La semejanza de los triángulos COD y C'OD', DOE y D'OE' nos daria la proporcionalidad de las partes restantes con las anteriores, luego el teorema es verdadero.

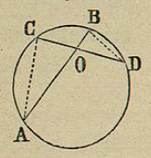
Corol. *Si las partes de una de las paralelas son iguales entre sí, las de la otra lo serán tambien.*

Porque siendo iguales los antecedentes ó consecuentes de estas proporciones, los consecuentes ó antecedentes lo son tambien.

104. *Se dice que dos rectas están divididas en partes* recíprocamente proporcionales, *cuando las partes de la una, ó toda la recta y una parte suya, forman los extremos de una proporcion, y las partes de la otra, ó toda la recta y una parte suya, forman los medios* [V. Alg. **191** (*)].

105. Teorema 2.º *Si dos cuerdas* AB *y* CD (fig. 103) *se cortan, quedan divididas en partes recíprocamente proporcionales.*

Fig. 103.

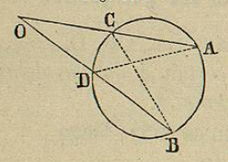


Uniendo A con C, y B con D, los triángulos AOC y BOD tienen los ángulos A=D y C=B (**54**, corol. 1.º); luego son semejantes (**98**, corolario), luego

$$\frac{AO}{OD}=\frac{OC}{OB}.$$

106. Teorema 3.º *Si desde un punto* O (fig. 104) *fuera de un círculo se trazan dos secantes* OA *y* OB *que terminen en la parte cóncava de la curva, los segmentos externos* OC *y* OD *son recíprocamente proporcionales con las secantes enteras.*

Fig. 104.



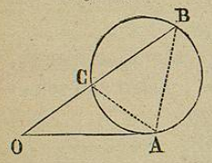
Uniendo A con D, y C con B, los triángulos AOD y BOC tienen el ángulo en O comun y A=B (**54**, corol. 1.º); luego son semejantes (**98**, corolario), luego

$$\frac{AO}{OB}=\frac{OD}{OC}.$$

107. Teorema 4.º *Si desde un punto* O *fuera de un círculo* (fig. 105) *se traza una tangente* OA, *que termine en el punto* A *de contacto, y una secante* OB, *que termine en la parte cóncava de la curva, la tangente es media proporcional entre toda la secante y el segmento externo* OC.

Uniendo B con A, y A con C, los triángulos OAB y OAC tienen el ángulo en O comun, y OAC=B: porque el primero tiene por medida la mitad del arco AC (**55**), y el segundo tiene tambien por medida la mitad del mismo arco (**54**); luego los triángulos son semejantes (**98**, corol.); luego

Fig. 105.



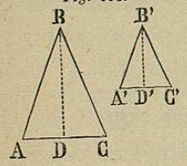
$$\frac{OB}{OA}=\frac{OA}{OC}.$$

108. Teorema 5.º *Dos triángulos semejantes* ABC *y* A'B'C' (fig. 106) *tienen las bases homólogas* AC *y* A'C' *proporcionales con las alturas* BD *y* B'D'.

Por hipótesis se tiene

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

Fig. 106.



los triángulos ABD y A'B'D' tienen los ángulos A = A' por hipótesis, y ADB = A'D'B' por rectos; luego son semejantes (**98**, corolario), luego

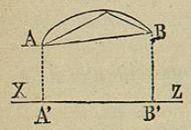
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BD}{B'D'}.$$

de cuyas proporciones se deduce (Alg. **183**)

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{BD}{B'D'}.$$

109. *Se llama* proyeccion *de una línea cualquiera* AB (figura 107) *sobre una recta* XZ *la parte* A'B' *de ésta comprendida entre las perpendiculares* AA' *y* BB', *bajadas desde los extremos* A *y* B *de la primera.*

Fig. 107.



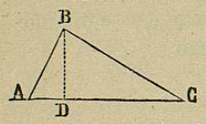
Observacion. La proyeccion de la hipotenusa sobre un cateto es este mismo cateto. Así en el triángulo rectángulo ABD (fig. 108) la proyeccion de la hipotenusa AB sobre el cateto AD es este cateto.

