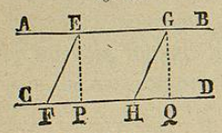
extremos de GH se confunden con los de EF, luego estas rectas son iguales.

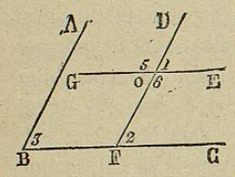
Para demostrar que EG y FH son tambien iguales, se tiene, segun la primera parte del teorema, EG=PQ : pero resultando QH=PF por la superposicion anterior, se tendrá tambien QH+HP =PF+HP ó PQ=FH; de esta última igualdad y de la primera resulta al fin EG=FH.

Fig. 25.



33. Teorema 4.º 1.º *Los ángulos* 1 *y* 3, *ó* 3 *y* O (figura 26), *que tienen sus lados* BA *y* OD, BC *y* OE, *paralelos y dirigidos en el mismo sentido, ó* BA *y* OF, BC *y* OG, *en sentido opuesto, son iguales;* 2.º *los ángulos* 3 *y* 5, *que tienen sus lados paralelos, dos* BA *y* OD *dirigidos en el mismo sentido, y otros dos* BC *y* OG *en sentido opuesto, son suplementarios.*

Fig. 26.



1.º Los ángulos 1 y 2 son iguales por corespondientes : 3 y 2 lo son tambien por igual razon : luego el ángulo 1 es igual al 3.

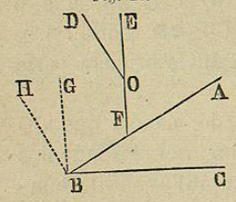
Los ángulos O y 1 son iguales por opuestos en el vértice : el 1 es igual al 3 por lo que se acaba de demostrar; luego O y 3 son iguales.

2.º El ángulo en 1 es suplementario del 5, por adyacentes : pero el 1 y el 3 son iguales por lo demostrado en la primera parte del teorema; luego 3 y 5 son suplementarios.

Corol. *Los ángulos de lados paralelos son iguales ó suplementarios.*

34. Teorema 5.º *Los ángulos* ABC *y* DOE *ó* DOF (fig. 27), *que tienen sus lados* BC *y* EF, BA *y* DO *perpendiculares, son iguales ó suplementarios.*

Fig. 27.



Trácense por B las rectas BG y BH, respectivamente paralelas á EF y DO, y se tendrá que los ángulos HBA y GBC son rectos (**29**, 3.º); luego los ángulos HBG y ABC, que tienen el mismo complemento ABG, son iguales (**18**, corolario); pero HBG y DOE ó DOF tienen sus lados paralelos, luego son iguales ó suplementarios

(**33**, corol.) : luego ABC y DOE ó DOF tambien lo serán.

Observacion. Son iguales los ángulos de la misma especie, como ABC y DOE, y suplementarios los de especie distinta, como ABC y DOF.

CAPÍTULO II.

De la circunferencia.

ARTÍCULO PRIMERO.

Propiedades de la circunferencia.

35. Teorema 1.º *Dos circunferencias de igual rádio son iguales.*

Porque superpuestas de modo que coincidan los centros, coincidirán en todos sus puntos, pues de lo contrario unos puntos se separarian del centro mas que otros, lo que es imposible (**9**, corolario); luego dichas circunferencias son iguales.

OBSERVACIONES

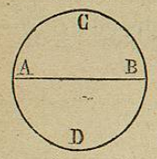
1.ª Este raciocinio demuestra igualmente que si dos arcos de igual rádio se superponen de modo que coincidan los centros de las circunferencias á que pertenecen y uno de sus extremos, coinciden en todos sus puntos si son iguales, y si son desiguales el menor se ajusta sobre el mayor, aunque no ocupe toda su extension; y que, si superpuestos de la misma manera coinciden sus extremos, se ajustan en todos sus puntos, y por lo tanto son iguales.

