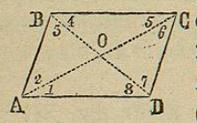
son iguales (**72**, 1.º); luego los ángulos 2 y 6 son iguales (**73**, obs. 1.ª); luego AB y CD son paralelas (**31**, 1.º). La igualdad de los mismos triángulos nos da las de los ángulos 1 y 5, y esta el paralelismo de AD y BC; luego los cuatro lados del cuadrilátero son paralelos dos á dos, luego es un paralelógramo.

2.º Si AB y CD son iguales y paralelos, trazando la diagonal AC, los triángulos ABC y ACD tienen AC comun, AB=CD por hipótesis, y el ángulo 2 igual al 6 por alternos entre las paralelas AB y CD, luego dichos triángulos son iguales (**72**, 2.º); luego los ángulos 1 y 5 son tambien iguales (**73**, obs. 1.ª), luego AD y BC son tambien paralelas (**31**, 1.º); luego el cuadrilátero será un paralelógramo.

Fig. 81.



3.º Si los ángulos A=C y B=D, como (**78**)

$$A+B+C+D=4R,$$

se tendrá $2A+2B=4R$ y $2A+2D=4R$; de donde

$$A+B=2R \quad \text{y} \quad A+D=2R.$$

La primera de estas últimas igualdades demuestra (**31**, 1.º) que AD y BC son paralelas, y la segunda que AB y CD lo son tambien; luego el cuadrilátero es un paralelógramo.

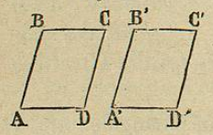
4.º Siendo AO=OC y BO=OD: como el ángulo AOB es igual á COD por opuestos por el vértice, los triángulos AOB y COD son iguales (**72**, 2.º); luego los ángulos 2 y 6 son tambien iguales (**73**, obs. 1.ª), luego AB y CD son paralelas (**31**, 1.º).

La igualdad de los triángulos BOC y AOD, que se demuestra como la anterior, nos da tambien la igualdad de los ángulos 1 y 5, y esta el paralelismo de AD y BC; luego el cuadrilátero es un paralelógramo.

Corol. 1.º *La diagonal de un paralelógramo le divide en dos triángulos iguales.*

Porque tienen un lado comun y los otros dos respectivamente iguales.

Fig. 82.



Corol. 2.º *Dos paralelógramos* ABCD A'B'C'D' (fig. 82) *son iguales si tienen un ángulo igual* A=A' *formado por dos lados respectivamente iguales* AB=A'B' *y* AD=A'D'.

Porque superponiendo el segundo de estos paralelógramos al

primero, de modo que A'D' coincida con su igual AD, A'B' caerá sobre AB, por ser A=A' por hipótesis, y el punto B' coincidirá con B por ser tambien A'B'=AB: B'C' caerá sobre BC por la igualdad de los ángulos B' y B, como suplementos de los iguales A' y A: y el punto C' coincidirá con C, una vez que B'C'=BC, como iguales respectivamente (teor. direc.) con A'D' y AD, iguales entre sí por hipótesis; luego los vértices de los dos paralelógramos se confunden, luego los paralelógramos son iguales.

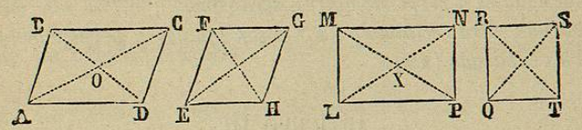
80. Los paralelógramos se dividen en ROMBOIDES, *que son los que tienen los lados que forman un ángulo desiguales, y desiguales tambien los ángulos contiguos á un lado*, como ABCD (fig. 83); ROMBOS, *que tienen iguales los lados que forman un ángulo* (y por consiguiente todos sus lados iguales entre sí) *y los ángulos contiguos á un lado desiguales*, como EFGH; RECTÁNGULOS, *que tienen los lados que forman un ángulo desiguales y los ángulos contiguos á un lado iguales* (y por consiguiente todos rectos) como LMNP; CUADRADOS, *que tienen los lados que forman un ángulo iguales é iguales tambien los ángulos contiguos á un lado* (y por consiguiente todos sus lados y todos sus ángulos iguales entre sí) como QRST.

