ARTICULO TRIGESIMOSEGUNDO.

LA ENSEÑANZA DEL PROBLEMA ARITMETICO.

I

Hay todavía la nociva tendencia entre un gran número de Maestros contemporáneos, á considerar como elemento indispensable para la resolución de un problema aritmético, la aplicación de reglas más ó menos adaptables al caso particular, y cuya solución se pretende averiguar. Si se trata, por ejemplo, de un problema de interés, al instante escucharemos de labios de los alumnos éstas ó parecidas frases: "para buscar el interés se multiplica el capital por la tasa y el producto se divide por cien." El mismo camino se sigue para la resolución de los problemas de regla de tres, compañía, aligación, descuento, etc., es decir, aplicando siempre alguna regla previamente aprendida de memoria. Pero hay otra clase de cuestiones de cálculo que los estudiantes elevan á la categoría de principios ó de teoremas abstractos, como pasa con la reducción de quebrados á un común denominador, la conversión de una especie cualquiera á otra equivalente, etc., y en todos estos casos escuchamos siempre los siguientes dogmas: "Para reducir quebrados á un común denominador se multiplica el numerador del primer quebrado por los denominadores de los demás, menos por el suyo." "Para multiplicar quebrados se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador." "Para convertir un quebrado común en decimal, se divide el numerador entre el denominador y se aproxima el cociente, etc., etc." Preguntad ahora á un estudiante el por qué de estas reglas y su contestación será el silencio, ó si acaso contestare, dará como respuesta alguna demostración aprendida mnemónicamente, siguiendo la antigua dialéctica matemática, ó bien os dirá de su cosecha algún disparate imperdonable. El resultado de esta enseñanza se comprende fácilmente, no sirve para la vida práctica, porque no educa, ni instruye; y tan pronto como desaparecen del cerebro las últimas huellas del recuerdo que dejan las reglas y las fórmulas aprendidas de esa manera, sólo queda en su lugar un gran vacío, símbolo inequívoco de la ineptitud y de la impotencia.

A remediar males tan graves tiende el presente artículo, en el que explicaremos, con la extensión que nos fuere posible, la índole del problema aritmético, la forma típica que debe revestir y el procedimiento científico que debe emplearse en su resolución.

Para proceder con método, clasificaremos los problemas aritméticos en tres grupos fundamentales que corresponderán respectivamente á la clasificación de las operaciones numéricas en absolutas, proporcionales y trascendentes.

II

Los problemas *absolutos*, según la acepción que damos á la palabra, son aquellos en los que sólo se emplean en su resolución las operaciones de *sumar* y de *restar;* es decir, en las cuestiones en que se trata de buscar un aumento ó una diminución de *unidades* absolutas; por consiguiente, el fondo de estos problemas está caracterizado en las dos proposiciones siguientes:

1ª Todo aumento de unidades absolutas se expresa y resuelve por medio de la suma.

2ª Toda diminución de unidades absolutas se expresa y resuelve por medio de la resta.

Pero tanto el aumento como la diminución de las unidades absolutas se presentan en la vida real en forma de problemas concretos, en los cuales los datos están ligados entre sí por medio de ciertas relaciones que vamos á determinar en los ejemplos siguientes:

Primer problema. Cuando María nació, Luisa tenía 5 años; ¿cuántos años tendrá Luisa, cuando María tenga 21 años?

Observando los datos de este problema se notará la siguiente relación: mientras *más* años tenga María, *más* tendrá Luisa, es una relación *directa*, y como el mismo número de años que *aumenta* la edad de María, *aumenta* la de Luisa, para resolver el problema se tendrá que ejecutar una *suma*:

$$x=21+5=26.$$

Segundo problema. Cuando Luisa tenía 26 años de edad, María tenía 21; se desea saber cuando nació María ¿qué edad tendría Luisa?

Se observa la siguiente relación: mientras *menos* años tenga María, *menos* tendrá Luisa, es una relación *directa*, y como el mismo número de años que *disminuye* la edad de María, *disminuye* la de Luisa, para resolver el problema se tendrá que ejecutar una *resta*:

$$x=26-21=5.$$

Tercer problema. Un viajero ha recorrido 21 kilómetros y le faltan por caminar 5; ¿qué distancia total tendrá que recorrer?

Se observa en este problema la siguiente relación: mientras *más* kilómetros tenga que recorrer el viajero, *menos* le faltarán por caminar, es una relación *inversa*, y como cada kilómetro que camine de los que le faltan *aumenta* la distancia recorrida, es claro que *aumentando* lo que falta al camino recorrido, se tendrá la distancia total, el problema se resolverá por medio de la *suma*:

$$x=21+5=26.$$

Cuarto problema. Un viajero tiene que caminar 26 kilómetros, le faltan par caminar 5; ¿cuántos kilómetros ha caminado ya?