2.ª El mismo raciocinio demuestra tambien que dos círculos de igual rádio, superpuestos de modo que coincidan sus centros, coinciden en todos sus puntos, y por lo tanto son tambien iguales.

36. Teorema 2.º *El diámetro* AB *divide la circunferencia en dos partes iguales llamadas* SEMICIRCUNFERENCIAS.

Doblando la figura 28 por el diámetro AB, la parte ACB coincidirá con ADB; porque si no coincidiesen, las distancias del centro á la circunferencia no serían iguales, lo que es absurdo (**9**, corol.): luego las dos partes en que el diámetro divide la circunferencia coinciden en todos sus puntos, luego son iguales.

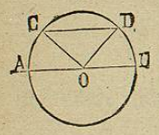
Fig. 28.



Observacion. La superposicion anterior demuestra tambien que el diámetro divide el círculo en dos partes iguales, que reciben el nombre de *semicírculos*.

37. Teorema 3.º *El diámetro* AB (fig. 29) *es mayor que otra cuerda cualquiera* CD.

Fig. 29.



Trazando los rádios OC y OD, se tendrá (**5**)

$$OC+OD>CD:$$

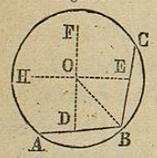
pero OC y OD componen el diámetro AB (**10**, corol. 1.º); luego

$$AB>CD.$$

38. Teorema 4.º *Por tres puntos* A, B, C (fig. 30), *que no están en línea recta, puede pasar una circunferencia, pero nada mas que una sola.*

Uniendo estos puntos por las rectas AB y BC, y levantando en los puntos medios D y E de estas las perpendiculares DF y EH, estas perpendiculares se encuentran en un punto, tal como O (**29**, corolario 6.º).

Fig. 30.



Ahora, siendo DF el lugar geométrico de los puntos equidistantes de A y B (**26**, corol. 1.º), y EH el de los puntos equidistantes de B y C, el punto O, donde se cortan, será el único que en el mismo plano equidista de A, B y C; luego si se hace centro en O, y con un rádio OB se traza una circunferencia, pasará por los tres puntos A, B, C; y como en el mismo plano no hay otro punto equidistante de los tres dados, no se podrán trazar mas circunferencias diferentes que pasen por los mismos.

Corol. 1.º *Tres puntos que no están en línea recta determinan la posicion de una circunferencia.*

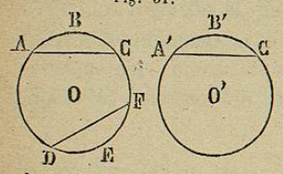
Corol. 2.º *Dos circunferencias no pueden tener mas que dos puntos comunes.*

Porque si tuviesen tres, las dos circunferencias se confundirian en una sola.

39. Teorema 5.º *En circunferencias iguales ó en una misma circunferencia:* 1.º *arcos iguales tienen cuerdas iguales;* 2.º *el mayor arco tiene la mayor cuerda* (*).

1.º Sean las circunferencias O y O′ (fig. 31) iguales, é iguales tambien los arcos ABC y A′B′C′: vamos á demostrar que las cuerdas AC y A′C′ lo son del mismo modo.

Fig. 31.



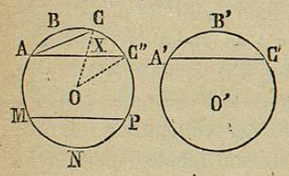
Superponiendo la circunferencia O′ sobre la O, de manera que el punto A′ coincida con A, el punto C′ caerá sobre C, por ser los arcos ABC y A′B′C′ iguales; luego los extremos de las cuerdas se confunden, luego estas son iguales.

Si los arcos iguales fuesen ABC y DEF, situados en la misma circunferencia O, en la O′ tomariamos A′B′C′ = DEF; de donde resultaria por lo que se acaba de demostrar, que DF=A′C′ y AC=A′C′, luego AC=DF.