Corol. *El cuadrado es un polígono regular.*

81. Teorema 4.º 1.º *Las diagonales del romboide son desiguales y oblícuas entre sí*; 2.º *las del rombo desiguales y perpendiculares*; 3.º *las del rectángulo iguales y oblícuas*; 4.º *las del cuadrado iguales y perpendiculares.*

1.º Sea el romboide ABCD; los triángulos ABD y ADC tienen AD comun, AB=CD (**79**, 1.º), y el ángulo comprendido BAD<ADC por la definicion, luego BD<AC (**76**); luego las diagonales son desiguales.

Fig. 83.



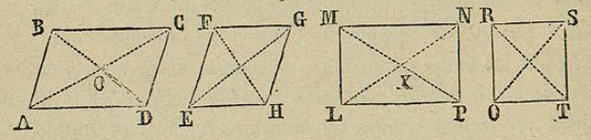
Los triángulos BOC y COD tienen OC comun, BO=OD (**79**, 4.º) y BC>CD por la definicion del romboide, luego el ángu-

lo BOC>COD (**76**, rec.); luego las diagonales son oblícuas.

2.º En el rombo EFGH, los triángulos FEH y EHG tienen EH comun, EF=GH por la definicion, y el ángulo E<H; luego EG>FH (**76**), luego las diagonales son desiguales.

Por la definicion del rombo se tiene tambien EF=EH y FG=GH; luego EG es perpendicular á FH (**26**, corol. 2.º).

Fig. 83.



3.º En el rectángulo LMNP resultan los triángulos MLP y LPN iguales, por tener dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido, de donde LN=MP; luego las diagonales son iguales.

Los triángulos MXN y NXP tienen XN comun, MX=XP, (**79**, 4.º) y MN>NP por la definicion del rectángulo, luego el ángulo MXN>NXP (**76**, rec.); luego las diagonales LN y MP son oblícuas.

4.º En el cuadrado QRST resultan iguales los triángulos RQT y QTS, por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido; luego RT=QS; luego las diagonales son iguales.

Por la definicion del cuadrado resulta tambien QR=QT y RS=ST; luego QS es perpendicular á RT (**26**, corol. 2.º).

Recíprocamente. *Si las diagonales de un paralelógramo, 1.º son desiguales y oblícuas, el paralelógramo será romboide; 2.º si son desiguales y perpendiculares, será rombo; 3.º si son iguales y oblícuas, será rectángulo; 4.º si son iguales y perpendiculares, será un cuadrado* (**12**).

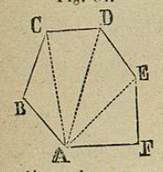
ARTÍCULO III.

De los polígonos en general.

82. Teorema 1.º *La suma de los ángulos de un polígono equivale á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono ménos dos.*

Sea el polígono ABCDEF (fig. 84). Si desde uno de sus vértices A se trazan diagonales á los demas, quedará el polígono dividido en tantos triángulos como lados tiene ménos dos; porque los triángulos extremos ABC y AEF tiene cada uno por lados dos del polígono, y los restantes cada uno tiene un solo lado del mismo polígono: los ángulos de los triángulos componen los del polígono: pero los de cada triángulo valen dos rectos (**71**); luego los del polígono equivaldrán á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono ménos dos.

Fig. 84.



OBSERVACIONES.

1.ª Llamando S. *i.* la suma de los ángulos (internos) del polígono; y *n* el número de lados ó de ángulos, el teorema precedente quedará traducido en la siguiente fórmula:

$$S.\ i.=2R(n-2) \quad ó \quad S.\ i.=2nR-4R.$$

2.ª Como los ángulos de un polígono regular son iguales entre sí, para hallar el valor de uno de estos ángulos no hay mas que dividir el segundo miembro de cualquiera de las fórmulas anteriores por *n*, número de ángulos ó lados. Así

Angulo interno de polígono regular $=\frac{2R(n-2)}{n}$; de donde

Angulo de triángulo equilátero $=\frac{2R}{3}=\frac{2}{3}R=\frac{2}{3}\times 90^\circ=60^\circ$.

Angulo de cuadrado . . . . . $=\frac{4R}{4}=R=$ . . . . . 90°.

Angulo de pentágono regular $=\frac{6R}{5}=\frac{6}{5}R=$. . . . . 108°.

Angulo de exágono regular . . $=\frac{8R}{6}=\frac{4}{3}R=$. . . . . 120°.

Angulo de eptágono regular. . $=\frac{10R}{7}=\frac{10}{7}R=$. . . 128°,57...

. . . . . .