110. Teorema 6.º *Si desde el vértice* B (fig. 108) *del ángulo recto de un triángulo rectángulo* ABC *se baja una perpendicular* BD *sobre la hipotenusa* AC: 1.º *un cateto* AB *es medio proporcional entre la hipotenusa* AC *y su proyeccion* AD *sobre la hipote-*

nusa ; 2.º la perpendicular BD *es tambien media proporcional entre los segmentos* AD *y* DC *de la hipotenusa, ó sea entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.*

1.º Los triángulos ABC y ABD tienen el ángulo A comun, y ABC = ADB por rectos ; luego son semejantes (98, corol.), luego

Fig. 108.



$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}.$$

Del mismo modo se demuestra la semejanza de los triángulos ABC y DBC, y de ella se deduce

$$\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{DC}.$$

2.º Siendo ABC semejante con ABD, y ABC semejante tambien con DBC, segun acaba de verse, los triángulos ABD y DBC son semejantes entre sí ; luego

$$\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{DC}.$$

Corolario 1.º De las proporciones del primer caso

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD} \quad y \quad \frac{AC}{BC}=\frac{BC}{DC},$$

se deducen (Alg. 177) las igualdades

$$(AB)^2=(AC)\times(AD) \quad y \quad (BC)^2=(AC)\times(DC) \ (*).$$

Luego *el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por su proyeccion sobre aquella* (**).

Corol. 2.º Formando una proporcion con las dos igualdades del corolario anterior, se tiene

$$\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{AC\times AD}{AC\times DC}=\frac{AD}{DC}.$$

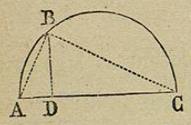
Luego *los cuadrados de los catetos son proporcionales á sus proyecciones sobre la hipotenusa.*

(*) Siempre que en lo sucesivo haya que indicar una operacion con el conjunto de letras que representa una línea, se hará como si todas ellas fuesen un solo signo. Así por $(AB)^2$ escribirémos AB^2 y por $(AC)\times(AD)$ se escribirá $AC\times AD$.

(**) Se entiende por cuadrado de una línea el *cuadrado de su valor numérico, referido á una unidad longitudinal cualquiera ;* y por producto de dos líneas el *producto de sus valores numéricos, referidos á una misma unidad, aunque arbitraria.*

Observacion. Como el ángulo inscripto cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro es recto (54, corol. 2.º), resulta que todo punto B (fig. 109) de la circunferencia se puede considerar como el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC, cuyos catetos AB y BC son las cuerdas que de dicho punto van á los extremos del diámetro, y cuya hipotenusa AC es el diámetro mismo ; luego las proporciones anteriores, sustituyendo *punto de la circunferencia* por vértice, *cuerda* por cateto, y *diámetro* por hipotenusa, se convierten en los teoremas siguientes :

Fig. 109.



Si desde un punto de la circunferencia se baja una perpendicular al diámetro, y por dicho punto y los extremos del diámetro se trazan cuerdas :

1.º *Cada cuerda es média proporcional entre el diámetro y su proyeccion sobre éste ;* 2.º *la perpendicular es média proporcional entre los segmentos del diámetro, ó sea entre las proyecciones de las cuerdas sobre el diámetro ;* 3.º *el cuadrado de una cuerda es igual al producto del diámetro por su proyeccion sobre éste ;* 4.º *los cuadrados de las cuerdas son proporcionales á sus proyecciones sobre el diámetro.*

111. Teorema 7.º 1.º *En el triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos* (*) ; 2.º *en el obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, más el duplo del producto de uno de estos por la proyeccion del otro sobre él ;* 3.º *en un triángulo cualquiera, el cuadrado del lado opuesto á un ángulo agudo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, ménos el duplo del producto de uno de estos por la proyeccion del otro sobre él.*

1.º Segun el corolario 1.º del teorema anterior se tiene (figura 110)

$$AB^2=AC\times AD, \quad BC^2=AC\times DC,$$

(*) Esta primera parte del teorema, que es sin duda una de las verdades mas interesantes de la Geometría, se llama *teorema de Pitágoras,* del nombre del célebre filósofo que le descubrió.