2.º Sean las circunferencias O y O′ (fig. 32) iguales, y A′B′C′>ABC; vamos á demostrar que A′C′>AC.

Superponiendo la circunferencia O′ sobre la O, de modo que el punto A′ coincida con A, el punto C′ caerá mas abajo de C en C″, por ser el arco A′B′C′ mayor que el ABC por hipótesis; luego la cuerda A′C′ estará representada y será igual, segun la primera parte del teorema, á la AC″.

Fig. 32.



Ahora trazando los rádios OC y OC″, se tiene (**5**)

$$AX+XC>AC$$

y

$$OX+XC''>OC''.$$

Sumando estas desigualdades, resulta

$$AX+XC+OX+XC''>AC+OC'',$$

ó

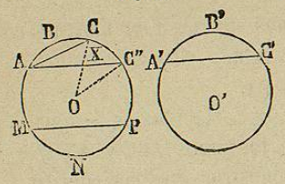
$$AC''+OC>AC+OC''.$$

(*) Toda cuerda subtiende dos arcos, uno mayor y otro menor que la semicircunferencia (cuando no es diámetro). Si, como en el teorema del texto, se menciona sólo uno de los arcos, se entiende siempre que se habla del menor que la semicircunferencia.

Suprimiendo en ambos miembros los rádios OC y OC″, se tiene AC″>AC, y sustituyendo en vez de AC″ su igual A′C′, resulta por fin

A′C′>AC.

Fig. 32



Si los arcos MNP>ABC estuviesen situados en la misma circunferencia O, en la O′ tomariamos A′B′C′=MNP : de donde resultaría, por lo que acabamos de demostrar, que A′C′>AC, y por la primera parte del teorema MP=A′C′; luego

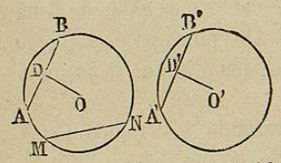
MP>AC.

Recíprocamente. *En circunferencias iguales, ó en una misma circunferencia:* 1.º *cuerdas iguales subtienden arcos iguales;* 2.º *la mayor cuerda subtiende el mayor arco* (**12**).

40. Teorema 6.º *En circunferencias iguales, ó en una misma circunferencia:* 1.º *cuerdas iguales equidistan del centro;* 2.º *de dos cuerdas desiguales la mayor se aproxima mas al centro que la menor.*

1.º Sean las circunferencias O y O′ (fig. 33) iguales, y las cuerdas AB y A′B′ iguales tambien: vamos á demostrar que equidistan del centro.

Fig. 33



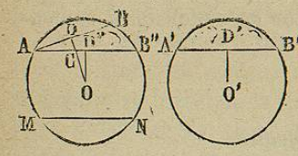
Trazando las perpendiculares OD y O′D′ á dichas cuerdas, y superponiendo la segunda figura sobre la primera, de modo que O′ y O coincidan, y que A′ y A se confundan tambien: B′ caerá sobre B por ser los arcos AB y A′B′ iguales (**39**): y la cuerda A′B′ se confundirá con AB; luego O′D′ coincide con OD, pues de lo contrario desde O habria dos perpendiculares á la AB, lo que es absurdo (**23**); luego OD y O′D′ son iguales: pero estas líneas son las que miden las distancias de las cuerdas á los centros respectivos (**24**, corol.); luego dichas cuerdas equidistan del centro.

Si las cuerdas iguales estuviesen en una misma circunferencia como AB y MN, la demostracion sería análoga á la empleada en igual hipótesis del teorema anterior.

2.º Sea A′B′>AB en las circunferencias O′ y O iguales (figura 34).

Superponiendo la figura primera sobre la segunda, de modo que el centro O′ coincida con O y el punto A′ con A, el punto B′ caerá en B″, por ser el arco A′B′ mayor que AB (**39**, rec.): la cuerda A′B′ estará representada por su igual AB″ (**39**) y O′D′ por su igual OD″ segun la primera parte de este teorema.

Fig. 34.



Ahora (**24**) OC>OD″,
pero OD>OC; luego con mas razon OD>OD″,
ó, una vez que OD″=O′D′,
OD>O′D.

Luego la cuerda mayor A′B′ dista ménos del centro que la menor AB.

Si las cuerdas desiguales estuviesen en una misma ciecunferencia, como AB y MN, la demostracion sería análoga á la empleada en igual hipótesis del teorema anterior.

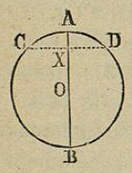
Recíprocamente. *En circunferencias iguales ó en una misma circunferencia:* 1.º *cuerdas equidistantes del centro son iguales;* 2.º *de dos ó mas cuerdas, la que mas se aproxima al centro es la mayor* (**12**).

Observacion. Suponiendo unido el punto A con O por una recta AO, en la misma figura 34, se notará que si desde O se trazan perpendiculares á las rectas AB y AB″, la menor de estas perpendiculares es la que corresponde á la línea que con la AO forma menor ángulo.

41. Teorema 7.º *El diámetro* AB *perpendicular á una cuerda* CD (fig. 35), *divide la cuerda y los arcos* CBD *y* CAD, *que esta subtiende en dos partes ignales.*

Doblando la parte ADB de la figura sobre la ACB, sirviendo de eje el diámetro AB, la línea XD tiene que caer sobre XC, por ser rectos los ángulos AXD y AXC; y siendo D punto de la circunferencia, tiene que caer sobre C, que tambien es punto de la misma; luego XD se confunde con XC, el arco BD con CB y el AD con AC; luego la cuerda y los arcos quedan divididos en dos partes iguales.

Fig. 35.



Corol. *Dos diámetros perpendiculares entre sí dividen la circunferencia en cuatro partes iguales, llamadas* cuadrantes.

Observacion. La recta AB cumple con las condiciones siguientes :

1.ª *Pasa por el centro del círculo.*

2.ª *Es perpendicular á la cuerda.*

3.ª *Divide la cuerda en dos partes iguales.*

4.ª *Divide tambien en dos partes iguales el arco menor que la cuerda subtiende.*

5.ª *Divide igualmente el arco mayor en dos partes iguales.*

Dos de estas condiciones determinan la posicion de una recta (**5**, corol. 1.º y **23**); luego

Si una recta cumple con dos cualesquiera de las condiciones precedentes, cumplirá tambien con las tres restantes.

ARTÍCULO II.

Líneas secantes y tangentes á la circunferencia.

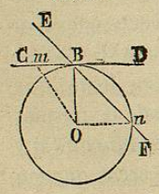
42. Teorema 1.º *Una recta no puede tener mas que dos puntos comunes con la circunferencia.*

Porque si tuviese tres, trazando por ellos rádios, se tendrian bajadas desde el centro á la recta tres rectas iguales, lo que es absurdo (**25**, corol.)

43. *Se llama* secante *de una circunferencia una recta ilimitada, que tiene dos puntos comunes con ella ; y* tangente *una recta, tambien ilimitada, que tiene un solo punto comun con la circunferencia.* El punto comun se llama *punto de contacto.*

44. Teorema 2.º *Toda recta que pasa por el extremo exterior de un rádio : 1.º si es perpendicular al rádio será tangente á la circunferencia : 2.º si es oblícua será secante.*

Fig. 36.



1.º Si CD es perpendidular en el extremo B del rádio OB (fig. 36), será tangente.

En efecto, siendo CD perpendicular á OB, OB lo será á CD (**22**, corol. 1.º): luego otra recta cualquiera O*m* será oblícua á CD (**23**); luego será mas larga que la perpendicular OB (**24**); luego el punto *m* está fuera de la circunferencia; y como lo mismo se demuestra de otro punto cualquiera

de la CD, resulta que ésta no tiene mas que un punto comun con la circunferencia ; luego es tangente (**43**).

2.º Si la EF es oblícua á OB, será secante de la circunferencia.

Siendo EF oblícua á OB, OB lo será á EF ; luego desde O se puede trazar otra oblícua O*n* igual con OB (**25**, corol.) ; luego el punto *n* se halla en la circunferencia (**11**, rec. 1.º) ; luego la recta indefinida EF tiene dos puntos comunes con la circunferencia, luego será secante (**43**).

Recíprocamente. *Toda recta que pasa por el extremo exterior de un rádio : 1.º si es tangente será perpendicular al rádio ; 2.º si es secante será oblícua* (**12**).

Corol. 1.º *Por un punto de la circunferencia no se puede trazar mas que una tangente.*

Porque si se pudiesen trazar dos ó mas, habria en el extremo del rádio dos ó mas perpendiculares á éste, lo que es absurdo (**23**).

Corol. 2.º *Dos paralelas* AB *y* CD (fig. 37) *tangentes á una circunferencia* O, *tienen sus puntos de contacto* E *y* F *en los extremos de un mismo diámetro* EF.

Fig. 37.

Porque trazando por el punto de contacto E un diámetro, este será perpendicular á AB, segun el teorema recíproco anterior; luego tambien lo será á CD (**29**, corol. 3.º), luego pasará por el punto de contacto F; pues de lo contrario, uniendo F con O, esta línea sería perpendicular á CD, segun el recíproco precedente, y por consiguiente desde el centro habria dos perpendiculares á la CD, lo que es imposible ; luego los puntos E y F están en los extremos de un mismo diámetro.

Observacion. Del recíproco anterior, y tambien del número **24**, se infiere que : *la secante dista del centro una cantidad menor que el rádio, la tangente una cantidad igual al rádio, y la línea exterior á la circunferencia una cantidad mayor que el rádio; y recíprocamente* (**12**).

45. Teorema 3.º *Los arcos comprendidos entre paralelas son iguales.*

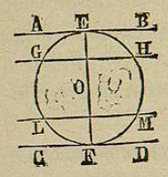
Pueden ocurrir tres casos : 1.º que las paralelas sean dos secantes ó dos cuerdas GH y LM ; 2.º que sean una secante ó cuerda LM y una tangente AB ; 3.º que sean dos tangentes AB y CD.

1.º Si se traza el diámetro EF perpendicular á GH, se tendrá (**41**)

HMF=GLF:

pero siendo EF perpendicular á GH, lo será tambien á LM (**29**, corol. 3.º); luego

Fig. 37.



MF=LF:

restando estas dos igualdades se tiene

HMF—MF=GLF—LF ó HM=GL.

2.º Trazando el diámetro EF, será perpendicular á AB (**44**, rec.), y por consiguiente á LM (**29**, corol. 3.º) luego

MHE=LGE.

3.º Por E se traza un diámetro, el cual pasará tambien por F (**44**, corol. 2.º); luego (**36**)

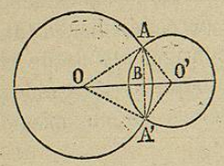
FMHE=FLGE.

46. *Se dice que dos circunferencias son* SECANTES *una de otra cuando tienen dos puntos comunes, y* TANGENTES *cuando sólo tienen uno.*

47. TEOREMA 4.º *Si dos circunferencias* O *y* O' (fig. 38), *tienen un punto comun* A *fuera de la línea* OO', *que une los centros, serán secantes.*

Bájese desde A una perpendicular AB sobre OO', y prolónguese de modo que A'B sea igual á AB: uniendo los puntos A y A' con O y O', las oblícuas OA y OA' son iguales (**25**), luego si A es punto de la circunferencia O, tambien lo será A'(**11**, rec. 1.º): por igual razon las oblícuas AO' y O'A' son iguales; luego siendo A punto de la circunferencia O', tambien A' lo será; luego las circunferencias O y O' tienen dos puntos comunes, luego son secantes (**46**).

Fig. 38.



COROL. 1.º *La línea de los centros de dos circunferencias secantes es perpendicular á la cuerda comun.*

COROL. 2.º *El punto de contacto de dos circunferencias tangentes está en la línea de los centros.*

Porque si estuviese fuera serian secantes.

48. TEOREMA 5.º *Dos circunferencias que están en un mismo plano:*

1º. *Si son exteriores la una á la otra, la distancia de los centros es mayor que la suma de los rádios.*

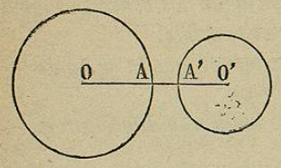
2.º *Si se tocan exteriormente, la distancia de los centros es igual á la suma de los rádios.*

3.º *Si se cortan, la distancia de los centros es menor que l suma de los rádios y mayor que su diferencia.*

4.º *Si se tocan interiormente, la distancia de los centros es igual á la diferencia de los rádios.*

5.º *Si son interiores la una á la otra, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los rádios.*

Fig. 39.



1.º La simple inspeccion de la figura 39 nos da

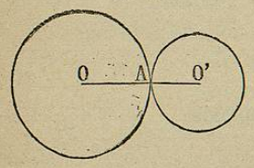
OO'=OA+AA'+A'O': de donde

OO'>OA+A'O',

ó llamando d la distancia de los centros, r y r' los rádios de las circunferencias O y O',

$d>r+r'$.

Fig. 40.

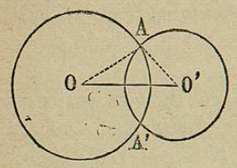


2.º El punto de contacto de estas circunferencias (fig. 40) está en la línea de los centros (47, corol. 2.º), luego

OO'=OA+AO' ó $d=r+r'$.

3.º Los puntos de interseccion A y A' (fig. 41) están fuera de la línea de los centros (**47**); luego los puntos O, A y O' no están en línea recta; luego (**5**)

Fig. 41.



OO'<AO+AO':

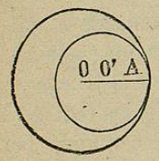
y tambien OA<OO'+AO', de donde

OO'>OA—AO',

ó reuniendo la primera y última desigualdad,

$d<r+r'$, $d>r-r'$.

Fig. 42.



4.º El punto de contacto de estas circunferencias (fig. 42) está en la línea OO' (**47**, corolario 2.º); luego

OO'=OA—O'A

ó $d=r-r'$.

5.º La simple inspeccion de la figura 43 nos da

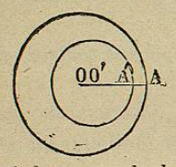
UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

$$OO' = AO - O'A' - A'A\,;$$

sumando A'A con el segundo miembro; este crecerá, y por consiguiente

$$OO' < OA - O'A' \quad ó \quad d < r - r'.$$

Fig. 43.



RECÍPROCAMENTE. *Dos circunferencias que están en un mismo plano :*

1.º *Si la distancia de los centros es mayor que la suma de los rádios, son exteriores la una á la otra.*

2.º *Si la distancia de los centros es igual á la suma de los rádios, se tocan exteriormente.*

3.º *Si la distancia de los centros es menor que la suma de los rádios y mayor que su diferencia, se cortan.*

4.º *Si la distancia de los centros es igual á la diferencia de los rádios, se tocan interiormente.*

5.º *Si la distancia de los centros es menor que la diferencia de los rádios, son interiores la una á la otra* (**12**).

ARTÍCULO III.

Medidas de los ángulos.

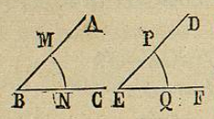
49. *Se llama* ARCO CORRESPONDIENTE *á un ángulo el arco interceptado entre sus lados y trazado desde el vértice como centro.*

COROL. *El arco correspondiente á un ángulo recto es un cuadrante* (**41**, corol.).

50. TEOREMA 1.º 1.º *Si dos ángulos son iguales, sus arcos correspondientes trazados con el mismo rádio son tambien iguales ; 2.º si dos ángulos son desiguales, el mayor tiene mayor arco correspondiente, estando los dos arcos trazados con el mismo rádio.*

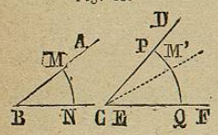
1.º Sean los ángulos B y E (fig. 44) : superponiendo el primero al segundo, de manera que coincidan, el punto N coincidirá con Q y el M con P, por ser iguales por hipótesis los rádios BN y EQ ; luego el arco MN se confunde con PQ (**35**, obs. 1.ª), luego son iguales.

Fig. 44.



2º Sean los ángulos B y E (fig. 45); superpóngase el primero al segundo, de modo que coincidan los vértices y que BC caiga sobre EF, y el otro lado BA caerá en la parte interior del ángulo DEF en EM', por ejemplo, por ser este ángulo mayor que el en B por hipótesis : el punto N caerá sobre Q por la igualdad de los rádios BN y EQ, y NM se ajustará con QP (**35**, observacion 1.ª). Ahora los arcos MN y M'Q son iguales por la primera parte del teorema : pero PQ es evidentemente mayor que M'Q; luego tambien será

Fig. 45.



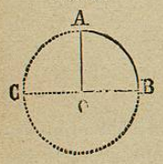
$$PQ > MN.$$

RECÍPROCAMENTE. 1.º *Si dos arcos trazados con el mismo rádio son iguales, sus ángulos correspondientes tambien lo serán;* 2.º *si dos arcos trazados con el mismo rádio son desiguales, el mayor corresponde á mayor ángulo* (**12**).

COROL. *Si el arco* AB (fig. 46), *correspondiente á un ángulo* AOB, *es un cuadrante, el ángulo será recto.*

Porque completando la circunferencia y prolongando BO hasta C, CAB será una semicircunferencia (**36**); pero AB es un cuadrante por hipótesis, luego AC será otro cuadrante; luego los ángulos AOB y AOC son iguales, segun el teorema anterior. Por otra parte, AOB y AOC valen juntos dos rectos (**19**), luego cada uno de ellos valdrá un recto; luego AOB es un ángulo recto.

Fig. 46.

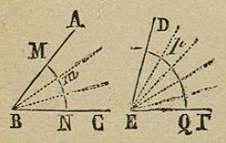


51. TEOREMA 2.º *Dos ángulos cualesquiera son proporcionales á sus arcos correspondientes trazados con igual rádio.*

Se distinguen dos casos : 1.º que los arcos sean conmensurables ; 2.º que sean inconmensurables (**6**).

1.º Sean MN y PQ conmensurables (fig. 47) y $Mm = Pp$ la unidad de medida comun. Supongamos que esta se puede colocar en MN tres veces y cinco en PQ, y se tendrá

Fig. 47.



$$\frac{MN}{PQ} = \frac{3}{5}.$$

Trazando por los puntos de division de est s arcos y por los vértices líneas rectas, los ángulos ABC y DEF

quedarán divididos el primero en tres ángulos y el segundo en cinco, todos iguales entre sí (**50**, rec.); luego

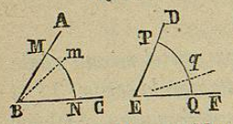
$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{3}{5}.$$

Esta proporcion y la anterior tienen comun la razon $\frac{3}{5}$; luego (Alg. **183**).

