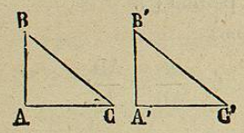
Fórmense en los extremos de la recta A'C' los ángulos A' = A y C' = C, y A'B'C' será el triángulo pedido (**98**, corol.): ó fórmese A' = A y tómese A'B' igual á una cuarta proporcional á las rectas AC, A'C' y AB (**115**), y el triángulo A'B'C' será el buscado (**98**, 2.º); ó tambien hállese una cuarta proporcional á AC, A'C' y AB, otra á AC, A'C' y BC; con estas cuartas proporcionales y con la recta dada A'C' fórmese el triángulo A'B'C' (**86**), el cual será el pedido (**98**, 1.º).

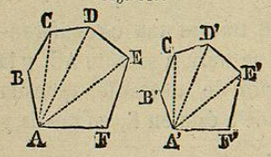
Fig. 118.



121. 8.º **Dado un polígono** ABCDEF (fig. 119), **construir sobre una recta dada** A'B', **considerada como lado homólogo de** AB, **otro polígono semejante al primero.**

Divídase el polígono dado en triángulos por medio de las diagonales AC, AD, etc.: constrúyase sobre A'B', considerada como lado homólogo de AB, un triángulo A'B'C' semejante al ABC (**120**): sobre A'C', considerada como lado homólogo de AC, constrúyase otro A'C'D' semejante á ACD: y así sucesivamente. El polígono A'B'C'D'E'F' será el pedido (**101**).

Fig. 119.



Problemas numéricos.

122. 1.º **Dados los valores numéricos de dos lados de un triángulo rectángulo, determinar el tercer lado.**

Distinguirémos dos casos: 1.º que el lado desconocido sea la hipotenusa; 2.º que sea un cateto.

1.º Supongamos que un cateto tiene 40 metros y el otro 32; llamando a la hipotenusa se tendrá (**111**, corol.)

$$a = \sqrt{40^2 + 32^2} = \sqrt{2624} = 51{,}22\ldots \text{ metros.}$$

2.º Supongamos que un cateto tiene 6 metros y 10 la hipotenusa, llamando b el otro cateto, será (**111**, corol.)

$$b = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ metros.}$$

123. 2.º **Dados los valores numéricos de los lados de un triángulo, determinar la especie de sus ángulos.**

Se eleva al cuadrado el valor numérico del mayor, y si este cuadrado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, el triángulo será rectángulo, si mayor obtusángulo, y si menor acutángulo (**111**, rec.).

Así, si los lados son 3, 4, 5, como $5^2 = 25$ y $3^2 + 4^2 = 25$, se tendrá $5^2 = 3^2 + 4^2$;
luego el triángulo es rectángulo (*).

Si los lados son 10, 12, 20, como $20^2 = 400$ y $10^2 + 12^2 = 244$, resulta

$$20^2 > 10^2 + 12^2;$$

luego el triángulo es obtusángulo.

Por último, si los lados fuesen 8, 9, 11, como $11^2 = 121$, y $8^2 + 9^2 = 145$, se tendria

$$11^2 < 8^2 + 9^2;$$

luego el ángulo opuesto al mayor lado sería agudo, y siendo los demas menores (**75**, 2.º), el triángulo sería acutángulo.

CAPÍTULO II.

Polígonos regulares inscriptos y circunscriptos y razon de la circunferencia al diámetro.

ARTÍCULO PRIMERO.

Inscripcion y circunscripcion de polígonos.

124. *Se dice que una circunferencia está* CIRCUNSCRIPTA *á un polígono, ó que un polígono está inscripto en una circunferencia, cuando ésta pasa por todos los vértices del polígono.*

(*) Si con una cuerda ó cadena dividida en piés, por ejemplo, se quisiese formar un triángulo rectángulo, bastaria tomar por lados 3, 4, 5 divisiones ó 6, 8, 10, y el ángulo opuesto al lado 5 en el primer caso y al 10 en el segundo sería recto; porque $5^2 = 3^2 + 4^2$ y $10^2 = 8^2 + 6^2$.