y sumando estas igualdades resulta

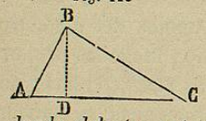
$$AB^2+BC^2=AC\times AD+AC\times DC=AC\times(AD+DC)=AC\times AC=AC^2,$$

ó bien $$AC^2=AB^2+BC^2.$$

Corol. De la igualdad que precede se deducen las siguientes

$$AB^2=AC^2-BC^2,$$

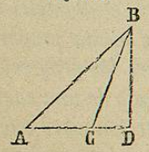
Fig. 110



$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2},\quad AB=\sqrt{AC^2-BC^2}.$$

Luego *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa ménos el cuadrado del otro cateto : la hipotenusa es igual á la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos : un cateto cualquiera es igual á la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.*

Fig. 111.



2.º Sea el triángulo ABC (fig. 111) y AB el lado opuesto al ángulo obtuso : bajando la perpendicular BD sobre AC prolongada, se tendrá en el triángulo ABD, segun la primera parte del teorema,

$$AB^2=AD^2+BD^2 : \text{ pero}$$

$$AD^2=(AC+CD)^2=AC^2+2AC\times CD+CD^2$$

(Alg. **40**, 1.º), y $BD^2=BC^2-CD^2$ (corol. ant.); luego sustituyendo estos valores en la igualdad primera, resultará

$$AB^2=AC^2+2AC\times CD+CD^2+BC^2-CD^2=AC^2+2AC\times CD+BC^2,$$

ó bien $$AB^2=AC^2+BC^2+2AC\times CD.$$

3.º Sea el triángulo ABC (fig. 110), y AB el lado opuesto á un ángulo agudo : bajando la perpendicular BD, en el triángulo rectángulo ABD, se tiene

$$AB^2=AD^2+BD^2 :$$

pero $AD^2=(AC-DC)^2=AC^2-2AC\times DC+DC^2$ (Alg. **41**, 1.º), y en el triángulo DBC, $BD^2=BC^2-DC^2$ (corol. ant.); luego sustituyendo los valores de AD^2 y BD^2, que acabamos de determinar, en la igualdad primera, resultará

$$AB^2=AC^2-2AC\times DC+DC^2+BC^2-CD^2=AC^2-2AC\times DC+BC^2,$$

ó bien $$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times DC.$$

Recíprocamente. 1.º *Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo*

opuesto al primero será recto; 2.º si es mayor, el ángulo opuesto será obtuso; 3.º si es menor, agudo (**12**).

112. Teorema 8.º *Los perímetros de los polígonos semejantes son proporcionales á sus lados homólogos.*

Llamando a, b, c, etc. los lados de uno de los polígonos, y a', b', c', etc., los del otro, se tendrá (**96**)

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\text{etc.}:$$

de donde (Alg. **186**)

$$\frac{a+b+c+\text{etc.}}{a'+b'+c'+\text{etc.}}=\frac{a}{a'},$$

ó expresando por p y p' dichos perímetros

$$\frac{p}{p'}=\frac{a}{a'}.$$

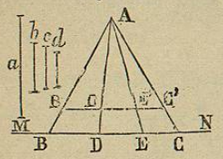
PROBLEMAS.

Problemas gráficos.

113. 1.º **Dividir una recta a en partes proporcionales á otras rectas dadas b, c, d.**

Sobre una recta indefinida MN (fig. 112) tómense las partes $BD=b$, $DE=c$, $EC=d$: fórmese sobre BC el triángulo equilátero BAC (**86**, observacion 2.ª) : sobre AB y AC tómese $AB'=a$ y $AC'=a$: trácense las rectas B'C', AD, AE, y B'D', D'E', E'C' serán las partes de a proporcionales á b, c, d.

Fig. 112.



En efecto, siendo AB=AC y AB'=AC', la línea B'C' divide los lados del triángulo ABC en partes proporcionales, luego es paralela á BC (**94**, rec.); luego los triángulos BAC y B'AC' son semejantes (**97**) : pero BAC es equilátero, luego $B'C'=B'A=a$.

