explicado en el párrafo anterior. Si tomamos como numerador común el número 12, tendremos los problemas proporcionales siguientes: 1º Si al numerador 3 corresponde el denominador 4, al numerador 12 ¿qué denominador le corresponderá? 2º Si al numerador 2 corresponde el denominador 5, al numerador 12 ¿qué denominador le corresponderá? 3º Si al numerador 4 corresponde el denominador 7, al numerador 12 ¿qué denominador le corresponderá? 4º Si al numerador 5 corresponde el denominador 8, al numerador 12 ¿qué denominador le corresponderá? 5º Si al numerador 6 corresponde el denominador 11, al numerador 12 ¿qué denominador le corresponderá?

De la resolución de estos problemas resultan los quebrados siguientes:

$$\frac{12}{16}, \frac{12}{30}, \frac{12}{21}, \frac{12}{19{,}2}, \frac{12}{22}.$$

Tomando 6 como numerador común:

$$\frac{6}{8}, \frac{6}{15}, \frac{6}{10{,}5}, \frac{6}{9{,}6}, \frac{6}{11}.$$

III. *Dar á un número entero la forma de quebrado con un denominador cualquiera.*

Supongamos que se trata de dar al número 5 la forma de quebrado, con el denominador 7, el problema proporcional quedará así: 1 unidad entera equivale á 7 séptimos; 5 unidades enteras á ¿cuántos séptimos equivaldrán?

Solución: $5=\frac{35}{7}$

y así se hará con los denominadores que se quieran, de manera que podrán obtenerse las siguientes igualdades:

$$5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{15}{3}=\frac{20}{4}=\frac{35}{7}.$$

IV. *Dar á un número mixto la forma de quebrado del mismo denominador.*

Supongamos el número mixto 7 y 3 quintos; transformado en quintos, resultarán los problemas siguientes: 1º 1 unidad entera vale 5 quintos; 7 unidades enteras ¿cuántos quintos son? Problema proporcional cuya solución es 35 quintos. 2º 35 quintos, más 3 quintos, ¿cuántos quintos son? Problema absoluto de sumar. Solución: son 38 quintos. Obtendremos las igualdades siguientes:

$$7\frac{3}{5}=\frac{35}{5}+\frac{3}{5}=\frac{38}{5}.$$

V. *Dar á un número fraccionario la forma entera ó la de número mixto.*

Sea el número fraccionario 38 quintos. El problema proporcional quedará así: Sabemos que 5 quintos equivalen á 1 unidad entera; 38 quintos ¿á cuántas unidades enteras equivaldrán?

Solución:

$$\frac{38}{5}=7+\frac{3}{5}.$$

VI. *Transformar un quebrado común en otro equivalente de distinto denominador.*

Sea el quebrado 5 séptimos, transformarlo en tercios.

El problema quedará así: 7 séptimos equivalen á 3 tercios; 5 séptimos ¿á cuántos tercios equivaldrán?

Solución: $\frac{5}{7}=\frac{15\div 7}{3}=\frac{2,14}{3}$.

VII. *Convertir un quebrado común en decimal.*

Sea el quebrado 7 octavos, transformarlo en milésimos. El problema será como sigue: 8 octavos equivalen á 1000 milésimos; 7 octavos ¿á cuántos milésimos equivaldrán?

$$\text{Solución:}\ \frac{7}{8}=\frac{1000\times 7}{8}=0,875.$$

VIII. *Convertir un decimal en quebrado común.*

Sea la decimal 0,875 milésimos, transformarla en octavos.

Problema. 1000 milésimos equivalen á 8 octavos; 875 milésimos ¿á cuántos octavos equivaldrán?

$$0,875=\frac{8\times 875}{1000}=7\ \text{octavos}\ =\frac{7}{8}$$

IX. *Aproximación del cociente.*

Distribuir 74 pesos exactamente entre 8 niños.

1er. Problema. 1 peso vale 100 centésimos ó centavos; 74 pesos ¿cuántos centavos equivaldrán?

Solución: 7400 centavos.

2º Problema. Se desea distribuir la cantidad de 7400 centavos entre 8 niños; ¿cuánto le tocará á cada niño?

$$7400\div 8=925\ \text{centavos}\ =\$9,25.$$

X. *Reducir cantidades de especie superior á inferior.*

Problema principal. 8 años, 7 meses, 25 días ¿cuántos días son?

Problemas derivados. 1º 1 año tiene 12 meses; 8 años ¿cuántos meses son? 96 meses. 2º 96 meses más 7 meses ¿cuántos meses son? 103 meses. 3º 1 mes tiene 30 días; 103 meses ¿cuántos días serán? 3090 días. 4º 3090 días más 25 días ¿cuántos días son? 3115 días.

