los alumnos en aptitud de distinguir en un problema los datos conocidos y la incógnita; así como enseñarles á razonar, plantear y ejecutar por escrito la operación ú operaciones respectivas.

Los números 46, 47 y 48, son ejercicios para plantear problemas escritos en forma de ecuaciones numéricas, despejando la incógnita por agregaciones ó desagregaciones, según la relación con que esté unida á otra cantidad; ya sea por suma ó por resta; ó bien como factor ó como divisor.

Los números 49 y 50, son ejercicios objetivos para formar los números del once al cien, empleando centavos y décimos de plata. El procedimiento es muy sencillo y tiene dos partes: primera, dadas las monedas, designar el número; segunda, dado el número, designar con qué monedas puede representarse.

Con todo lo expuesto, creemos haber amplificado nuestro programa de primer año elemental de aritmética; pero si á pesar de estas explicaciones quedaren al-

gunas dudas, estamos seguros que se desvanecerán, cuando los disidentes pongan en práctica todas y cada una de nuestras indicaciones metodológicas.

V

La continuación del presente artículo, es un estudio detallado de los seis grados de Aritmética, que nos abstenemos de reproducir aquí, por no hacerlo más extenso; pero si nuestros lectores desean conocer nuestro plan completo acerca de la metodología del cálculo, pueden consultar la serie de libros de Aritmética que hemos publicado para todos y cada uno de los años escolares, del primero al sexto, de la enseñanza primaria, y por ahora sólo nos limitaremos para dar fin á este estudio, á insertar, en forma de cuadros sinópticos, los diferentes asuntos que á nuestro humilde juicio debe abarcar la metodología de esta materia, que por su carácter esencialmente educativo, es de la más alta importancia.

PRIMER CUADRO.

Matemáticas.	I Su objeto.	La cantidad.						
	II Su división.	<table> <tr> <td>El fondo</td> <td>Medición de la materia y de sus atributos.</td> </tr> <tr> <td>La forma</td> <td> <table> <tr> <td>Cálculo concreto.</td> </tr> <tr> <td>Cálculo abstracto.</td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	El fondo	Medición de la materia y de sus atributos.	La forma	<table> <tr> <td>Cálculo concreto.</td> </tr> <tr> <td>Cálculo abstracto.</td> </tr> </table>	Cálculo concreto.	Cálculo abstracto.
	El fondo	Medición de la materia y de sus atributos.						
La forma	<table> <tr> <td>Cálculo concreto.</td> </tr> <tr> <td>Cálculo abstracto.</td> </tr> </table>	Cálculo concreto.	Cálculo abstracto.					
Cálculo concreto.								
Cálculo abstracto.								
III El método.	<table> <tr> <td>Fenómenos matemáticos.</td> </tr> <tr> <td>Leyes matemáticas.</td> </tr> <tr> <td>Aplicaciones matemáticas.</td> </tr> </table>	Fenómenos matemáticos.	Leyes matemáticas.	Aplicaciones matemáticas.				
Fenómenos matemáticos.								
Leyes matemáticas.								
Aplicaciones matemáticas.								

SEGUNDO CUADRO.

La cantidad.	I Sus caracteres.	{ Aumentos. Diminuciones. Igualdades.
	II A qué se aplica?	{ Espacio. Tiempo. Movimiento.
	III Su valor.	{ Unidad. Pluralidad. Número.

TERCER CUADRO.

División de las matemáticas.	I El fondo: fenómenos y leyes.	{ Geometría. { Medición y construcción de líneas, superficies y volúmenes. Cronometría. { Medición natural y artificial del tiempo. Mecánica. { El movimiento, el reposo y el equilibrio.
	II La forma: cálculo.	{ Aritmética. Algebra.

CUARTO CUADRO.

Aritmética y Algebra.	I Operaciones.	{ Absolutas. { Suma. Resta. Proporcionales. { Multiplicación. División. Trascendentes. { Potencias. Raíces.
	II Problemas.	{ Simples. Combinados.
	III Teoremas.	{ Inductivos. Deductivos.

QUINTO CUADRO.

Metodología del número.	I Nomenclatura.	{ Cantidad. Unidad, pluralidad y número. Numeración. Operaciones. Comparaciones y relaciones. Problemas. Teoremas.
	II Fenómenos, leyes y aplicaciones.	{ Aumentos y disminuciones. Composición y descomposición. Igualdades y desigualdades.
	III Procedimientos de cálculo.	{ Cálculo objetivo. ,, mental. ,, escrito.

SEXTO CUADRO.

Problemas.	I El enunciado.	{ (a) Los datos: parte conocida, en forma de proposición afirmativa. (b) La incógnita: parte desconocida, en forma de proposición interrogativa.
	II Solución.	{ (a) Razonamiento. (b) Planteo. (c) Ejecución de operaciones.

México, 1901.