Demostracion. 1.º Si el punto que dista del centro una cantidad igual al rádio no estuviese en la circunferencia, estaria dentro ó fuera de ella: si estuviese dentro, distaria del centro una cantidad menor que el rádio, conforme á la segunda parte del teorema directo, lo que es contrario á la hipótesis: si estuviese fuera, distaria del centro una cantidad mayor que el rádio, segun la tercera parte del teorema directo, lo que es tambien contrario á la hipótesis; luego dicho punto no puede estar dentro ni fuera de la circunferencia, luego se hallará en ésta.

Luego *si un punto cualquiera dista del centro una cantidad igual al rádio, está situado en la circunferencia.*

Lo mismo se demuestran la segunda y tercera parte del teorema recíproco.

La fuerza de la precedente demostracion estriba en que un punto, que se encuentra en un plano donde está trazada una circunferencia, se halla necesariamente en ésta, dentro ó fuera, y en que cualquiera de estos supuestos produce una consecuencia distinta respecto á la distancia al centro.

Pudiendo emplearse un raciocinio análogo en la demostracion de los teoremas recíprocos, cuyos directos reunan iguales condiciones, se infiere que

12. *Siempre que en una proposicion ó série de proposiciones se hayan hecho todas las hipótesis posibles sobre un mismo sugeto, y cada una produzca una conclusion distinta, las proposiciones recíprocas son ciertas.*

Division de la Geometría.

13. La Geometría se divide en *plana* y del espacio.

La Geometría plana *trata de la extension cuyos puntos están todos en un mismo plano.*

La Geometría del espacio *se ocupa de la extension cuyos puntos no están todos en el mismo plano.*

GEOMETRÍA PLANA.

SECCION PRIMERA.

PROPIEDADES DE LAS FIGURAS PLANAS

CAPÍTULO PRIMERO.

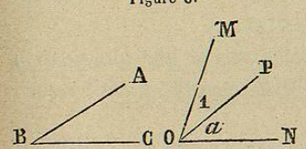
Líneas rectas en sus diferentes posiciones.

ARTÍCULO PRIMERO.

De los ángulos.

14. *Se llama* Ángulo *la extension comprendida entre dos rectas que concurren en un punto.* Las líneas que le forman se llaman *lados*, y *vértice* el punto de concurrencia.

Figure 8.



ABC (fig. 8) es un ángulo cuyos lados son AB y BC, y el vértice el punto B.

Un ángulo se nombra por tres letras, como acaba de verse, expresando siempre en el medio la del vértice; tambien se puede nombrar, cuando está solo, por la letra del vértice; así se dice el ángulo en B; y cuando en un mismo punto se reunen varios vértices, por una letra ó número colocados en el interior; así se puede decir el ángulo *a*, el ángulo 1, en vez de PON y MOP.

Corol. *Un ángulo no varía de valor aunque varíe la longitud de sus lados.*

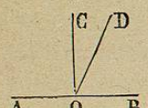
Los ángulos se suman, se restan y se multiplican ó dividen por un número abstracto.

Así MOP + PON = MON, MOP = MON — PON, y MON puede ser duplo de MOP, y éste mitad de aquel.

Se da el nombre de bisectriz *de un ángulo á la recta que le divide en dos partes iguales.* OP es la bisectriz de MON.

15. *Se llaman* ÁNGULOS ADYACENTES *los que tienen el mismo vértice, un lado comun y los otros dos lados en línea recta.* AOD y DOB (fig. 9) son adyacentes, lo mismo que AOC y COB.

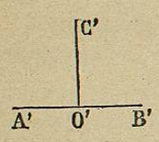
Fig. 9.



Llámase ÁNGULO RECTO *cada uno de los dos adyacentes é iguales que una recta forma con otra, y* OBLÍCUO *el que es mayor ó menor que el recto.* AOC y COB son ángulos rectos, AOD y DOB oblícuos.

16 TEOREMA 1.º *Los ángulos rectos son iguales aunque no sean adyacentes.*

Fig. 10.



Sean rectos los ángulos AOC y A'O'C' (figuras 9 y 10); vamos á demostrar que son iguales.

Superponiendo (*) la figura 10 sobre la 9, de modo que A'B' coincida con AB y el punto O' caiga sobre O, la recta O'C' coincidirá con OC; pues si O'C' tomase otra direccion cualquiera, por ejemplo OD, los ángulos AOD y DOB, que representan á los A'O'C' y C'O'B' no podrian ser iguales entre sí, siéndolo AOC y COB; lo que es contra la hipótesis. Luego los dos lados del ángulo A'O'C' coinciden con los de AOC, luego dichos ángulos son iguales.