Dícese que una circunferencia está INSCRIPTA *en un polígono ó que un polígono está* CIRCUNSCRIPTO *á una circunferencia, cuando son tangentes á ésta todos los lados del polígono.*

125. TEOREMA 1.º *A todo polígono regular* ABCDE (figura 120) : 1.º *se le puede circunscribir una circunferencia* ; 2.º *inscribir otra.*

1.º Trácese una circunferencia que pase por los vértices A, B y C (**64**) : desde el centro O de ésta bájese la perpendicular OM al lado BC, y únase el punto O con A y con D.

Fig. 120.

Doblando el cuadrilátero MODC sobre el MOAB, MC caerá sobre MB, por ser rectos los ángulos OMC y OMB, el punto C coincidirá con B una vez que MC = MB (**41**) : la recta CD caerá sobre BA, por ser iguales los ángulos en B y en C por hipótesis, y el punto D coincidirá con A, por ser tambien CD = BA ; luego los extremos de OD y OA coinciden, luego estas rectas son iguales ; luego la circunferencia que pasa por A, B y C pasará tambien por D. Lo mismo se demostraria que pasa por los vértices restantes ; luego dicha circunferencia está circunscripta al polígono.

2.º Los lados del polígono inscripto son cuerdas iguales de la circunferencia circunscripta ; luego equidistan del centro de ésta (**40**, 1.º) ; luego todas las perpendiculares trazadas desde O á los lados del polígono son iguales con OM (**24**, corol.) ; luego la circunferencia trazada desde O con el rádio OM pasará por los extremos de estas perpendiculares : luego todos los lados del polígono serán tangentes, y por lo tanto la nueva circunferencia estará inscripta en el polígono.

126. Llámase *centro* de un polígono regular el centro de la circunferencia circunscripta ó inscripta, *rádios* del polígono las rectas que van desde el centro á los vértices de sus ángulos ; y *apotemas* las perpendiculares trazadas desde el centro á los lados del polígono. Los rádios suelen tambien llamarse *rádios oblícuos*, para distinguirlos de las apotemas que se denominan *rádios rectos.*

COROL. 1.º *Los rádios de un polígono son iguales entre sí y las apotemas lo son tambien.*

COROL. 2.º *Los rádios de un polígono son bisectrices de sus ángulos.*

En efecto, los triángulos AOE, EOD (fig. 120) son iguales (**72**, 1.º) ; luego los ángulos AEO, OED son tambien iguales ; luego EO es bisectriz del ángulo en E. Lo mismo se demuestra de los demás.

COROL. 3.º *Los ángulos en el centro,* AOE, EOD, *etc., son iguales.*

Por la igualdad de los mismos triángulos AOE, EOD, etc.

OBSERVACIONES.

1.ª Para determinar el centro O de un polígono, se trazan las bisectrices AO y EO de dos de sus ángulos cualesquiera consecutivos A y E, ó las perpendiculares en los puntos medios de dos lados consecutivos.

2.ª Los ángulos en el centro O de un polígono regular valen juntos 4R (**19**, corol. 4.º) : y son iguales entre sí (corolario anterior) ; luego el valor del ángulo en el centro de un polígono regular estará representado por la fórmula

$$\frac{4R}{n}.$$

De donde

Angulo en el centro de triángulo equilát.º $= \frac{4R}{3} = \frac{4}{3}R = 120^0.$

Id. de cuadrado . . . . . $= \frac{4R}{4} = R = 90^0.$

Id. de pentágono regular . . . . . $= \frac{4R}{5} = \frac{4}{5}R = 72^0.$

Id. de exágono id. . . . . $= \frac{4R}{6} = \frac{2}{3}R = 60^0.$

Id. de eptágono id. . . . . $= \frac{4R}{7} = \frac{4}{7}R = 51^0,42\ldots$

. . . . . .

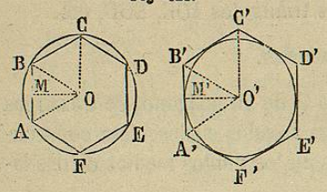
Id. de decágono id. . . . . $= \frac{4R}{10} = \frac{2}{5}R = 36^0.$

127. TEOREMA 2.º *Todo polígono :* 1.º *si es inscripto y equilátero es regular ;* 2.º *si es circunscripto y equiángulo es tambien regular.*

1.º Sea el polígono ABCDEF (fig. 121). Los ángulos ABC, BCD, etc., del polígono son inscriptos y comprenden entre sus lados arcos iguales (que en este caso cada uno es $\frac{2}{3}$ de la circunferencia), luego son iguales (**54**, corol. 1.º); luego el polígono es regular.

