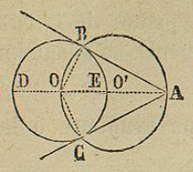
RECÍPROCAMENTE. *Si una recta* DA *divide en dos partes iguales el ángulo* BAC, *formado por dos tangentes á una circunferencia, pasará por el centro* O *de ésta.*



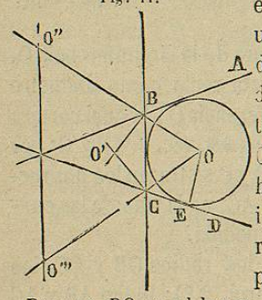
Porque de lo contrario, trazando por O y A una recta, habria dos bisectrices de un mismo ángulo BAC, lo que es absurdo.

OBSERVACION. El *lugar geométrico* de los centros de las circunferencias tangentes á los lados de un ángulo es la bisectriz de éste.

66. 9.º **Describir una circunferencia O, tangente á tres rectas AB, BC y CD (fig 71), que forman entre sí ángulos cualesquiera.**

Trácense las bisectrices de los ángulos, las que se cortarán en un punto O; porque siendo cada uno de los ángulos B y C menor que dos rectos (**19**, corol. 2.º), la suma de sus mitades OBC y OCB vale ménos tambien que dos rectos, y por lo tanto OB y OC no son paralelas (**31**, 2.º): hágase centro en O, y con un rádio OE, igual á las distancias de O á una de las rectas CD, se describe la circunferencia pedida.

Fig. 71.



Porque BO es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes á AB y BC (**65**, obs.); por igual razon CO es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes á BC y CD, luego el punto O, donde se cortan, será el centro de la circunferencia que se quiere trazar, y la distancia á una de las rectas dadas el rádio de dicha circunferencia.

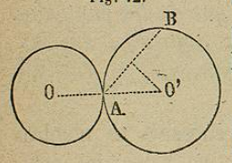
OBSERVACION. Suponiendo prolongadas indefinidamente las rectas AB, BC y CD, se podrian trazar otras tres circunferencias tangentes á las mismas rectas, cuyos centros serían O', O'', y O'''.

67. 10. **Trazar una circunferencia tangente á otra en un punto dado, y que pase por otro punto tambien dado, exterior ó interior á ella.**

Distinguirémos dos casos: 1.º que el punto dado (que no se halla en la circunferencia) sea exterior; 2.º que sea interior.

1.º Sea O (fig. 72) la circunferencia dada, A el punto de contacto y B el exterior por donde ha de pasar la circunferencia, que va á describirse.

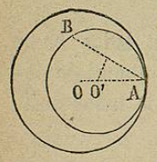
Fig. 72.



Trácese la recta AB y el rádio OA, prolongándole indefinidamente en este sentido: divídase la AB en dos partes iguales por una perpendicular, la que encontrará á la OA prolongada suficientemente, si el ángulo BAO es oblícuo (**29**): desde el punto O', donde se cortan, con el rádio O'A se describe una circunferencia que será la pedida.

Porque pasando por A pasará tambien por B (**26**, 1.º), y será tangente á la circunferencia O (**48**, recíproco 2.º).

Fig. 73.



2.º Si el punto B (fig. 73) es interior, se ejecuta una construccion análoga á la precedente como se ve en la figura.

OBSERVACION. Si el ángulo BAO (figs. 72 ó 73) fuese recto, el problema sería imposible.

CAPÍTULO III.

De los polígonos.

ARTÍCULO PRIMERO.

Definiciones preliminares.

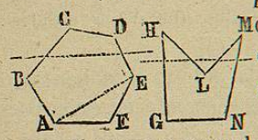
68. *Se llama* POLÍGONO *la porcion de superficie plana limitada por rectas.* Estas rectas, los ángulos que forman y sus vértices, reciben los nombres de *lados, ángulos* y *vértices* del polígono.

Llámase PERÍMETRO *del polígono la suma ó conjunto de sus lados.*

DIAGONAL *es la recta que une dos vértices no contiguos á un mismo lado*, como AE (fig. 74).

Un polígono se llama CONVEXO *cuando no puede ser cortado por una recta mas que en dos puntos; y* CÓNCAVO *en el caso contrario.* ABCDEF es un polígono convexo, y GHLMN cóncavo.

Fig. 74.



Cuando en lo sucesivo se nombre un polígono en general, se entenderá que se habla del convexo, que es el único de cuyas propiedades nos ocuparémos en adelante.