17. *Llámase* ÁNGULO AGUDO *el oblícuo menor que uno recto, y* OBTUSO *el oblícuo mayor que el recto:* BOD es agudo y AOD obtuso (fig. 9).

18. *Se llaman* ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS *aquellos que sumados forman un recto, y* SUPLEMENTARIOS *los que forman dos rectos.*

COROL. *Dos ángulos que tienen el mismo complemento ó complementos iguales, ò el mismo suplemento ó suplementos iguales, son iguales.*

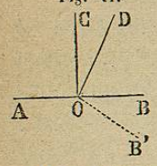
Porque agregándoles el complemento en un caso, y el suplemento en otro, dan una misma suma.

(*) La superposicion es el medio mas comunmente empleado en la Geometría para demostrar la igualdad de las extensiones. Al efecto, se admite como evidente, porque lo es, que *dos extensiones que superpuestas coinciden en todas sus partes son iguales*, y recíprocamente, *que dos extensiones iguales se pueden superponer de modo que coincidan.*

Tambien se admite que con la superposicion no se altera la magnitud de las extensiones.

19. TEOREMA 2.º *Los ángulos adyacentes valen juntos dos rectos ó son suplementarios.*

Fig. 11.



Sean los ángulos adyacentes AOD y DOB (figura 11).

Trazando por O una recta OC, que forme dos ángulos rectos, se observará que los dados AOD y DOB suman lo mismo que los rectos AOC y COB, luego valen tanto como estos dos rectos: asi llamando R á un ángulo recto,

$$AOD+DOB=2R.$$

RECÍPROCAMENTE. *Si dos ángulos* AOD *y* DOB, *que tienen un lado comun* OD *y el mismo vértice* O, *son suplementarios, serán tambien adyacentes, ó lo que es igual, los otros dos lados* AO *y* OB *estarán en línea recta.*

Porque si OB no es la prolongacion de AO, supongamos que lo sea OB', y se tendrá, por hipótesis,

$$AOD+DOB=2R,$$

y por el teorema directo

$$AOD+DOB'=2R;$$

de donde

$$AOD+DOB=AOD+DOB' \text{ ó } DOB=DOB',$$

lo que es absurdo.

COROL. 1.º *Si un ángulo es recto, su adyacente lo será tambien; y si un ángulo es oblícuo, su adyacente lo es del mismo modo.*

COROL. 2.º *Un ángulo cualquiera* AOD *vale ménos que dos rectos.*

Porque prolongando uno de sus lados AO, se tiene

$$AOD+DOB=2R;$$

luego

$$AOD<2R.$$

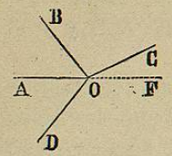
COROL. 3.º *Los ángulos* AOC+COD+DOB, *que se pueden formar en un punto* O *de una recta y á un lado de ésta valen juntos dos rectos.*

Porque la suma de estos ángulos es igual á la de dos adyacentes cualesquiera AOD y DOB.

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
Biblioteca Valverde y Tellez

Corol. 4.º *Todos los ángulos* AOB+BOC+COD+DOA (figura 12) *que se pueden formar alrededor de un punto* O, *valen juntos cuatro rectos.*

Fig. 12.

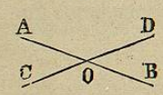


Porque prolongando uno de los lados AO de estos ángulos en el sentido AF (*), la suma de todos ellos equivale á la de los que pueden formarse en el punto O sobre la recta AF y debajo de la misma: pero los que pueden formarse en O sobre AF valen dos rectos (corolario 3.º) y los que pueden formarse debajo otros dos; luego todos los que se pueden formar al rededor de O valen cuatro rectos.

Corol. 5.º *Los ángulos formados por dos rectas que se cortan valen tambien juntos cuatro rectos.*

20. *Se llaman* ángulos opuestos por el vértice *aquellos de los que el uno está formado por las prolongaciones de los lados del otro.*

Fig. 13.



AOC y DOB (fig. 13) son opuestos por el vértice; lo mismo que AOD y COB.