Se observa en este problema la siguiente relación: mientras *menos* kilómetros recorra, *más* será la distancia que le falta para llegar al término de su viaje, es una relación *inversa*, y como cada kilómetro que avance *disminuye* la distancia por recorrer, es evidente que *disminuyendo* de la distancia total los kilómetros caminados, la diferencia indicará el camino recorrido, el problema se resolverá con una *resta*:

$$x=26-5=21.$$

Quinto problema. La niña María tiene 13 años y su hermana Luisa 18 años; ¿qué edad tendrá María cuando Luisa tenga 26 años?

Analizando la cuestión se notará que hay necesidad de ir aumentando paralelamente ambas edades, hasta llegar al límite que marca el problema. Al fin del primer año, María tendrá 14 años y Luisa 19; al segundo año las edades serán de 15 y 20 respectivamente; al

tercer año de 16 y 21 y al octavo año de 21 y 26; luego cuando Luisa tenga 26 años, María tendrá 21 y habrá transcurrido un período de 8 años, y como la diferencia entre las dos edades conocidas de Luisa, tiene que ser igual á la diferencia de las dos edades de María, por tener que vivir al mismo tiempo, bástanos buscar la primera diferencia y con ella aumentar la edad de María; es decir, se hará primero una *resta* y después una *suma;* es, pues, un problema combinado de sumar y restar:

$$26-18=8. \qquad 13+8=21.$$

Sexto problema. Cuando Luisa tenga 30 años, le faltarán 5 para morir; hoy que tiene 21, ¿cuántos años le faltan para morir?

Según se observa en este problema, Luisa tiene que vivir 30 años más 5 ó sean 35 años; pero como hoy tiene 21, le faltarán para morir lo que falta á 21 para ser igual á 35. La primera es una suma y la segunda una resta; es también un problema combinado de sumar y restar:

$$30+5=35. \qquad 35-21=14.$$

El análisis hecho en estos seis tipos de problemas absolutos, indica que lo fundamental en ellos es distinguir la relación directa ó inversa que exista entre los datos, para determinar, como consecuencia, la operación ú operaciones que deban ejecutarse. Una vez que estos ejercicios estén bien comprendidos por los niños, se puede aplicar en la solución de dichos problemas el sistema de planteos en forma de ecuaciones numéricas.

Los tipos fundamentales de los problemas que se resuelven por medio de las operaciones absolutas, son los siguientes:

1º Relación *directa* de lo *más* á lo *más* por medio de la *suma*.

2º Relación *directa* de lo *menos* á lo *menos* por medio de la *resta*.

3º Relación *inversa* de lo *más* á lo *menos* por medio de la *suma*.

4º Relación *inversa* de lo *menos* á lo *más* por medio de la *resta*.

5º Problema combinado de sumar y restar, en que los datos están en relación directa.

6º Problema combinado de sumar y restar, en que los datos están en relación inversa.

III

Los problemas *proporcionales* propiamente dichos, son aquellos en los que sólo se emplean en su resolución las operaciones de *multiplicar* y *dividir;* es decir, en las cuestiones en que se trata de buscar un aumento ó una diminución de *sumandos* iguales; pero el carácter que más distingue á estos problemas, está indicado en las dos proposiciones siguientes:

1º Conocido el valor de la unidad, determinar el de la pluralidad.

2º Conocido el valor de la pluralidad, determinar el de la unidad.

Pero tanto el valor de la unidad, como el de la pluralidad, pueden obtenerse emplendo indistintamente la multiplicación ó la división, según la clase de relación que exista entre los datos del problema, como veremos en los ejemplos siguientes:

Primer problema. Un juguete cuesta 10 centavos; 5 juguetes ¿cuánto costarán?

La relación que se observa es la siguiente: *más* juguetes costarán *más* centavos, es una relación *directa*, que se resuelve por medio de la *multiplicación:*

Juguetes.	Centavos.
1	10
5	$x = 10 \times 5 = 50.$

Segundo problema. Con 50 centavos se compran 5 juguetes; ¿cuánto costó un juguete?

Relación que se observa: *menos* juguetes costarán *menos* centavos, es una relación *directa* que se resuelve por medio de la *división:*

Juguetes.	Centavos.
5	50
1	$x = \frac{50}{5} = 10.$

Tercer problema. Se sabe que 6 albañiles hicieron una pared en 8 días; un albañil ¿en qué tiempo la hará?

Relación que se observa: *menos* albañiles emplearán *más* días, es una relación *inversa* que se resuelve por medio de la *multiplicación:*

Albañiles.	Días.
6	8
1	$x = 8 \times 6 = 48.$

Cuarto problema. Un albañil hizo una pared en 48 días; 6 albañiles ¿en cuántos días la harán?