Se llama polígono EQUILÁTERO *el que tiene todos sus lados iguales entre sí, y* EQUIÁNGULO *el que tiene sus ángulos iguales.*

Llámase polígono REGULAR *el que es equilátero y equiángulo, é* IRREGULAR *el que no reune estas dos circunstancias.*

69. Un polígono tiene evidentemente tantos lados como ángulos y como vértices; por razon, pues, del número de lados ó ángulos (*) se clasifican los polígonos de la manera siguiente:

El polígono que tiene 3 lados se llama *triángulo.*
4. . . . . *cuadrilátero.*
5. . . . . *pentágono.*
6. . . . . *exágono.*
7. . . . . *heptágono.*
8. . . . . *octógono.*
9. . . . . *eneágono.*
10. . . . . *decágono.*
11. . . . . *endecágono.*
12. . . . . *dodecágono.*
15. . . . . *pentedecágono.*

Los polígonos de diferente número de lados de los precedentes no tienen nombres especiales, y se les llama polígonos de 13, 20, 100, etc., lados.

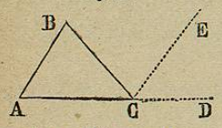
(*) El cuadrilátero es el único polígono que toma el nombre del número de sus lados, los demas le toman del de sus ángulos.

ARTÍCULO II.

De los triángulos.

70. De la definicion de la línea recta (**5**) se infiere que (fig. 75) AC<AB+BC, y tambien que AC+BC>AB, de donde AC>AB−BC; luego

Fig. 75.



Un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor qui su diferencia.

71. TEOREMA 1.º *La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos.*

Sea el triángulo ABC. Trazando por C una recta CE paralela á AB, se tendrá (**31**, rec. 1.º)

BAC+ACE=2R ó BAC+ABC+BCE=2R:

pero (**31**, rec. 1.º) BCE=CBA; luego

BAC+ACB+CBA=2R.

COROL. 1.º *Un ángulo de un triángulo es suplemento de la suma de los otros dos;* y por consiguiente, *si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, tambien tendrán igual el tercer ángulo* (**18**, corol.).

COROL. 2.º *El ángulo* BCD, *formado por un lado* BC *de un triángulo y la prolongacion* CD *de otro, llamado ángulo* EXTERNO, *es igual á la suma de los dos internos* A *y* B *no adyacentes.*

Porque la suma de A y B tiene por suplemento el ángulo ACB (corol. ant.): pero BCD tiene tambien por suplemento á ACB (**19**); luego (**18**, corol.).

BCD=A+B.

COROL. 3.º *Si un triángulo tiene un ángulo recto ú obtuso, los demás serán agudos.*

Llámase triángulo RECTÁNGULO *el que tiene un ángulo recto,* OBTUSÁNGULO *el que tiene un ángulo obtuso, y* ACUTÁNGULO *el que tiene sus tres ángulos agudos.*

En el triángulo rectángulo *se llama* HIPOTENUSA *el lado opuesto al ángulo recto, y* CATETOS *los lados que forman dicho ángulo recto.*

Corol. 4.º *Los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo son complementarios : y* recíprocamente, *si dos ángulos de un triángulo son complementarios, el triángulo será rectángulo.*

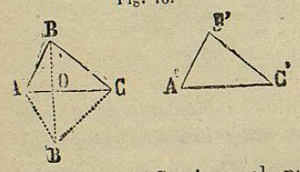
Corol. 5.º *Si desde un punto de una oblícua se baja una perpendicular sobre la recta á que lo es, la perpendicular caerá dentro del ángulo agudo.*

Porque si cayese dentro del ángulo obtuso, resultaria un triángulo con un ángulo obtuso y otro recto, lo que es imposible (corolario 3.º).

72. Teorema 2.º *Dos triángulos son iguales : 1.º si tienen sus tres lados respectivamente iguales ; 2.º si tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido ; 3.º si tienen un lado igual contiguo á dos ángulos respectivamente iguales.*

1.º Sean los triángulos ABC y A'B'C' (fig. 76) en que suponemos AB=A'B', BC=B'C' y AC=A'C' : colóquese el triángulo A'B'C' sobre el ABC, de modo que A'C' coincida con su igual AC, y que el vértice B' caiga á diferente lado de la AC que el vértice B, en B'' por ejemplo, únanse los puntos B y B''.

Fig. 76.