21. Teorema 3.º *Los ángulos* AOC *y* DOB *opuestos por el vértice son iguales.*

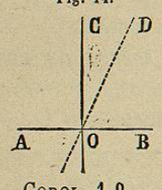
AOC tiene por suplemento á AOD, y DOB á AOD (**18**), luego AOC y DOB tienen el mismo suplemento AOD, luego son iguales (**18**, corol.)

ARTÍCULO II.

Perpendiculares y oblícuas.

22. *Se llama* línea perpendicular *la que forma con otra dos ángulos rectos, ó uno solo* (**19**, corol. 1.º). OC (fig. 14) es perpendicular á AB, si COB es recto.

Fig. 14.



Línea oblícua, *la que forma con otra dos ángulos desiguales ú oblicuos, ó uno solo* (**19**, corolario 1.º). OD es oblícua á AB, si DOB es un ángulo oblícuo.

Corol. 1.º *Si una recta* CO *es perpendicular á otra* AB, *ésta lo será á la primera, y si una recta* DO *es oblícua á otra* AB, *ésta tambien lo será á aquella.*

(*) Las líneas que entran en los enunciados de los teoremas y problemas se trazan completas generalmente, y de rayitas las auxiliares de la demostracion ó resolucion. Decimos *generalmente* porque algunas veces se hace lo contrario, para evitar la repeticion de figuras ó para que éstas resulten mas claras.

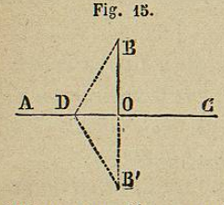
Corol. 2.º *Si dos rectas* AB *y* CO *se cortan perpendicularmente, forman cuatro ángulos rectos.*

23. Teorema 1.º *Por un punto dado no se puede trazar mas que una sola perpendicular á una recta.*

Pueden ocurrir dos casos: 1.º que el punto dado esté en la recta; 2.º que esté fuera de ella.

1.º Sea el punto O en la recta AB (fig. 14), decimos que no se puede levantar mas perpendicular que la OC; porque otra recta cualquiera OD forma con la AB dos ángulos AOD y DOB, el primero mayor que el recto AOC, y el segundo menor que el recto COB, luego dichos ángulos AOD y DOB son desiguales, luego OD es oblícua á AB; luego por el punto O no se puede levantar mas que una sola perpendicular.

Fig. 15.



2.º Sea el punto B, fuera de la recta AC (fig. 15); decimos que no se puede bajar más perpendicular que la BO. Doblando la parte superior de la figura, por AC, sobre la inferior, el punto B vendrá á parar á B'; y como AOB es un ángulo recto, por hipótesis, AOB' lo será tambien, luego BB' es una línea recta (**19**, rec.). Si desde B se bajase otra perpendicular BD: uniendo D con B' y doblando otra vez la parte superior de la figura sobre la inferior, BD coincidirá con B'D; luego el ángulo B'DO sería recto como su igual BDO; luego BDB' formaria una línea recta (**19**, rec.); luego habria dos rectas que tendrian dos puntos comunes B y B' sin coincidir, lo que es imposible (**5**, post.). Luego por B no se puede bajar mas que una perpendicular BO á la AC.

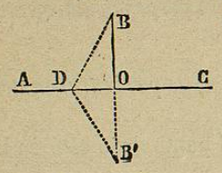
24. Teorema 2.º *Si desde un punto* B (fig. 15) *fuera de una recta* AC, *se traza á esta una perpendicular* BO *y una oblícua* BD, *la perpendicular es menor que la oblícua.*

Doblando la figura por AC, la parte superior sobre la inferior, el punto B caerá en B', y las rectas BO y BD tomarán las posiciones de OB' y DB'.

El ángulo AOB es recto; luego AOB' lo será tambien, puesto

que es el primero colocado en otra posicion despues de doblada la figura; luego BO y OB′ forman una línea recta (**19**, rec.).

Fig. 15.



Como por dos puntos B y B′ no puede pasar mas que una recta (**5**, post.), BD y DB′ forman una línea quebrada; luego (**5**)

$$BB' < BDB' :$$

y como BO es mitad de BB′ y BD de BDB′, se tendrá por fin

$$BO < BD.$$

Corolario. *La distancia entre un punto y una recta se mide por la perpendicular trazada desde dicho punto á la recta.*

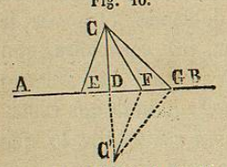
Recíprocamente. *Si una recta es la menor que se puede trazar entre un punto y otra recta, será perpendicular á ésta.*

Porque si no, sería oblícua, y trazando una perpendicular sería menor que ella: lo que es contra la hipótesis.