2.º Sea el polígono A'B'C'D'E'F'. Trazando por el centro O' de la circunferencia inscripta y por los vértices del polígono las líneas O'A', O'B' y O'C', dividirán los ángulos A'B'C' del polígono en dos partes iguales (**65**, corol.); luego los ángulos O'A'B', O'B'A', O'B'C', O'C'B' son iguales; luego los triángulos A'B'O' y B'C'O', que tienen el lado B'O' comun y dos ángulos respectivamente iguales é igualmente dispuestos, son iguales (**72**, corol.); luego A'B'=B'C'.

Fig. 121.



Del mismo modo se demostraria que B'C'=C'D', C'D'=D'E', etc.; luego el polígono dado es tambien equilátero, luego es regular.

128. Teorema 3.º *Los perímetros de los polígonos regulares* ABCD..., A'B'C'D'... (fig. 121), *de igual número de lados, son proporcionales á sus rádios* OA, O'A' *y á sus apotemas* OM, O'M'.

Los polígonos propuestos son semejantes (**102**); luego se tendrá

$$\frac{p}{p'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

Los ángulos A, B, C...., y A', B', C'..., de los polígonos regulares de igual número de lados, son todos iguales entre sí (**82**, obs. 2.ª); luego sus mitades tambien lo serán; luego los triángulos AOB y A'O'B' tienen los ángulos ABO=A'B'O' y BAO=B'A'O' por ser AO y BO, A'O' y B'O' bisectrices de los ángulos de los polígonos (**126**, corol. 2.º); luego son semejantes (**98**, corol.), luego se tendrá (**108**)

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AO}{A'O'}=\frac{MO}{M'O'}.$$

Esta proporcion y la anterior tienen una razon comun, luego (Alg. **230**)

$$\frac{p}{p'}=\frac{AO}{A'O'}=\frac{MO}{M'O'}$$

ó llamando r, r' los rádios, y a, a' las apotemas,

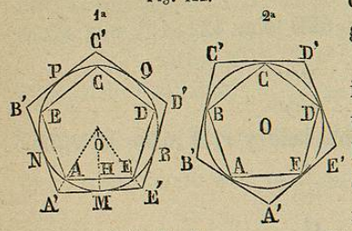
$$\frac{p}{p'}=\frac{r}{r'}=\frac{a}{a'}.$$

PROBLEMAS.

129. 1.º **Inscribir en una circunferencia un polígono regular de cualquier número de lados, por ejemplo, 5.**

Divídase la circunferencia en cinco partes iguales (*), AB, BC, etc. (fig. 122, 1.ª y 2.ª): trácense las cuerdas correspondientes á estos arcos, y el polígono ABCDE será el pedido.

Fig. 122.



Los arcos AB, BC, ..., son iguales, luego las cuerdas tambien lo serán (**39**, 1.º); luego el polígono es equilátero ó inscripto, luego es regular (**127**, 1.º).

130. 2.º **Dado un polígono regular inscripto: 1.º circunscribir á la misma circunferencia otro del mismo número de lados; 2.º hallar el valor del lado de este último en valores del lado del primero y del rádio.**

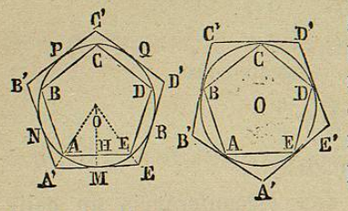
1.º Sea el polígono dado ABCDE; por los puntos M, N, P, etc., medios de los arcos subtendidos por sus lados (fig. 122, 1.ª) ó por los vértices A, B, C, etc., del polígono (fig. 122, 2.ª) trácense tangentes, y el polígono A'B'C'D'E', formado en una ú otra figura, será el pedido.

Porque en uno y otro caso los ángulos A', B', C', etc. del

(*) De dos maneras puede hacerse esta division: 1.ª por tanteo; 2.ª calculando el ángulo en el centro del polígono que trata de formarse (**126**, observacion 2.ª), que en este caso sería 72º; construyendo con el semicírculo un ángulo AOB de este número de grados, y el arco AB, que interceptan sus lados, será la quinta parte de la circunferencia. Por mas que este método parezca expedito y exacto, no lo es sin embargo; en la práctica es preferible el primero.

nuevo polígono tienen por medida mitades de arcos iguales, luego son iguales; luego el polígono A'B'C'D'E' es equiángulo y está circunscripto, luego es regular (**127**, 2.º), teniendo ademas evidentemente igual número de lados que el propuesto.