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{MN}{PQ}.$$

2.° Sean MN y PQ (fig. 48) inconmensurables; supongamos que el arco MN se divide en partes iguales entre sí, tan pequeñas como se quiera (lo que es posible, puesto que se puede suponer dividido MN en dos partes iguales, cada una de estas en otras dos y así sucesivamente); y que una de estas partes sea M*m*: colóquese esta medida sobre PQ todas las veces que se pueda, y quedará un resto *q*Q, una vez que MN y PQ son inconmensurables: trácese luego la recta E*q*.

Fig. 48.



Siendo los arcos MN y P*q* conmensurables, se tendrá segun la primera parte del teorema

$$\frac{ABC}{DEq}=\frac{MN}{Pq}.$$

Comparando estos quebrados con los siguientes.

$$\frac{ABC}{DEF} \text{ y } \frac{MN}{PQ},$$

se observará que los segundos (que están en columna) tienen el numerador MN comun, y que el denominador P*q* se puede aproximar á PQ todo lo que se quiera; porque *q*Q es menor que M*m*, y esta parte puede ser mas pequeña que una cantidad cualquiera dada; luego $\frac{MN}{PQ}$ es el límite de $\frac{MN}{Pq}$ (*): por igual razon $\frac{ABC}{DEF}$ es el límite de $\frac{ABC}{DEq}$; pero las cantidades variables son iguales, luego los límites tambien lo serán [(*) teor.]; luego

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{MN}{PQ}.$$

(*) Se llama cantidad *variable* la que admite un número ilimitado de valores distintos, y *constante* la que no admite mas de uno.

Límite de una cantidad variable es otra constante, á la que la primera puede aproximarse cuanto se quiera; pero sin que jamas le sea igual. El límite es *superior* cuando creciendo la variable se aproxima á él, é *inferior* en el caso contrario.

Teorema (llamado de los límites). *Si dos cantidades variables* X *y* Z, *permaneciendo iguales entre sí, se aproximan á sus límites respectivos* A *y* B, *estos serán iguales.*

En efecto, se puede suponer á x un valor que se aproxime á A todo lo que se quiera; luego tambien se puede suponer á z el mismo valor, puesto que x y z permanecen siempre iguales; luego A es tambien límite de z, luego A y B son límites de z (la primera de estas cantidades por lo que se acaba de demostrar y la segunda por hipótesis); y como una misma variable z no puede aproximarse del mismo modo á dos límites diferentes, A es igual B.

Observacion. La unidad de medida de los ángulos es un ángulo, y la de los arcos otro arco: porque la unidad de medida ha de ser siempre de la misma naturaleza que la cantidad que se mide; si, pues, tomamos por unidad de medida del ángulo ABC el DEF, y por unidad de medida de los arcos el PQ correspondiente á la unidad de medida angular, la igualdad anterior $\frac{BC}{DEF}=\frac{MN}{PQ}$ nos dice que

La relacion de un ángulo con su unidad de medida es la misma que la de su arco correspondiente con su unidad de medida tambien.

En las mismas hipótesis anteriores la igualdad precedente se convierte en $\frac{ABC}{1}=\frac{MN}{1}$ ó $ABC=MN$;

luego en igual sentido se puede decir que

La medida (2) de un ángulo es su arco correspondiente.

52. El ángulo tomado comunmente por unidad de medida es el ángulo recto, y como su arco correspondiente es un cuadrante (**49**, corol.), el cuadrante será tambien la unidad de medida de los arcos. A fin de facilitar la determinacion de las relaciones de los arcos con el cuadrante, se divide éste en 90 grados, de manera que la circunferencia tiene 360 de estos: cada grado se divide en 60 minutos, cada minuto en 60 segundos, etc.

Los grados, minutos, segundos, etc. se indican así:

42 grados, 12 minutos, 37 segundos = 42° 12′ 37″.

Siendo la medida de un ángulo su arco correspondiente (observacion anterior) la misma denominacion de los arcos se aplica á