La recta B'C' está dividida en partes B'D', D'E', E'C', proporcionales á BD, DE, EC (**103**) y por consiguiente á b, c, d; luego tambien están determinadas las partes de su igual a proporcionales á b, c, d.

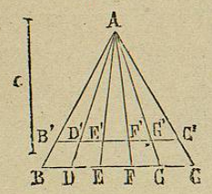
Observacion. Si los puntos B' y C' cayesen en la parte inferior

de B y C, la demostracion sería la misma, tanto en este problema como en el siguiente.

114. 2.º **Dividir una recta *a* en un número cualquiera de partes iguales, por ejemplo, en cinco.**

Este problema se resuelve como el anterior, segun aparece en la fig. 113, sin mas diferencia que la de tomar la parte BD arbitraria, y las DE, EF, FG y GC iguales con BD. La demostracion tambien es la misma que la precedente, fundándose la igualdad de las partes en que queda dividida la recta B'C', y por consiguiente la dada *a*, en el corolario del núm. **103**.

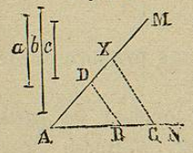
Fig. 113.



115. 3.º **Hallar una cuarta proporcional á tres rectas, *a*, *b*, *c*.**

Fórmese un ángulo cualquiera MAN (figura 114 : sobre el lado AN tómese AB=*a* y AC=*b*, y sobre AM tómese tambien AD=*c*, únase el punto B con el D ó sean los extremos de los antecedentes *a* y *c* de la proporcion : por C, extremo del consecuente *b*, trácese la recta CX paralela á BD, y la AX será la cuarta proporcional pedida.

Fig. 114.

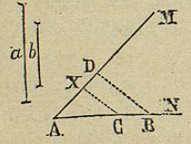


Porque (**97**)

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AX}, \qquad \text{ó bien} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{AX}.$$

116. 4.º **Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas *a* y *b*.**

Fig. 115.



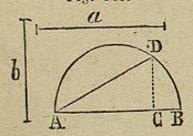
Se resuelve como el anterior, tomando AC y AD (fig. 115) iguales á *b*, como aparece en la figura.

117. 5.º **Hallar una média proporcional entre dos rectas dadas *a* y *b*.**

Sobre la recta AB (fig. 116) igual á la mayor *a* de las da-

das, trácese una semicircunferencia : tómese AC=*b* : levántese la perpendicular CD, y la cuerda AD será la media proporcional pedida (*).

Fig. 116.



Porque (**110**, obs.)

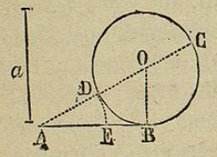
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AC} \quad \text{ó} \quad \frac{a}{AD}=\frac{AD}{b}.$$

118. *Se dice que una recta está dividida en* MEDIA Y EXTREMA RAZON, *cuando está dividida en dos partes tales que la mayor es media proporcional entre la menor y la línea entera.*

119. 6.º **Dividir una recta *a* en media y extrema razon.**

Tómese una recta AB = *a* (fig. 117) : en el extremo B levántese una perpendicular $BO=\frac{1}{2}a$: desde O con el rádio OB trácese una circunferencia : por A y O se traza la secante AC, y la parte AD exterior de la secante, aplicada sobre AB, divide á ésta en E, en media y extrema razon.

Fig. 117.



En efecto AB es tangente y AC secante de la circunferencia O; luego se tendrá (**107**)

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}; \text{ de donde (Alg. 184) } \frac{AC-AB}{AB}=\frac{AB-AD}{AD}:$$

y como AB=2 BO=DC y AD=AE, esta proporcion se convierte en

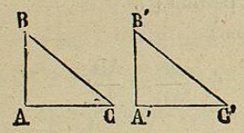
$$\frac{AE}{AB}=\frac{EB}{AE} \text{ ó (Alg. 182, 2.ª) } \frac{AB}{AE}=\frac{AE}{EB}.$$

120. 7.º **Dado un triángulo ABC (fig. 118), construir sobre una recta dada A'C', considerada como lado homólogo de AC, otro triángulo semejante al primero.**

(*) Es inútil repetir que, entre los diferentes medios que pueden emplearse en la resolucion de este problema y precedentes, hemos elegido los que nos parecen mas sencillos y exactos en la práctica.

Fórmense en los extremos de la recta A'C' los ángulos A' = A y C' = C, y A'B'C' será el triángulo pedido (**98**, corol.): ó fórmese A' = A y tómese A'B' igual á una cuarta proporcional á las rectas AC, A'C' y AB (**115**), y el triángulo A'B'C' será el buscado (**98**, 2.º); ó tambien hállese una cuarta proporcional á AC, A'C' y AB, otra á AC, A'C' y BC; con estas cuartas proporcionales y con la recta dada A'C' fórmese el triángulo A'B'C' (**86**), el cual será el pedido (**98**, 1.º).

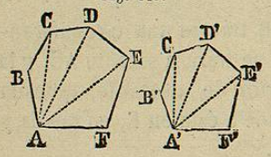
Fig. 118.



121. 8.º **Dado un polígono** ABCDEF (fig. 119), **construir sobre una recta dada** A'B', **considerada como lado homólogo de** AB, **otro polígono semejante al primero.**

Divídase el polígono dado en triángulos por medio de las diagonales AC, AD, etc.: constrúyase sobre A'B', considerada como lado homólogo de AB, un triángulo A'B'C' semejante al ABC (**120**): sobre A'C', considerada como lado homólogo de AC, constrúyase otro A'C'D' semejante á ACD: y así sucesivamente. El polígono A'B'C'D'E'F' será el pedido (**101**).

Fig. 119.



Problemas numéricos.

122. 1.º **Dados los valores numéricos de dos lados de un triángulo rectángulo, determinar el tercer lado.**

Distinguirémos dos casos: 1.º que el lado desconocido sea la hipotenusa; 2.º que sea un cateto.

1.º Supongamos que un cateto tiene 40 metros y el otro 32; llamando a la hipotenusa se tendrá (**111**, corol.)

$$a = \sqrt{40^2 + 32^2} = \sqrt{2624} = 51{,}22\ldots \text{ metros.}$$

2.º Supongamos que un cateto tiene 6 metros y 10 la hipotenusa, llamando b el otro cateto, será (**111**, corol.)

$$b = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ metros.}$$

123. 2.º **Dados los valores numéricos de los lados de un triángulo, determinar la especie de sus ángulos.**

Se eleva al cuadrado el valor numérico del mayor, y si este cuadrado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, el triángulo será rectángulo, si mayor obtusángulo, y si menor acutángulo (**111**, rec.).

Así, si los lados son 3, 4, 5, como $5^2 = 25$ y $3^2 + 4^2 = 25$, se tendrá $5^2 = 3^2 + 4^2$;
luego el triángulo es rectángulo (*).

Si los lados son 10, 12, 20, como $20^2 = 400$ y $10^2 + 12^2 = 244$, resulta

$$20^2 > 10^2 + 12^2;$$

luego el triángulo es obtusángulo.

Por último, si los lados fuesen 8, 9, 11, como $11^2 = 121$, y $8^2 + 9^2 = 145$, se tendria

$$11^2 < 8^2 + 9^2;$$

luego el ángulo opuesto al mayor lado sería agudo, y siendo los demas menores (**75**, 2.º), el triángulo sería acutángulo.

CAPÍTULO II.

Polígonos regulares inscriptos y circunscriptos y razon de la circunferencia al diámetro.

ARTÍCULO PRIMERO.

Inscripcion y circunscripcion de polígonos.

124. *Se dice que una circunferencia está* CIRCUNSCRIPTA *á un polígono, ó que un polígono está inscripto en una circunferencia, cuando ésta pasa por todos los vértices del polígono.*

(*) Si con una cuerda ó cadena dividida en piés, por ejemplo, se quisiese formar un triángulo rectángulo, bastaria tomar por lados 3, 4, 5 divisiones ó 6, 8, 10, y el ángulo opuesto al lado 5 en el primer caso y al 10 en el segundo sería recto; porque $5^2 = 3^2 + 4^2$ y $10^2 = 8^2 + 6^2$.