Fig. 122.



OBSERVACION 1.ª En el caso de ser los lados paralelos, como en la figura primera, la recta A'O divide el arco convexo MAN en dos partes iguales (**65**, corolario); luego pasa por el punto A, medio de este arco.

Luego *los vértices correspondientes*, como A y A', *y el centro, están en línea recta.*

2.º Los triángulos A'E'O y AEO (fig. 122, 1.ª) son semejantes (**97**); luego (**108**)

$$\frac{A'E'}{AE}=\frac{MO}{HO},$$

ó llamando l el lado del polígono dado y r el rádio del círculo

$$\frac{A'E'}{l}=\frac{r}{HO};$$

de donde $$A'E'=\frac{rl}{HO}; \qquad [1].$$

En el triángulo rectángulo AHO se tiene (**111**, corol.)

$$HO=\sqrt{AO^2-AH^2}=\sqrt{r^2-\left(\tfrac{1}{2}l\right)^2}=\sqrt{r^2-\tfrac{1}{4}l^2}=\sqrt{\frac{4r^2-l^2}{4}}=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-l^2} \qquad [2].$$

Sustituyendo este valor de HO en la ecuacion [1], resulta

$$A'E'=\frac{rl}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-l^2}}=\frac{2rl}{\sqrt{4r^2-l^2}} \quad ó \quad A'E'=\frac{2rl}{\sqrt{4r^2-l^2}}.$$

OBSERVACION 2.ª Traducida la fórmula [2] al lenguaje comun, nos dice que: *la apotema de un polígono regular es igual á la mitad de la raíz cuadrada del cuádruplo del rádio cuadrado ménos el cuadrado del lado.*

131. 3.º **Dado un polígono ABCDE (fig. 123) regular inscripto: 1.º inscribir otro de duplo número de lados; 2.º hallar**

el valor del lado de este último en valores del lado del primero y del rádio.

1.º Divídanse los arcos AB, BC, etc., subtendidos por los lados del polígono dado en dos partes iguales (**61**); trácense las cuerdas de estos nuevos arcos, y el polígono AMBNC....., formado por ellas, será el pedido.

Fig. 123.

Porque es regular (**127**, 1.º), y evidentemente de duplo número de lados que el propuesto.

2.º Trácense los rádios AO, MO y BO: MO pasa por el punto medio del arco AMB; luego será perpendicular á la cuerda AB y la dividirá en dos partes iguales (**41**, obs.); luego el triángulo BHO es rectángulo en H; luego el ángulo BOM es agudo (**71**, corolario 3.º), luego en el triángulo BOM se tendrá (**111**, 3.º)

$$BM^2=BO^2+MO^2-2MO\times HO=2BO^2-2MO\times HO,$$

ó llamando r el rádio,

$BM^2=2r^2-2r\times HO$: pero (**130**, [2]) $HO=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-l^2}$;

luego sustituyendo este valor de HO en la ecuacion anterior, resulta

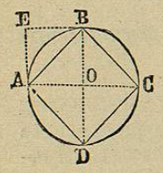
$$BM^2=2r^2-2r\times\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-l^2}=2r^2-r\sqrt{4r^2-l^2}=r\left(2r-\sqrt{4r^2-l^2}\right);$$

de donde $$MB=\sqrt{r\left(2r-\sqrt{4r^2-l^2}\right)}.$$

132. 4.º **Dada una circunferencia: 1º. inscribir en ella un cuadrado; 2.º hallar el lado de éste en valores del rádio.**

1.º Se trazan dos diámetros AC y BD (fig. 124) perpendiculares entre sí, los que dividirán la circunferencia en cuatro partes iguales (**41**, corol.): se unen los extremos de estos arcos por medio de cuerdas, y el polígono ABCD que estas forman, será el cuadrado pedido (**129**).

Fig. 124.



2.º El triángulo ABO, rectángulo en O, nos da (**111**, 1.º)

$$AB^2=AO^2+BO^2=2AO^2,$$

de donde $AB=\sqrt{2AO^2}=AO\sqrt{2}$, ó llamando r el rádio

$$AB=r\sqrt{2}.$$

OBSERVACIONES.

1.ª De esta última ecuacion se deduce

$$\frac{AB}{r}=\sqrt{2}.$$

Luego *la razon del lado del cuadrado inscripto en una circunferencia al rádio es inconmensurable.*

2.ª Como el lado AB es á su vez la diagonal de un cuadrado AEBO, cuyo lado es el rádio, se infiere tambien que : *la diagonal de un cuadrado y su lado son inconmensurables.*

3.ª Si en la ecuacion anterior se supone $r=1$, resulta

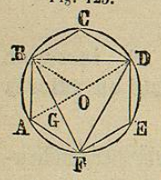
$$AB=\sqrt{2}.$$

Luego construyendo un cuadrado cuyo lado sea la unidad, su diagonal representa exactamente á $\sqrt{2}$; luego la Geometría proporciona medios para determinar el valor exacto de cantidades irracionales (*).

133. 5.º **Dada una circunferencia, inscribir en ella un exágono regular.**

Supongamos el problema resuelto, y que AB (fig. 125) sea el lado del exágono inscripto. Trazando los rádios AO y BO, el ángulo AOB=60º (**126**, observacion 2.ª); luego los ángulos A y B del mismo triángulo ABO valdrán 120º (**71**, corol. 1.º). Mas siendo AO=BO, los ángulos en A y en B serán iguales; luego cada uno de ellos valdrá 60º; luego el triángulo ABO es equiángulo, luego será equilátero (**75**, corol. 2.º); luego

Fig. 125.



$$AB=AO;$$

luego *el lado del exágono es igual al rádio de la circunferencia circunscripta.*

(*) Esta exactitud es puramente ideal; porque los medios que se emplean para resolver gráficamente los problemas no dan sino resultados mas ó ménos aproximados á la exactitud, que jamas se consigue de esta manera.

Luego para inscribir en una circunferencia el exágono regular, se coloca el rádio sobre la curva seis veces : se unen los extremos de cada arco, y el polígono ABCD..... será el exágono pedido.

Corol. *Uniendo de dos en dos, dejando uno intermedio, por medio de rectas,* BD, DF, FB, *los vértices del exágono regular, se tendrá el triángulo equilátero* BDF *inscripto.*

OBSERVACIONES.

1.ª Si se quiere hallar tambien el lado del triángulo equilátero inscripto en valores del rádio, trazando el diámetro AD, el triángulo AFD rectángulo en F (**54**, corol. 2.º) nos daria (**111**, corol.)

$$DF=\sqrt{AD^2-AF^2}=\sqrt{(2AO)^2-AF^2}=\sqrt{4AO^2-AO^2}=\sqrt{3AO^2}=AO\sqrt{3}$$

ó llamando r el rádio, $DF=r\sqrt{3}$.

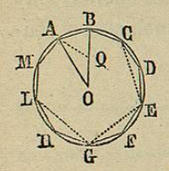
De esta ecuacion se pueden sacar consecuencias análogas á las deducidas en las observaciones 1.ª y 3.ª del número anterior.

2.ª La recta BF tiene los puntos B y F equidistantes de A y O : luego es perpendicular á la AO en su punto medio G (**26**, corolario 2.º); luego AG=GO : mas GO es la apotema del triángulo equilátero inscripto; luego *la apotema del triángulo equilátero inscripto es igual á la mitad del rádio.*

134. 6.º **Dada una circunferencia, inscribir en ella un decágono regular.**

Supongamos que AB (fig. 126) sea el lado del decágono inscripto. Trazando los rádios AO y BO, el ángulo AOB=36º (**126**, obs. 2.ª); luego los ángulos en A y en B valdrán 144º (**71**, corolario 1.º). Mas como AO=BO, los ángulos en A y en B del mismo triángulo ABO serán iguales, luego cada uno de ellos valdrá 72º.

Fig. 126.



Trácese la bisectriz del ángulo OAB, y sus mitades QAB y QAO valdrán 36º. Luego el triángulo OAQ tiene los ángulos AOQ=QAO ; luego (**75**, rec. 1.º)

$$AQ=OQ$$