Angulo de decágono regular. . . $=\frac{16R}{10}=\frac{8}{5}R=$. . . . . 144°.

Etc.

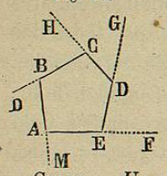
83. Teorema 2.º *La suma de los ángulos* DEF+CDG+etc. (fig. 85), *formados por los lados del polígono y la prolongacion*

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

de los mismos en igual sentido, llamados ángulos EXTERNOS, *es igual á cuatro ángulos rectos.*

Cada ángulo interno AED con su adyacente externo DEF valen juntos dos rectos; luego la suma de los ángulos internos y externos será

Fig. 85.



$$S.\ i+S.\ e.=2n\mathrm{R}:$$

pero $S.\ i=2n\mathrm{R}-4\mathrm{R}$ (**82**, obs. 1.ª); luego restando estas igualdades resulta

$$S.\ e.=2n\mathrm{R}-(2n\mathrm{R}-4\mathrm{R})=4\mathrm{R}.$$

COROL. *Un polígono no puede tener más de tres ángulos agudos.* Porque si tuviese cuatro ó mas, la suma de los ángulos externos valdria mas de cuatro rectos.

OBSERVACION. Como los ángulos externos de los polígonos regulares son iguales por suplementos de ángulos iguales, se tendrá

Angulo externo de triángulo equilátero $=\frac{4}{3}\mathrm{R}=120°$

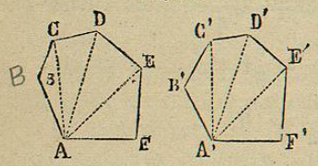
Angulo externo de cuadrado . . . . . $=\mathrm{R}=90°$.

Angulo externo de pentágono regular $=\frac{4}{5}\mathrm{R}=72°$.

Etc.

84. TEOREMA 3.º *Si dos polígonos* ABCDEF y A'B'C'D'E'F' (fig. 86) *tienen sus lados* AB=A'B' BC=B'C', etc., *y sus ángulos* A=A', B=B', etc., *respectivamente iguales é igualmente dispuestos, son iguales.*

Fig. 86.



Superponiendo el primer polígono al segundo, de modo que AB coincida con su igual A'B', BC caerá sobre B'C', por ser los ángulos en By B' iguales, y el punto C coincidirá con C', por ser tambien BC=B'C'. Del mismo modo se demuestra que todos los vértices coinciden : luego los polígonos son iguales.

85. TEOREMA 4.º *Si dos polígonos* ABCDEF *y* A'B'C'D'E'F' *se componen del mismo número de triángulos* ABC *y* A'B'C', ACD A'C'D', etc., *respectivamente iguales é igualmente dispuestos, los polígonos son iguales.*

La igualdad de los triángulos ABC y A'B'C' nos da AB=A'B', BC=B'C'; la de los triángulos ACD y A'C'D' nos da tambien

CD=C'D'; y como lo mismo se deduce respecto de los demas lados, resulta que los polígonos tienen sus lados respectivamente iguales é igualmente dispuestos.

De la igualdad de los mismos triángulos ABC y A'B'C', se deduce igualmente que el ángulo

$$B=B'$$

y tambien $BCA=B'C'A'$:

de los triángulos ACD y A'C'D' nos da del mismo modo

$$\text{ángulo } ACD=A'C'D'.$$

Sumando estas dos últimas igualdades, resulta

$$BCA+ACD=B'C'A'+A'C'D' \text{ ó } C=C'.$$

Como lo mismo se demuestra de los demas ángulos, se deduce que son respectivamente iguales en los polígonos dados.

Luego dichos polígonos tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales é igualmente dispuestos, luego son iguales (**84**).

RECÍPROCAMENTE. *Si dos polígonos* ABCDEF *y* A'B'C'D'E'F' *son iguales, se pueden descomponer en el mismo número de triángulos iguales é igualmente dispuestos.*

Trazando desde A y A' diagonales á los otros vértices, resulta que los triángulos ABC y A'B'C' tienen AB=A'B' y BC=B'C' por lados de polígonos iguales, y el ángulo B=B' por la misma razon; luego dichos triángulos son iguales (**72**, 2.º).

La igualdad de estos triángulos nos da AC=A'C' y el ángulo

$$ACB=A'C'B' :$$

y como los ángulos igualmente dispuestos del polígono son iguales, se tiene tambien C=C'; restando de esta igualdad la anterior, resulta $ACD=A'C'D'$.

Por otra parte CD=C'D' por la igualdad de los polígonos.

Luego los triángulos ACD y A'C'D' son iguales (**72**, 2.º).

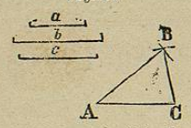
Del mismo modo se demuestra la igualdad de los demas triángulos; luego el teorema recíproco es verdadero.

PROBLEMAS GRÁFICOS.

86. 1.º **Dados los tres lados *a, b, c,* construir un triángulo.**

Tómese una recta AC=b (fig. 87), y haciendo centro en los extremos A y C con rádios respectivamente iguales á c y a, se trazan dos arcos que se cortarán en B : uniendo este punto con A y con C, se tendrá el triángulo ABC, que es el pedido.

Fig. 87.



En efecto, AC=b, AB=c y BC=a.

OBSERVACIONES.

1.ª Para que este problema sea posible, es preciso que los arcos se corten, lo que sucederá siempre que $b<a+c$ y $b>a-c$ (**48**, rec. 3.º), cuyas condiciones se hallan incluidas en la siguiente :

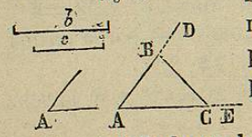
Siempre que la mayor de las rectas dadas sea menor que la suma de las otras dos, el problema es posible.

2.ª Si se tratase de construir un triángulo isósceles, bastaria conocer los dos lados desiguales : y si equilátero, su lado.

87. 2.º **Dados dos lados b y c, y el ángulo comprendido A, construir el triángulo.**

Fórmese un ángulo DAE (fig. 88) igual al dado A (**60**) : sobre sus lados tómense las partes AC y AB respectivamente iguales á b y c; únanse los puntos B y C, y el triángulo ABC será el pedido. Porque

Fig. 88



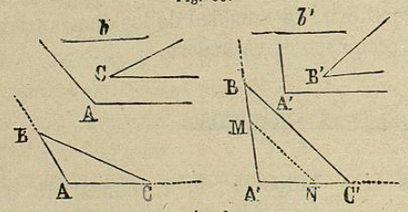
AC=b, AB=c y BAC=A.

88. 3.º **Dado un lado y dos ángulos, construir el triángulo.**

Distinguirémos dos casos : 1.º que los ángulos dados sean contiguos al lado conocido ; 2.º que uno sea contiguo y otro opuesto.

1.º Sea el lado b, y A y C (fig. 89) los ángulos contiguos. Tómese en una recta cualquiera una parte AC=b : fórmense en los extremos A y C de ésta ángulos respectivamente iguales á los dados A y C (**60**), y el triángulo ABC será el pedido.

Fig. 89.



2.º Si fuese el lado b' y los ángulos A' y B', de los que el primero es contiguo y el segundo opuesto á dicho lado b', se formaria un ángulo B'A'C' igual al dado A' : por un punto cualquiera M de la A'B' se trazaria la recta MN que formase el ángulo A'MN=B' : tomando A'C'=b', y trazando la B'C' paralela á MN, resultaria el triángulo A'B'C' pedido.

En efecto, en el primer caso se tiene

AC=b, BAC=A, ACB=C.

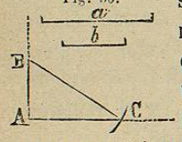
En el segundo A'C'=b', B'A'C'=A'. Por otra parte, A'B'C'=A'MN (**31**, rec. 1.º) : pero A'MN=B' por construccion ; luego tambien A'B'C'=B'.

Observacion. Para que este problema sea posible es necesario que los ángulos dados valgan juntos ménos que dos rectos : de lo contrario las rectas AB y CB en el primer caso, y las MN y A'C' en el segundo serían paralelas ó se encontrarian en la parte inferior de AC las primeras y á la izquierda de A' las segundas (**31**).

89. 4.º **Dada la hipotenusa a y un cateto b construir un triángulo rectángulo.**

Fórmese un ángulo A (fig. 90) recto : sobre uno de sus lados se toma AB=b : haciendo centro en B, con un rádio igual á la hipotenusa a, se traza un arco que cortará el otro lado en un punto C (**75**, corolario 3.º, y **44**, obs.), y uniendo este con B el triángulo ABC será el pedido.

Fig. 90.



Porque el ángulo en A es recto, AB=b, BC=a.

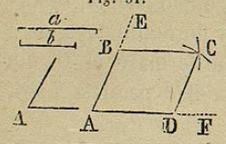
90. 5.º **Formar un triángulo igual á otro dado.**

Con los tres lados del triángulo dado, con dos lados y el ángulo comprendido, con un lado y dos ángulos igualmente dispuestos, ó con la hipotenusa y un cateto (si fuese rectángulo) se construye un nuevo triángulo (**86**, **87**, **88**, **89**), el cual será igual al propuesto (**72** ó **73**).

91. 6.º **Dados los lados a, b, y el ángulo comprendido A, construir un paralelógramo.**

Fórmese un ángulo EAF=A (fig. 91); tómese AB=b y AD=a : haciendo centro en B con el rádio AD se traza un arco, y haciendo centro en D con el rádio AB se traza otro arco, que cortará el anterior (**70** y **48**, rec. 3.º) en un punto C : se une este punto con B y con D, y ABCD será un paralelógramo (**79**, rec. 1,º), que tiene las circunstancias pedidas.

Fig. 91.



Porque BAD=A, AB=b, AD=a.

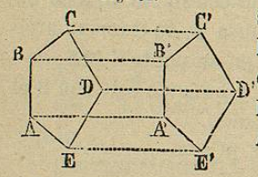
Observacion. Un rombo se construye dado el lado y un ángulo : un rectángulo conociendo los lados desiguales ; y un cuadrado si se da su lado.

92. 7.º **Construir un polígono igual á otro dado** ABCDEF (fig. 86).

Se divide este polígono dado en triángulos por medio de diagonales trazadas desde el vértice A : se forman los triángulos A'B'C', A'C'D', etc. respectivamente iguales á los ABC, ACD, etc., y que tengan entre sí la misma colocacion que estos; y el polígono A'B'C'D'E'F', formado por los lados exteriores de dichos triángulos, será el pedido (**85**).

Otra construccion. Sea el polígono ABCDE (fig. 92) : trácense por todos sus vértices paralelas entre sí : tómense sobre estas las partes iguales AA'='BB'=CC'=DD'=EE' : únase el punto A' con B', B' con C', C' con D', D' con E' y E' con A', y el polígono A'B'C'D'E' será igual al dado.

Fig. 92.



Porque las figuras ABA'B', BCB'C', etcétera, son paralelógramos (**79**, rec. 2.º); luego AB=A'B', BC=B'C', etc. (**79**, 1.º); y los ángulos ABC=A'B'C', BCD=B'C'D', etc. (**33**, 1.º). Luego el polígono propuesto y el que acaba de formarse tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales é igualmente dispuestos ; luego son iguales (*).

(*) Tambien podria resolverse este problema fundándose en el teorema del número **84** ; pero la construccion estaria mas sujeta á error en la práctica, y conviene siempre elegir entre los diferentes medios, que en cada caso pueden emplearse, aquel en que ménos se multiplican los errores, debidos á los instrumentos de que tenemos que valernos.

SECCION SEGUNDA.

DE LA EXTENSION DE LAS FIGURAS PLANAS.

CAPÍTULO I.

Figuras semejantes.

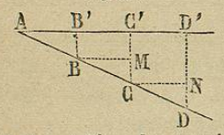
ARTÍCULO PRIMERO.

De las líneas proporcionales.

93. Teorema 1.º *Si sobre el lado* AD *de un ángulo* DAD' (fig. 93) *se toman partes iguales* AB=BC=CD, *y por los puntos de division se trazan paralelas* BB', CC', DD', *hasta encontrar el otro lado* AD', *las partes de este* AB', B'C', C'D', *interceptadas entre las paralelas, serán tambien iguales entre sí.*

Trazando por los puntos B, C, las rectas BM, CN, paralelas á la AD', los triángulos AB'B, BMC, CND tienen AB=BC=CD por hipótesis, los ángulos BAB', CBM, DCN iguales por correspondientes, y los ABB', BCM, CDN iguales tambien por la misma razon; luego dichos triángulos son iguales (**72**, 3.º), luego (**73**, obs.)

Fig. 93.



AB'=BM=CN :

pero BM=B'C' y CN=CD, por lados opuestos de paralelógramos ; luego

AB'=B'C'=C'D'.

94. Teorema 2.º *Si una recta* DE (fig. 94) *es paralela á un lado* AC *de un triángulo* ABC *divide los otros dos lados* AB *y* BC *en partes proporcionales.*