XI. *Reducir cantidades de especie inferior á superior.*

Problema principal. 3115 días ¿cuántos años, meses y días son?

Problemas derivados. 1º Sabiendo que 30 días equivalen á 1 mes, 3115 días ¿á cuántos meses equivaldrán? 103 meses 25 días. 2º Sabiendo que 12 meses tiene un año, 103 meses ¿cuántos años serán? 8 años 7 meses. Solución final: 8 años 7 meses 25 días.

XII. *Convertir un número denominado en quebrado.*

Problema principal. ¿A qué fracción común de año, equivaldrán 10 meses 15 días?

Problemas derivados. 1º Un mes equivale á 1 doceavo de año; 10 meses ¿cuántos doceavos serán? 10 doceavos. 2º Un día es 1 trescientos sesenta avo de año; 15 días ¿cuántos serán? 15 trescientos sesenta avos. 3º Sumar 15 trescientos sesenta avos con 10 doceavos. Son 315 trescientos sesenta avos. Simplificado el quebrado resulta lo siguiente:

$$10\ \text{meses}\ 15\ \text{días}=\frac{315}{360}=\frac{7}{8}\text{de año.}$$

XIII. *Convertir un quebrado en número denominado.*

Problema principal. ¿A qué número denominado equivaldrán 7 octavos de año?

Problemas derivados. 1º 8 octavos de año equivalen á 12 meses; 7 octavos de año ¿á cuántos meses equivaldrán? 10 meses y 4 octavos de mes. 2º 8 octavos de mes equivalen á 30 días; 4 octavos ¿á cuántos días equivaldrán? 115 días. Luego

$$\frac{7}{8}=10 \text{ meses } 15 \text{ días.}$$

XIV. *Convertir un número denominado en decimal.*

Problema principal. 10 meses 15 días á ¿cuántos milésimos de año equivalen?

Problemas derivados. 1º 2º y 3º del problema XII. 4º 8 octavos de año equivalen á 1000 milésimos; 7 octavos ¿á cuántos milésimos equivaldrán? Solución:

$$10 \text{ meses } 15 \text{ días}=\frac{7}{8}=0{,}875 \text{ de año.}$$

XV. *Convertir un número decimal en denominado.*

Problema principal. ¿A qué número denominado equivaldrán 875 milésimos de año?

Problemas derivados. 1º 1000 milésimos de año equivalen á 12 meses; 875 milésimos ¿á cuántos meses equivaldrán? 10 meses y 5 décimos de mes. 2º 10 décimos de mes equivalen á 30 días; 5 décimos ¿á cuántos días equivaldrán? 15 días. Luego

$$0{,}875=10 \text{ meses } 15 \text{ días.}$$

XVI. *Multiplicación de números denominados.*

Problema principal. Un empleado trabajó 2 años, 8 meses, 15 días, ganando 25 pesos mensuales; ¿cuánto ganó en dicho tiempo?

Problemas derivados. 1º En 30 días se ganan 25 pesos; en 1 día ¿cuánto se ganará? 25 treinta avos de peso. 2º En 1 día se ganan 25 treinta avos de peso; en 975 días ¿cuánto se ganará? 812 pesos 50 centavos.

XVII. *División de números denominados.*

Problema principal. Un empleado ganó en 2 años, 8 meses, 15 días, 812 pesos 50 centavos; ¿cuál era su sueldo anual?

Problemas derivados. 1º En 975 días se han ganado 812 pesos 50 centavos; ¿cuánto se ganará en 1 día? 812,50 novecientos setenta y cinco avos de peso. 2º En 1 día se ganan 812,50 novecientos setenta y cinco avos de peso; en 360 días ¿cuánto se ganará? 300 pesos.

XVIII. *Problemas de conversión del sistema antiguo de pesas, medidas y monedas al sistema métrico decimal y viceversa.*

Ejemplos. 1º Una vara equivale á 838 milímetros; ¿cuál será la equivalencia del metro en varas? 2º Un metro equivale á 1 vara 193317 millonésimas de vara; ¿cuántos milímetros contendrá la vara? 3º Una libra equivale á 460 gramos; 1 gramo ¿á qué fracción de libra equivaldrá?

XIX. *Problemas de conversión del sistema métrico decimal á los diversos sistemas de todas las naciones y viceversa.*

Ejemplo: 100 yardas inglesas valen 91 metros 44 centímetros; ¿cuál será la equivalencia del metro en yardas?