25. Teorema 3.º *Si de un punto* C, *fuera de una recta* AB (fig. 16), *se trazan á esta una perpendicular* CD *y diferentes oblícuas* CE, CF *y* CG: 1.º *las oblícuas* CE *y* CF, *que se separan igualmente de la perpendicular, son iguales;* 2.º *de dos oblícuas* CF *y* CG, *la que mas se separa de la perpendicular es la mayor.*

1.º Si DE=DF, doblando la figura CDF sobre CDE, sirviendo de eje CD, como los ángulos CDF y CDE son iguales, el punto F caerá sobre E; luego los extremos de la recta CF coinciden con los de CE; luego estas oblícuas son iguales.

Fig. 16.



2.º Si DG>DF, doblando la parte superior CDB de la figura sobre la inferior, el punto C vendrá á parar á C′ y las rectas CD, CF y CG quedarán representadas por C′D, C′F y C′G: siendo recto el ángulo CDB, C′DB, tambien lo será (**19**, corol. 1.º); luego CC′ será una línea recta (**19**, recíproco), y CFC′ y CGC′ serán líneas quebradas (**5**, post.); luego CGC′>CDC′ (**7**): pero CG es mitad de CGC′ y CF mitad tambien de CFC′, luego

$$CG > CF.$$

Si las oblícuas fuesen CG y CE, una á cada lado de la perpendicular, trazariamos la CF, de modo que DF=DE, y se demostraria, como acaba de hacerse, que CG>CF: mas CF y CE son iguales por el caso 1.º, luego CG>CE.

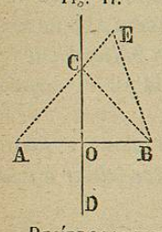
Recíprocamente. 1.º *Si dos oblícuas son iguales, se separan igualmente de la perpendicular;* 2.º *Si dos oblícuas son desiguales, la mayor se separa mas de la perpendicular (***12***).*

Corolario. *Desde un punto á una recta se pueden trazar dos rectas iguales, y de dos en dos todas las que se quiera; pero no se pueden trazar tres, ni mas de tres, iguales entre sí.*

26. Teorema 4.º 1.º *Un punto cualquiera* C, *situado en la perpendicular* CD (fig. 17) *levantada en el punto medio* O *de una recta* AB, *equidista de los extremos de esta;* 2.º *un punto cualquiera* E, *situado fuera de la perpendicular, dista desigualmente de los extremos de la recta.*

1.º Uniendo C con A y con B, las oblícuas CA y CB son iguales (**25**); luego C equidista de A y de B.

Fig. 17.



2.º Trazando las rectas EA, EB y CB se tendrá (**5**)

$$CE + CB > EB;$$

y como CA y CB son iguales, segun la primera parte del teorema, sustituyendo la primera de estas líneas por la segunda, resulta

$$CE + CA > EB \text{ ó } EA > EB.$$

Recíprocamente. 1.º *Un punto cualquiera equidistante de los extremos de una recta, está en la perpendicular levantada en su punto medio;* 2.º *un punto cualquiera que no equidista de los extremos de una recta, está fuera de la perpendicular levantada en su punto medio (***12***).*

Llámase lugar geométrico *de ciertos puntos la línea ó figura que tiene una propiedad exclusiva á dichos puntos.* Así, la circunferencia es el *lugar geométrico* de todos los puntos que en el mismo plano equidistan del centro.

Corolario 1.º *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos de una recta es la perpendicular levantada en su punto medio.*

Corolario 2.º *Si una recta* CD *tiene dos puntos cualesquiera* C *y* D *equidistantes de los extremos* A *y* B *de otra recta* AB, *le es perpendicular en su punto medio* O.

Porque levantando en dicho punto medio O una perpendicular,

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

pasará por los puntos C y D (corol. ant.), luego coincidirá con la recta CD (**5**, corol. 1.º), luego será perpendicular á la AB en su punto medio O.