La recta AC tiene el punto A equidistante de B y B'' por ser rectas AB y AB'' iguales por hipótesis : por igual razon C equidista tambien de B y B'' ; luego la AC es perpendicular á la BB'', y la divide en dos partes iguales OB=OB'' (**26**, corolario 2.º). Doblando, pues, esta figura por AC, la parte inferior sobre la superior, OB'' caerá sobre OB (**23**), y el punto B'' coincidirá con B; luego los tres vértices de los triángulos ABC y AB''C coinciden; luego tambien los lados y ángulos, luego son iguales : pero el triángulo AB''C representa A'B'C' ; luego

ABC=A'B'C'.

2.º Si los triángulos fuesen los mismos, y se supusiese AB=A'B', AC=A'C' y el ángulo BAC igual al B'A'C', colocando el triángulo A'B'C' sobre el ABC, de modo que A'C' coincidiese con su igual AC, y el vértice B' cayese hácia la parte superior de AC como el vértice B , el ángulo B'A'C' coincidirá con su igual BAC y el punto B' caerá sobre B, por ser iguales tambien por hipótesis las rectas A'B' y AB; luego los tres vértices

de los triángulos coinciden, luego los triángulos son iguales.

3.º Sean los mismos triángulos, en que se supone AC=A'C' ; el ángulo BAC=B'A'C' y ACB=A'C'B' : superponiendo dichos triángulos de manera que A'C' coincida con su ignal AC, A'B caerá sobre AB por ser iguales los ángulos BAC y B'A'C', y B'C caerá sobre BC por igual razon ; luego el punto B' coincidirá con B (**5** ; corol. 3º) ; luego los tres vértices de los triángulos se confunden, luego los triángulos son iguales.

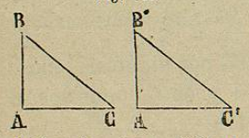
Corol. *Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual y dos ángulos cualesquiera respectivamente iguales, con tal que estos tengan la misma colocacion en los dos triángulos respecto al lado igual.*

Porque teniendo dos ángulos respectivamente iguales, tienen el tercero tambien igual (**71**, corol. 1.º), luego si los ángulos respectivamente iguales tienen la misma colocacion respecto al lado igual, tendrán necesariamente un lado igual contiguo á dos ángulos iguales.

73. Teorema 3.º *Dos triángulos rectángulos* ABC *y* A B'C' (fig. 77) *son iguales si tienen las hipotenusas* BC *y* B'C' *iguales y un cateto* AB *igual á otro cateto* A'B'.

Superpóngase el triángulo A'B'C' al ABC, de modo que el cateto A'B' coincida con su igual AB : el cateto A'C' caerá sobre AC, por la igualdad de los ángulos rectos en A' y en A, y la hipotenusa B'C' sobre BC, pues de lo contrario B'C' y BC serían desiguales (**25**, 2.º), lo que es contra la hipótesis ; luego el punto C' caerá sobre C, luego los triángulos son iguales.

Fig. 77.



Observacion 1.ª En este caso de igualdad de triángulos, lo mismo que en los del número anterior, se notará que los ángulos que coinciden son los opuestos á lados iguales, y que los lados que tambien coinciden son los opuestos á ángulos iguales; de manera que en *triángulos iguales, á lados iguales se oponen ángulos iguales, y recíprocamente.*

Observacion 2.ª Si al superponer estos triángulos suponemos AB=A'B' y BC<B'C', se notará que B'>B y por consiguiente C>C' ; de donde resulta que dos triángulos rectángulos, que tienen igual un cateto y la hipotenusa desigual, el ángulo agudo

opuesto á dicho cateto es mayor en el que tiene menor hipotenusa.

74. Los triángulos por razon de sus lados se dividen tambien en ESCALENOS, *que tienen sus tres lados desiguales,* ISÓSCELES, *que tienen dos lados iguales, y* EQUILÁTEROS, *que tienen los tres lados iguales entre sí.*

Se llama BASE *de un triángulo uno cualquiera de sus lados;* VÉRTICE *el vértice del ángulo opuesto al lado tomado por base, y* ALTURA *la perpendicular bajada desde el vértice á la base ó á su prolongacion.*

Si AC es la base del triángulo ABC (fig. 78), el punto B será el vértice, y la perpendicular BD la altura.