XX. *Problemas llamados de regla de tres simple y compuesta.*

Omitimos los ejemplos.

XXI. *Problemas de interés simple y compuesto.*

XXII. *Problemas de descuento interior y exterior.*

XXIII. *Problemas de compañía y partición.*

XXIV. *Problemas de cambio y arbitraje.*

XXV. *Problemas de mezcla y aligación.*

XXVI. *Problemas de promedios y plazo común.*

XXVII. *Son también problemas proporcionales, las convenciones de nuestro sistema de numeración, tanto los* *que se refieren á los enteros, como las que se refieren á los decimales.*

Ejemplos: 1º Una decena vale 10 unidades; 7 decenas ¿cuántas unidades serán? 2º En el número 214 unidades ¿cuántas unidades, decenas y centenas hay? 3º Una unidad entera vale 100 centésimos; ¿cuántos valdrán 8 centenas simples? 4º En el número 73 enteros ¿cuántos décimos, centésimos y milésimos hay? etc., etc.

He puesto como ejemplos en la lista precedente, los principales tipos de problemas proporcionales, á fin de que se comprenda fácilmente su mecanismo en lo que se refiere al razonamiento y al planteo, y estamos seguros que podrá evitarse en su resolución el uso indebido de reglas, de fórmulas ó de principios teoremáticos, que en la mayor parte de los casos, no son otra cosa que dogmas y símbolos incomprensibles para los niños.

IV

Los problemas *trascendentes* son aquellos en los que sólo se emplean en su resolución las *potencias* y las *raíces;* es decir, en las cuestiones en que se trata de buscar un aumento ó una diminución de *factores* iguales; pero el carácter que más distingue á éstos problemas, está indicado en las dos proposiciones siguientes:

1ª Conocida la longitud de una línea recta, determinar la superficie del cuadrado ó el volumen del cubo geométricos correspondientes.

2ª Conocida la superficie de un cuadrado ó el volumen de un cubo, determinar la longitud del lado del cuadrado ó del cubo geométricos correspondientes.

Para calcular la superficie del cuadrado ó el volumen del cubo, conociendo la longitud del lado correspondiente, se emplean los procedimientos geométricos adoptados para la medición del paralelógramo cuadrado y para la medición del prisma cuadrangular cúbico respectivamente. Para calcular la longitud del lado de un cuadrado ó de un cubo, conociendo la superficie ó el volumen correspondientes, se emplean los procedimientos de extracción de la raíz cuadrada y cúbica respectivamente. En los ejemplos siguientes, precisaremos el carácter peculiar de estos problemas.

Primer ejemplo. Un patio de forma cuadrada, mide 6 metros lineales por lado; ¿cuántos metros cuadrados medirá su superficie?

Para la solución de este problema se emplean los siguientes procedimientos:

1º Como todo cuadrado geométrico tiene sus cuatro lados iguales y sus cuatro ángulos rectos, es claro que

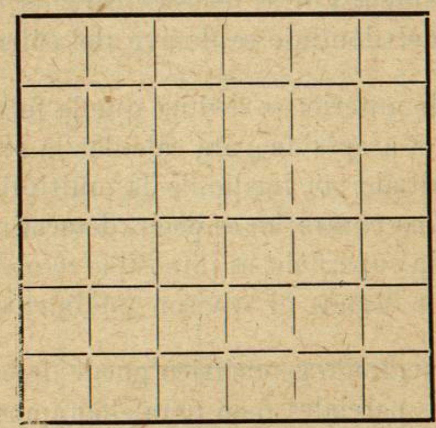

Fig. 1ª.

tomando como base un solo lado, podrán colocarse en él 6 metros cuadrados, y colocando esta faja 6 veces, cubriremos la superficie total del cuadrado; pero como cada faja tiene 6 metros y se necesitan 6 fajas iguales, se obtendrá como resultado final: $6 \times 6 = 36$ metros cuadrados de superficie. (fig. 1ª)

Empleando el razonamiento anterior resulta un problema proporcional en esta forma: En una faja de terreno caben 6 metros cuadrados; en 6 fajas paralelas é iguales ¿cuántos metros cuadrados cabrán? Solución: 36 metros cuadrados.

Esta solución así obtenida, nos conduciría al siguiente error: Si un patio cuadrado de 6 metros por lado mide 36 metros cuadrados de superficie, otro patio de 12 metros por lado ó sea de doble lado que el primero, medirá también el doble ó sean 72 metros cuadrados de superficie. El absurdo se ve con evidencia, no medirá 72 metros cuadrados, sino 144, que es el cuadrado correspondiente al número 12. Luego estos problemas que nosotros llamamos trascendentes, son enteramente distintos de los proporcionales, porque su solución está sujeta á otras leyes de carácter diverso, las cuales son del dominio exclusivo del cálculo geométrico.