Relación que se observa: *más* albañiles emplearán *menos* días, es una relación *inversa* que se resuelve por medio de la *división:*

Albañiles.	Días.

$$1 — 48$$
$$6 — x = \frac{48}{6} = 8.$$

Quinto problema. Sabiendo que 3 libros hán costado 75 centavos, se desea saber ¿cuánto costarán 5 libros?

En este problema se distinguen dos partes: en la primera, 3 libros valen 75 centavos, se conoce el valor de la *pluralidad* y se trata de buscar el de la *unidad*, es decir, el valor de un libro, se resuelve por medio de la *división* de 75 entre 3, que da un cociente de 25 centavos; en la segunda parte se conoce el valor de la *unidad*, un libro vale 25 centavos y se trata de buscar el valor de la *pluralidad*, 5 libros costarán 5 veces el valor de 1, se resuelve por medio de la *multiplicación* de 25 por 5, ó sean 125 centavos:

Libros.	Centavos.

$$3 — 75$$
$$5 — x = \frac{75 \times 5}{3} = 125.$$

Sexto problema. Se sabe que 10 operarios hicieron una obra en 30 días; se desea saber en cuántos días harán la misma obra 15 operarios.

En la primera parte de este problema se conoce el valor de la *pluralidad* y se desea conocer el de la *unidad:* 10 operarios hacen una obra en 30 días, 1 operario la hará en 10 veces más tiempo, se resuelve por medio de la *multiplicación* de 30 por 10, ó sean 300 días. En la segunda parte, se conoce el valor de la *unidad* y se desea conocer el de la *pluralidad:* 1 operario necesita 300 días para hacer una obra, 15 operarios necesitarán 15 veces menos días, se resuelve por medio de la *división* de 300 entre 15, ó sean 20 días:

Operarios.	Días.

$$10 — 30$$
$$15 — x = \frac{30 \times 10}{15} = 20.$$

Lo mismo que en las operaciones absolutas, pasa con las operaciones proporcionales; lo principal en los problemas respectivos, es distinguir la relación directa ó inversa para determinar en seguida la operación que deba ejecutarse. Los tipos fundamentales de problemas proporcionales que resultan, son los siguientes:

1º Relación *directa* de lo *más* á lo *más*, en la que se conoce el valor de la *unidad* y se trata de buscar el de la *pluralidad* por medio de la *multiplicación*.

2º Relación *directa* de lo *menos* á lo *menos*, en la que se conoce el valor de la *pluralidad* y se trata de buscar el de la *unidad* por medio de la *división*.

3º Relación *inversa* de lo *menos* á lo *más*, en la que se conoce el valor de la *pluralidad* y se trata de buscar el de la *unidad* por medio de la *multiplicación*.

4º Relación *inversa* de lo *más* á lo *menos*, en la que se conoce el valor de la *unidad* y se trata de buscar el de la *pluralidad* por medio de la *división*.

5º Problema combinado de multiplicar y dividir, en el que los datos estén en relación directa.

6º Problema combinado de multiplicar y dividir, en el que los datos estén en relación inversa.

Siendo los problemas proporcionales los de mayor aplicación en la vida práctica, voy á hacer en seguida una breve exposición de los más importantes, los cuales han sido explicados por la mayor parte de los matemáticos como teoremas ó principios abstractos y no como problemas proporcionales concretos, que es propiamente la denominación que les corresponde; ya sea que se les considere bajo el punto de vista matemático, ó ya bajo el punto de vista meramente pedagógico.

I. *Reducir varios quebrados á un común denominador.*

Supongamos el ejemplo siguiente:

$$\frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{5}{6},$$

Los matemáticos han encontrado dos procedimientos para efectuar esta reducción: por el *mayor* múltiplo y por el *menor* múltiplo.

Para el primer procedimiento establecen el siguiente dogma: "Se multiplica el numerador de cada quebrado por los denominadores de los demás, menos por el suyo." El resultado quedará así:

$$\frac{360}{720},\quad \frac{480}{720},\quad \frac{540}{720},\quad \frac{576}{720},\quad \frac{600}{720}.$$

Para el segundo procedimiento establecen un nuevo dogma: "Se busca el menor múltiplo común de los denominadores, después se multiplican los dos términos de cada quebrado por el cociente que resulta de dividir el múltiplo común por su denominador." El resultado quedará así:

$$\frac{30}{60},\quad \frac{40}{60},\quad \frac{45}{60},\quad \frac{48}{60},\quad \frac{50}{60}.$$

Examinando ambos procedimientos bajo el punto de vista matemático, se nota que son exactos; pero no

son los únicos que sirven para hacer esa reducción, son procedimientos de carácter particular, y por consiguiente, impropios de constituir por sí mismos una generalización científica. ¿Acaso los números 720 y 60 son los únicos denominadores comunes á los quebrados indicados en el ejemplo que nos ocupa? Es evidente que no, y para probarlo vamos á examinar cada quebrado de los propuestos, que según los procedimientos indicados, nos resultarían las siguientes igualdades:

$$\frac{1}{2} = \frac{360}{720} = \frac{30}{60},\quad \frac{2}{3} = \frac{480}{720} = \frac{40}{60},$$

y así con los demás.

¿Pero el quebrado $\frac{1}{2}$ no admite otra transformación que las dos indicadas? Desde luego se observan las siguientes:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32}, \text{ etc.}$$

El quebrado $\frac{2}{3}$ las siguientes:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18}, \text{ etc.},$$

y cada uno de los demás quebrados se transformarán en una serie infinita de quebrados equivalentes. Luego podremos admitir como denominadores comunes, además del 720 y el 60, otros comprendidos entre esos límites (infranqueables para algunos), ó bien otros menores que 60 y mayores que 720, aun cuando para eso tengamos en algunos casos que cambiar el numerador á la forma decimal. Tomemos el denominador 30, por ejemplo; los quebrados quedarán así:

$$\frac{15}{30},\quad \frac{20}{30},\quad \frac{22{,}5}{30},\quad \frac{24}{30},\quad \frac{25}{30}.$$

Tomaremos el denominador común 12:

$$\frac{6}{12}, \quad \frac{8}{12}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{9{,}6}{12}, \quad \frac{10}{12}.$$

Tomemos el denominador común 6:

$$\frac{3}{6}, \quad \frac{4}{6}, \quad \frac{4{,}5}{6}, \quad \frac{4{,}8}{6}, \quad \frac{5}{6}.$$

Tomemos ahora el denominador común 2:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1{,}33}{2}, \quad \frac{1{,}5}{2}, \quad \frac{1{,}6}{2}, \quad \frac{1{,}67}{2}.$$

Tomemos, finalmente, el denominador común 1:

$$\frac{0{,}5}{1}, \quad \frac{0{,}67}{1}, \quad \frac{0{,}75}{1}, \quad \frac{0{,}8}{1}, \quad \frac{0{,}83}{1}.$$

Con esta última transformación queda probado que los quebrados pueden reducirse á un denominador común cualquiera, desde la unidad hasta el infinito; pero como la unidad cuando es denominador común convierte al quebrado en decimal, resulta que hasta la reducción de quebrados comunes en decimales, es un simple caso particular del procedimiento general que proponemos.

Hasta aquí hemos tratado la cuestión puramente matemática, prescindiendo de las demostraciones que acompañan á cada dogma de los enunciados que por su carácter deductivo y en extremo convencional, presenta confusiones á los escolares, al grado de serles imposible comprenderlas. Voy en seguida á explicar mi procedimiento en la única forma pedagógica posible en que el alumno puede fácilmente asimilarla.

La reducción de quebrados á un común denominador es un problema proporcional, combinado de multiplicación y división. En el caso que nos ocupa se pueden establecer las siguientes cuestiones, suponiendo que hayamos elegido el 6 como denominador común: 1ª 2 medios equivalen á 6 sextos; 1 medio ¿á cuántos sextos equivaldrá? 2ª 3 tercios equivalen á 6 sextos; 2 tercios ¿cuántos sextos serán? 3ª 4 cuartos equivalen á 6 sextos; 3 cuartos ¿cuántos sextos serán? 4ª 5 quintos equivalen á 6 sextos; 4 quintos ¿cuántos sextos serán? 5ª El quebrado 5 sextos está ya reducido. (1)

Como se ve, el procedimiento no puede ser más sencillo ni más científico y al alcance de todas las inteligencias, por inferiores que se les considere; con lo cual queda probado hasta la evidencia, que la forma teoremática en la enseñanza de la aritmética, es decir, esa serie de principios dogmáticos que se obliga á ingerir á los niños, con perjuicio de su salud y de su vida cerebral, es el mayor de los absurdos que debemos á la Pedagogía antigua, y que desgraciadamente impera todavía en todas nuestras Escuelas y sin esperanzas próximas ni remotas siquiera, de remediar males tan grandes y tan trascendentales.

II. *Reducir varios quebrados á un común numerador.* Supongamos los quebrados siguientes:

$$\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{6}{11}.$$

El mayor múltiplo de los numeradores es 720 y el menor es 60; pero puede tomarse cualquiera otro numerador, haciendo una aplicación del procedimiento

(1) Consúltese mi obra «Aritmética Superior,» para quinto y sexto años, pág. 241, pár. 91.