ARTÍCULO III

De las líneas paralelas

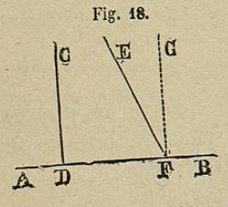
27. *Se llaman* RECTAS PARALELAS *las que estando en un mismo plano no se encuentran por mas que se prolonguen.*

28. TEOREMA 1.º *Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí.*

En efecto, si se encontrasen en un punto cualquiera, desde este punto habria trazadas dos perpendiculares á una recta, lo que es absurdo (**23**).

29. POSTULADO. *Dos rectas, una* CD *perpendicular y otra* EF (fig. 18) *oblícua á una tercera* AB, *no son paralelas; y se encuentran hácia donde la oblícua* EF *forma con la* AB *el ángulo* EFA *agudo* (*).

Fig. 18.



COROLARIO 1.º *Por un punto* F *fuera de una recta* CD *no se puede trazar á esta mas que una paralela.*

Porque trazando por F la AB perpendicular á CD, y la FG perpendicular á AB, CD y FG serán paralelas (**28**), y cualquiera otra recta FE será oblícua respecto de la AB (**23**), luego no será paralela á CD segun el postulado. Luego por F no puede trazarse mas que una paralela á CD.

COROL. 2.º *Si una recta* FE *corta á una de dos paralelas* GF, *prolongada suficientemente tambien cortará á la otra* CD.

Pues de lo contrario, por F habria dos paralelas, EF y GF, á una misma recta CD; lo que es imposible (corol. ant.).

COROL. 3.º *Si una recta* AB *es perpendicular á una de dos paralelas* CD, *tambien lo será á la otra* GF.

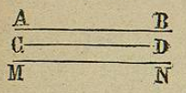
Porque si AB no fuese perpendicular á GF, le sería oblícua, y esta tambien sería oblícua respecto de aquella; mas en tal caso

(*) Este es el célebre postulado de Euclídes. Puede verse una demostracion de él en Vincent, *Cours de Géométrie élémentaire*, page 27.

CD y GF no serían paralelas (segun el postulado), lo que es contra la hipótesis.

COROL. 4.º *Dos rectas* AB *y* CD (fig. 19), *paralelas á una tercera* MN, *son paralelas entre sí.*

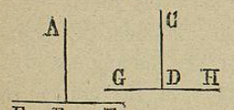
Fig. 19.



Porque si AB y CD se encontrasen, desde el punto en que lo hiciesen habria dos paralelas á MN, lo que es imposible (corol. 1.º)

COROL. 5.º *Dos rectas* AB *y* CD, *respectivamente perpendiculares á dos paralelas* EF *y* GH, *son paralelas entre sí* (fig. 20).

Fig. 20.



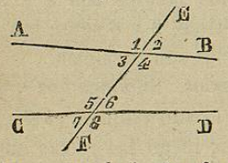
Si AB es perpendicular á EF tambien lo será á su paralela GH prolongada (corolario 3.º), y como CD lo es á esta por hipótesis, AB y CD son paralelas (**28**).

COROL. 6.º *Si dos rectas* AB *y* CD *no son paralelas, sus perpendiculares respectivas* EF *y* GH *tampoco lo serán.*

Porque si EF y GH fuesen paralelas, sus perpendiculares respectivas AB y CD lo serían tambien (corol. 5.º), lo que es contra la hipótesis.

30. *Se llama* SECANTE *ó* TRASVERSAL *la recta* EF, *que corta á otras dos* AB *y* CD (fig. 21).

Fig. 21.



La secante forma con las rectas que corta ocho ángulos, que son : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

Reciben el nombre de ángulos INTERNOS *los que están formados dentro de las rectas,* como 3, 4, 5 y 6, *y* EXTERNOS *los que están fuera,* tales son 1, 2, 7 y 8.

Llamarémos ángulos ALTERNOS *los que están dentro de las rectas, uno con cada una, y á diferente lado de la secante,* como 3 y 6, 4 y 5.

Angulos CORRESPONDIENTES *son los que están uno dentro y otro fuera de las rectas, uno con cada una, y á un mismo lado de la secante,* como 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8.

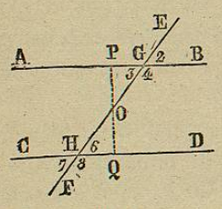
31. TEOREMA 2.º *Si dos rectas cortadas por otra forman con ella :* 1.º *ángulos alternos ó correspondientes iguales, ó internos de un mismo lado de la secante suplementarios, dichas rectas son paralelas;* 2.º *si forman ángulos alternos ó correspondientes*

desiguales, ó internos de un mismo lado no suplementarios, dichas rectas no son paralelas.

1.º *Alternos iguales.* Supongamos que los ángulos AGH y DHE, ó 3 y 6 (fig. 22) sean iguales.

Por el punto O, medio de la GH, se traza la PQ perpendicular á CD. Hágase girar la figura OHQ, en el mismo plano y al rededor del punto O, hasta que OH coincida con OG : el punto H caerá sobre G, por ser estas rectas iguales por construccion : la línea OQ coincidirá con OP, por ser los ángulos POG y HOQ iguales (**21**) : la HQ coincidirá tambien con GP por ser los ángulos PGO y QHO iguales por hipótesis, luego el ángulo OQH coincide con OPG ; pero OQH es recto, luego OPG tambien lo será : luego AB y CD son perpendiculares á PQ, luego son paralelas (**28**).

Fig. 22.



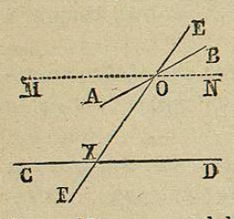
Si los ángulos alternos iguales fuesen 4 y H, como son respectivamente suplementarios de 3 y 6, estos serían tambien iguales (**18**, corol.), y el paralelismo de AB y CD se demostraria como acaba de verse.

Correspondientes iguales. Si los ángulos iguales son 3 y 7, como 7 es igual al 6 por opuestos en el vértice, 3 y 6 serán iguales, pero estos son alternos ; luego las rectas son paralelas.

Internos de un mismo lado suplementarios. Supongamos que 4 y 6 sean suplementarios ; como 3 y 4 lo son tambien (**19**), 3 y 6 serán iguales : pero estos son alternos ; luego las rectas son paralelas.

2.º *Alternos desiguales.* Supongamos que los ángulos AOF y DXE (fig. 23) sean desiguales, vamos á demostrar que AB y CD no son paralelas.

Fig. 23



Porque si lo fuesen, trazando por O una recta MN, que formase el ángulo MOF igual á DXE, MN sería paralela á CD, segun la primera parte del teorema ; luego por O se tendrían dos paralelas AB y MN á CD, lo que es imposible (**29**, corol. 1.º) ; luego AB no es paralela á CD.

De una manera análoga se demuestra que las rectas no son

paralelas cuando los ángulos correspondientes son desiguales, ó cuando los internos de un mismo lado no son suplementarios.

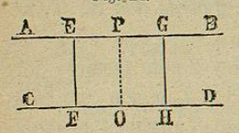
Recíprocamente. 1.º *Si dos rectas son paralelas, cortadas por otra, forman con la secante ángulos internos y correspondientes iguales, y ángulos internos de un mismo lado suplementarios ;* 2.º *si no son paralelas, forman con la trasversal ángulos alternos y correspondientes desiguales, é internos de un mismo lado no suplementarios* (**12**).

32. Teorema 3.º *Las partes de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales.*

Pueden ocurrir dos casos : 1.º que unas paralelas sean perpendiculares á las otras ; 2.º que les sean oblícuas.

1.º Sean las paralelas AB y CD, EF y GH (fig. 24).

Fig. 24.



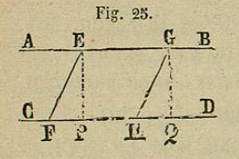
Por el punto P, medio de EG, se traza la PO perpendicular á la AB, la cual lo será tambien á la CD (**29**, corol. 3.º). Doblando la figura por PO, la parte PODB sobre la POCA, PB coincidirá con PA por ser los ángulos BPO y APO rectos : por igual razon OD coincidirá con OC ; el punto G caerá sobre E, por ser PG igual á PE por construccion, luego la línea GH coincidirá con EF, porque si no desde E habria dos perpendiculares á la CD, lo que es imposible ; luego la GH coincide en todos sus puntos con la EF, luego son iguales.

Lo mismo se demostraria que FH es igual á EG, trazando por el medio de GH una perpendicular á EF.

Corol. *Los puntos de una recta equidistan de su paralela.*

2.º Sean las paralelas AB y CD, EF y GH (fig. 25).

Fig. 25.



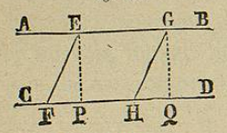
Por los puntos E y G se trazan las perpendiculares EP y GQ á la AB, que lo serán tambien á la CD (**29**, corol. 3.º), é iguales entre sí, segun la primera parte del teorema.