De todo lo anterior se deduce que la forma proporcional sólo es aceptable para calcular la superficie de un solo cuadrado por medio de la multiplicación; pero el problema contrario, es decir, determinar el lado conociendo la superficie, es imposible resolverlo por la división, por sernos el divisor totalmente desconocido.

2º Todo cuadrado geométrico puede descomponerse en cuadrados parciales ó en paralelógramos rectángulos, según que la longitud del lado del cuadrado la consideremos en su totalidad ó en un número cualquiera de partes iguales ó desiguales. Así, por ejemplo, en el problema anterior: si el lado 6 metros lo descomponemos en seis unidades, la superficie

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6,$$

resultará descompuesta en 36 cuadrados iguales ó sean 36 metros cuadrados; si la descomponemos en

$$1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6,$$

ó sean cinco partes, obtendremos 25 figuras geométricas de las cuales son 16 cuadrados de un metro por lado, 8 paralelógramos de dos metros por uno y 1 cuadrado de dos metros por lado; total, 36 metros cuadrados de superficie; si la descomponemos en cuatro partes

$$1 + 1 + 2 + 2 = 6,$$

resultarán 16 figuras geométricas: 4 cuadrados de un metro por lado, 4 cuadrados de dos metros por lado y 8 paralelógramos de un metro por dos, total 36 metros cuadrados; si la descomponemos en tres partes

$$1 + 2 + 3 = 6,$$

resultarán 9 figuras geométricas: 3 cuadrados de uno, dos y tres metros por lado respectivamente; 2 paralelógramos de uno por dos, 2 de uno por tres y 2 de dos por tres; total, 36 metros cuadrados; si la descomponemos en dos partes

$$2 + 4 = 6,$$

resultarán 4 figuras geométricas: 1 cuadrado de dos por

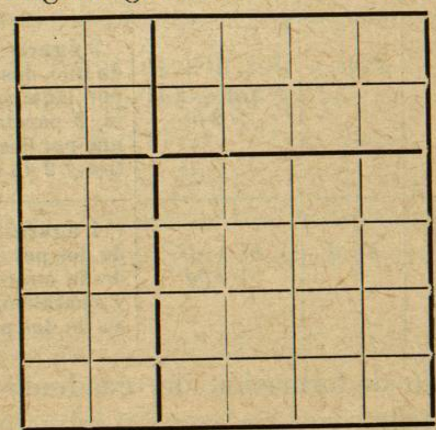

Fig. 1ª.

dos, 1 cuadrado de cuatro por cuatro y 2 paralelógramos iguales de dos por cuatro; total, 36 metros cuadrados de superficie, según se observa en la segunda figura, que podrá servir también para comprobar todas las observaciones precedentes.

En el siguiente cuadro vamos á hacer un resumen de los diferentes modos de formación del cuadrado del número 6, designando con las letras a, b, c y d los números 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

CUADRADOS DEL NUMERO SEIS.

Lado del cuadrado con números	Lado del cuadrado con letras	Superficie del cuadrado con letras	Figuras geométricas que resultan.
1º En 6 partes $1+1+1+1+1+1$	$6\ a$	$36\ a^2$	36 cuadrados de un metro por lado.
2º En 5 partes. $1+1+1+1+2$	$4\ a+b$	$16\ a^2+8\ ab+b^2$	25 figuras: 16 cuadrados de un metro por lado, 8 paralelógramos de uno por dos, 1 cuadrado de dos por lado.
3º En 4 partes. $1+1+2+2$	$2\ a+2\ b$	$4\ a^2+8\ ab+4b^2$	16 figuras: 4 cuadrados de un metro por lado, 4 cuadrados de dos metros por lado y 8 paralelógramos de uno por dos.
4º En 3 partes. $1+2+3$	$a+b+c$	$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$	9 figuras: 3 cuadrados de uno, dos y tres metros por lado respectivamente, 2 paralelógramos de uno por dos, 2 de uno por tres y 2 de dos por tres.
5º En 2 partes. $2+4$	$b+d$	b^2+d^2+2bd	4 figuras: 1 cuadrado de dos por dos, 1 cuadrado de cuatro por cuatro y 2 paralelógramos iguales de dos por cuatro.