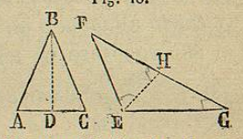
COROL. *En el triángulo rectángulo, si un cateto es la base el otro será la altura.*

OBSERVACION. En el triángulo isósceles suele llamarse base el lado desigual.

75. TEOREMA 4.º *En todo triángulo :* 1.º *á lados iguales se oponen ángulos iguales ;* 2.º *al mayor lado se opone el mayor ángulo.*

1.º Sea el triángulo ABC (fig. 78) en que se supone AB=BC, y vamos á demostrar que el ángulo en A es igual al en C.

Fig. 78.



Bájese desde B una perpendicular BD sobre AC. Los triángulos rectángulos ABD y DBC tienen el cateto BD comun : y la hipotenusa AB igual á la hipotenusa BC por hipótesis ; luego son iguales (**73**) ; luego los ángulos en A y en C, opuestos al lado comun, tambien lo serán (**73**, obs. 1.ª)

2.º Sea el triángulo EFG (fig. 78); si FG>FE, el ángulo FEG será mayor que el G.

Tomando sobre FG una parte FH=FE se tendrá, segun la primera parte del teorema, el ángulo

FEH=FHE :

pero (**71**, corol. 2.º) FHE>G; luego

FEH>G :

el ángulo FEH es una parte de FEG; luego con mayor razon

FEG>G.

RECÍPROCAMENTE. *En todo triángulo :* 1.º *á ángulos iguales se oponen lados iguales;* 2.º *al mayor ángulo se opone el mayor lado* (**12**).

COROL. 1. *Si un triángulo es isósceles, los ángulos contiguos á la base son iguales, y recíprocamente.*

COROL. 2.º *Si un triángulo es equilátero, será tambien equiángulo, y recíprocamente ; luego el triángulo equilátero ó equiángulo es un polígono regular.*

COROL. 3.º *El mayor lado en el triángulo obtusángulo es el opuesto al ángulo obtuso, y en el rectángulo la hipotenusa.*

OBSERVACION. La recta BD, trazada en un triángulo ABC isósceles (fig. 78), reune las circunstancias siguientes :

1.ª *Pasa por el vértice del triángulo.*
2.ª *Es perpendicular á la base.*
3.ª *Divide la base en dos partes iguales.*
4.ª *Es bisectriz del ángulo opuesto á la base.*

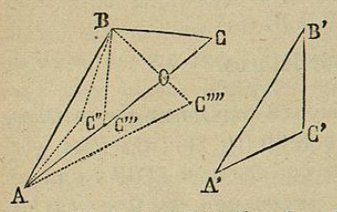
Y como dos de estas condiciones determinan la posicion de la recta, resulta que :

Si una recta cumple con dos cualesquiera de las condiciones precedentes cumplirá tambien con las dos restantes.

76. TEOREMA 5.º *Si dos triángulos* ABC *y* A'B'C' (fig. 79) *tienen dos lados respectivamente iguales* AB=A'B', BC=B'C' *y el ángulo* B *comprendido por los dos primeros es mayor que el* B *comprendido por los dos segundos, el lado* AC *opuesto al mayor ángulo es mayor que el* A'C' *opuesto al menor.*

Superpóngase el triángulo A'B'C' al ABC, de modo que A'B coincida con su igual AB, y el lado B'C' caerá dentro del ángulo ABC, puesto que este ángulo es mayor por hipótesis que el A'B'C'.

Fig. 79.



Ahora el punto C' podrá tomar á lo sumo tres posiciones distintas :

1.ª en C'' dentro del triángulo ; 2.ª en C''' sobre el lado AC ; 3.ª en C'''' fuera del triángulo.

1.ª Si C' cae en C'' se tendrá (**7**)

AC+BC>AC''+BC'' :

y como BC=BC'' por hipótesis, resulta

AC>AC'' ó AC>A'C'.

2.ª Si el punto C′ cayese en C‴, se tendria evidentemente

$$AC > AC''' \quad ó \quad AC > A'C'.$$

3.ª Si dicho punto C′ cae en C⁗ se tiene (5)

$$AO + OC'''' > AC'''' \quad y \quad BO + OC > BC:$$

sumando estas desigualdades, resulta

$$AO + OC'''' + BO + OC > AC'''' + BC,$$

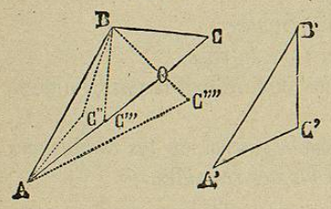
ó

$$AC + BC'''' > AC'''' + BC;$$

y como BC=BC⁗ por hipótesis, resulta al fin

$$AC > AC'''' \quad ó \quad AC > A'C'.$$

Fig. 79.



RECÍPROCAMENTE. *Si dos triángulos* ABC *y* A′B′C′ *tienen dos lados respectivamente iguales* AB=A′B′, BC=B′C′ *y el tercer lado* AC *es mayor que el tercer lado* A′C′, *el ángulo* B, *opuesto al mayor lado, es mayor que el ángulo* B′ *opuesto al menor.*

En efecto, si B no fuese mayor que B′, sería B=B′ ó B<B′; pero si B=B′ los triángulos serían iguales (72, 2.º), y por consiguientes AC=A′C′ contra la hipótesis: si B<B′, segun el teorema directo, sería AC<A′C′ lo que tambien es contra la hipótesis; luego necesariamente se ha de verificar que

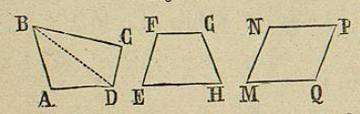
$$B > B'.$$

ARTÍCULO II.

De los cuadriláteros.

77. Los cuadriláteros se dividen en TRAPEZOIDES, *que no tienen ningun lado paralelo á otro* como ABCD (fig. 80): TRAPECIOS, *que tienen dos lados paralelos y otros dos no,* como EFGH: *y* PARALELÓGRAMOS, *que tienen sus lados paralelos dos á dos,* como MNPQ.

Fig. 80.



Se llaman BASES *del trapecio los lados paralelos, y* ALTURA *la perpendicular bajada de una de las bases á la otra ó á su prolongacion, ó sea la disancia entre las bases.*

En el paralelógramo recibe el nombre de *base* uno cualquiera de sus lados, y el de *altura* la perpendicular trazada desde el lado opuesto á la base á esta ó á su prolongacion, ó sea la distancia entre la base y su lado opuesto.

78. TEOREMA 1.º *Los ángulos de un cuadrilátero* ABCD (fig. 80) *valen juntos cuatro ángulos rectos.*

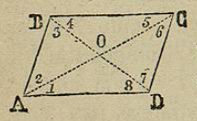
Trazando la diagonal BD queda dividido en dos triángulos, cuyos ángulos componen los del cuadrilátero propuesto; pero los ángulos de cada triángulo valen juntos dos rectos (71), luego los del cuadrilátero valdrán cuatro.

79. TEOREMA 2.º *En todo paralelógramo* ABCD (fig. 81): 1.º *los lados opuestos* AD *y* BC, AB *y* CD *son iguales;* 2.º *dos lados opuestos* AD *y* BC *ó* AB *y* DC *son iguales y paralelos;* 3.º *los ángulos opuestos* A *y* C, B *y* D *son tambien iguales;* 4.º *las diagonales se dividen mútuamente en dos partes* AO *y* OC, BO *y* OD *iguales entre sí.*

1.º AD=BC y AB=DC por partes de paralelas comprendidas entre paralelas (32).

2.º AD=BC ó AB=DC por el caso anterior, y son paralelas por la definicion del paralelógramo (77).

Fig. 81.



3.º A=C y B=D, porque estos ángulos tienen sus lados paralelos y dirigidos en sentido opuesto (33, 1.º).

4.º Los triángulos AOB y COD tienen AB=CD, por la primera parte del teorema: el ángulo en 2 igual al en 6, por alternos entre las paralelas AB y CD cortadas por la trasversal AC (31, rec. 1.º): el 3 es igual al 7 por la misma razon; luego dichos triángulos son iguales (72, 3.º), luego (73, observacion 1.ª)

$$AO = OC \quad y \quad OB = OD.$$

RECÍPROCAMENTE. *Todo cuadrilátero* ABCD *será paralelógramo:* 1.º *si los lados opuestos* AB *y* DC, AD *y* BC *son iguales;* 2.º *si dos lados* AD *y* BC, *ó* AB *y* DC *son iguales y paralelos;* 3.º *si los ángulos opuestos* A *y* C, B *y* D *son iguales;* 4.º *si las dos diagonales se dividen mútuamente en dos partes iguales* AO=OC *y* BO=OD.

1.º Trácese una de las diagonales AC, y los triángulos ABC y ACD tienen AC comun, AB=DC y AD=BC por hipótesis; luego

011162