Superponiendo la figura HGQ sobre FEP, de manera que GQ y EP coincidan, GH caerá sobre EF, por ser los ángulos FEP y HGQ iguales por complementos de AEF y AGH, tambien iguales (**31**, rec.) : QH caerá sobre PF por ser rectos los ángulos en P y en Q ; luego el punto H caerá sobre F ; luego los

extremos de GH se confunden con los de EF, luego estas rectas son iguales.

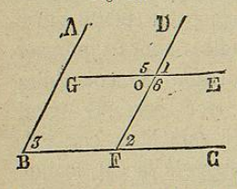
Para demostrar que EG y FH son tambien iguales, se tiene, segun la primera parte del teorema, EG=PQ : pero resultando QH=PF por la superposicion anterior, se tendrá tambien QH+HP =PF+HP ó PQ=FH ; de esta última igualdad y de la primera resulta al fin EG=FH.

Fig. 25.



33. Teorema 4.º 1.º *Los ángulos* 1 *y* 3, *ó* 3 *y* O (figura 26), *que tienen sus lados* BA *y* OD, BC *y* OE, *paralelos y dirigidos en el mismo sentido, ó* BA *y* OF, BC *y* OG, *en sentido opuesto, son iguales;* 2.º *los ángulos* 3 *y* 5, *que tienen sus lados paralelos, dos* BA *y* OD *dirigidos en el mismo sentido, y otros dos* BC *y* OG *en sentido opuesto, son suplementarios.*

Fig. 26.



1.º Los ángulos 1 y 2 son iguales por corespondientes : 3 y 2 lo son tambien por igual razon : luego el ángulo 1 es igual al 3.

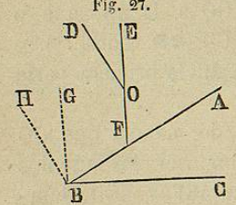
Los ángulos O y 1 son iguales por opuestos en el vértice : el 1 es igual al 3 por lo que se acaba de demostrar; luego O y 3 son iguales.

2.º El ángulo en 1 es suplementario del 5, por adyacentes : pero el 1 y el 3 son iguales por lo demostrado en la primera parte del teorema; luego 3 y 5 son suplementarios.

Corol. *Los ángulos de lados paralelos son iguales ó suplementarios.*

34. Teorema 5.º *Los ángulos* ABC *y* DOE *ó* DOF (fig. 27), *que tienen sus lados* BC *y* EF, BA *y* DO *perpendiculares, son iguales ó suplementarios.*

Fig. 27.



Trácense por B las rectas BG y BH, respectivamente paralelas á EF y DO, y se tendrá que los ángulos HBA y GBC son rectos (**29**, 3.º); luego los ángulos HBG y ABC, que tienen el mismo complemento ABG, son iguales (**18**, corolario) ; pero HBG y DOE ó DOF tienen sus lados paralelos, luego son iguales ó suplementarios

(**33**, corol.) : luego ABC y DOE ó DOF tambien lo serán.

Observacion. Son iguales los ángulos de la misma especie, como ABC y DOE, y suplementarios los de especie distinta, como ABC y DOF.

CAPÍTULO II.

De la circunferencia.

ARTÍCULO PRIMERO.

Propiedades de la circunferencia.

35. Teorema 1.º *Dos circunferencias de igual rádio son iguales.*

Porque superpuestas de modo que coincidan los centros, coincidirán en todos sus puntos, pues de lo contrario unos puntos se separarian del centro mas que otros, lo que es imposible (**9**, corolario); luego dichas circunferencias son iguales.

OBSERVACIONES

1.ª Este raciocinio demuestra igualmente que si dos arcos de igual rádio se superponen de modo que coincidan los centros de las circunferencias á que pertenecen y uno de sus extremos, coinciden en todos sus puntos si son iguales, y si son desiguales el menor se ajusta sobre el mayor, aunque no ocupe toda su extension ; y que, si superpuestos de la misma manera coinciden sus extremos, se ajustan en todos sus puntos, y por lo tanto son iguales.

2.ª El mismo raciocinio demuestra tambien que dos círculos de igual rádio, superpuestos de modo que coincidan sus centros, coinciden en todos sus puntos, y por lo tanto son tambien iguales.

36. Teorema 2.º *El diámetro* AB *divide la circunferencia en dos partes iguales llamadas* semicircunferencias.