El 5º modo de formación del cuadrado es el más aceptado de todos, y se usa para los números mayores

de diez, los cuales se descomponen en decenas y unidades, resultando la siguiente fórmula:

$$d^2+2\,du+u^2$$

decenas cuadradas, más doble producto de decenas por unidades, más unidades cuadradas.

Con lo expuesto queda probado que todo cuadrado ó segunda potencia de un número, es un cuadrado geométrico, compuesto de figuras cuadradas y rectangulares.

Segundo ejemplo. Una plaza de forma cuadrada mide 625 metros cuadrados de superficie; se desea saber ¿cuál será la longitud de uno de sus lados?

Para resolver este problema hay que descomponer la superficie total de la plaza en cuatro figuras geométricas: dos cuadrados de tamaño diferente y dos paralelógramos iguales. El cuadrado mayor está formado por las decenas cuadradas, y en el presente caso, dicho cuadrado es mayor que 100 y menor que 900; si fuera 100 el lado del cuadrado sería una decena ó 10; si fuera 900 el cuadrado, sería su lado 3 decenas ó 30; pero 100 es menor que 625 y 900 es mayor; luego el lado del cuadrado no debe ser ni 1 ni 3 decenas, sino la decena intermedia entre ambas, es decir, la decena 2 ó sea su equivalente 20 unidades. Pero como el cuadrado de 20 mide 400 metros cuadrados, es claro que en los 225 metros cuadrados restantes están contenidos el segundo cuadrado y los dos paralelógramos que faltan.

Para averiguar la longitud del lado del segundo cuadrado ó sea la cifra de las unidades, hay necesidad de observar la cifra terminal de la derecha de los cuadrados de los diez primeros números. Se notan los siguientes hechos: terminan en 1 los cuadrados de 1 y 9; terminan en 4 los cuadrados de 2 y 8; termina en 5 el cuadrado de 5; terminan en 6 los cuadrados de 4 y 6; terminan en 9 los cuadrados de 3 y 7, y terminan en 0 el cuadrado de 10 y sus múltiplos. Ningún cuadrado se observa que termine en las cifras 2, 3, 7 y 8. Ahora bien, aplicando estas observaciones al número 625 ó al 225 restante, notamos desde luego, que su cifra terminal es 5, luego el número que sirvió para formar el cuadrado respectivo debe ser necesariamente el número 5, y por consecuencia el segundo cuadrado será 25 metros cuadrados de superficie, que disminuidos del 225 quedarán 200 metros cuadrados cuya cantidad representa las superficies de dos paralelógramos iguales de 100 metros cuadrados cada uno y de 20 metros por 5 que son las dos partes en que se descompuso la longitud 25 que mide cada lado de la plaza.

La serie de operaciones verificadas para resolver el segundo problema, es lo que se llama la extracción de la raíz cuadrada, que consiste en ir restando parcialmente del cuadrado cada una de sus partidas: decenas cuadradas, doble producto de decenas por unidades y unidades cuadradas.

Tercer ejemplo. Un estanque de forma cúbica mide 6 metros de profundidad; se desea saber ¿cuántos metros cúbicos medirá de volumen?

Este problema puede resolverse empleando los dos procedimientos siguientes:

1º Todo cubo geométrico está terminado por seis caras cuadradas iguales perpendiculares entre sí; por consiguiente, en la base podrán colocarse 36 metros cúbicos y cuya capa, repitiéndola seis veces, llenará totalmente el volumen del estanque ó sean $36 \times 6 = 216$ metros cúbicos de volumen.

Del mismo modo que razonamos al calcular la superficie del cuadrado, podemos afirmar aquí respecto del volumen del cubo, que hay una relación de proporcionalidad entre la unidad 36 metros cúbicos de la base y la altura 6, cuya relación la resolvemos por medio de la multiplicación; pero si consideramos el número 216 metros cúbicos, como base de un nuevo problema para determinar el volumen de otro estanque que mida por lado el doble del anterior ó sean 12 metros, es claro que su volumen no será el doble de 216 ó sean $216 \times 2 = 432$ metros cúbicos, sino el cubo de 12 que da 1,728 metros cúbicos de volumen. Por consiguiente, se nota con toda claridad, que este problema es también trascendente y tiene que resolverse como los anteriores por procedimientos de carácter esencialmente geométricos.

2º Todo cubo geométrico se descompone en cubos y en prismas cuadrangulares de base cuadrada. En el problema que venimos estudiando, pueden hacerse cinco descomposiciones diferentes, según que la longitud del lado del estanque lo consideremos dividido en seis, cinco, cuatro, tres ó dos partes, según podrá observarse en el siguiente cuadro: