El triángulo ABQ es tambien isósceles; porque siendo

Fig. 126.

QAB=36°, y B=72°, será AQB=72° (**71**, corol. 1.°); luego

$$AQ=AB.$$

Esta igualdad de lados y la anterior nos dan

$$AB=OQ.$$

Siendo AQ bisectriz del ángulo en A, se tendrá (**95**)

$$\frac{AO}{AB}=\frac{OQ}{QB}:$$

pero $AO=OB$ y $AB=OQ$; luego

$$\frac{OB}{OQ}=\frac{OQ}{QB} \quad ú \quad \frac{OB}{AB}=\frac{AB}{QB}.$$

Luego *el lado del decágono regular inscripto es igual á la parte mayor del rádio dividido en media y extrema razon* (**118**).

Luego para inscribir en una circunferencia el decágono regular se coloca la parte mayor del rádio, dividido en media y extrema razon (**119**), sobre la curva diez veces, una á continuacion de otra: se unen los extremos de cada arco, y el polígono ABCD.... será el decágono pedido (*).

Corol. 1.° Uniendo de dos en dos, dejando uno intermedio, los vértices C, E, G, L...., se tendrá inscripto el pentágono regular CEGL.....

Corol. 2.° Para inscribir el pentedecágono regular se toma la cuerda del arco, diferencia entre el subtendido por el lado del exágono y el del decágono, y esta diferencia se coloca quince veces, una á continuacion de otra, sobre la circunferencia, la cual quedará dividida en quince partes iguales: se trazan las cuerdas correspondientes á estos arcos, y el polígono que forman será el pentedecágono regular.

(*) Esta construccion, si bien exacta en teoría, es bastante errónea en la práctica; porque el error que necesariamente se comete en la division del radio en media y extrema razon, se multiplica por 10 al hacer aplicacion de ella. Es preferible en este caso y en los que de él dependen, dividir la circunferencia por tanteo en las partes iguales que se desee.

En efecto, el lado del exágono subtiende un arco $\frac{1}{6}$ de circunferencia: el del decágono $\frac{1}{10}$ de id.: la diferencia entre estos arcos es

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{10}{60}-\frac{6}{60}=\frac{4}{60}=\frac{1}{15} \text{ de circunferencia;}$$

luego este arco, colocado quince veces sobre la circunferencia, la divide en quince partes iguales, cuyas cuerdas formarán el pentedecágono regular (**127**, 1.°).

OBSERVACION GENERAL

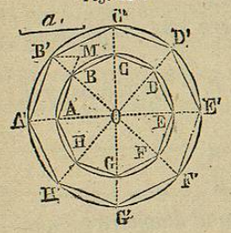
135. Se saben inscribir geométricamente, entre otros polígonos regulares, los siguientes: el *triángulo* (**133**, corol.), el *cuadrado* (**132**), el *pentágono* (**134**, corol. 1.°) y el *pentedecágono* (**134**, corol. 2.°). Mas como inscripto un polígono regular, se circunscribe otro del mismo número de lados (**130**, 1.°), y se inscribe otro de número de lados duplo (**131**, 1.°), resulta que se pueden inscribir y circunscribir geométricamente los polígonos regulares, cuyo número de lados expresan los diferentes términos de las siguientes progresiones:

$$\begin{array}{l} \div\!\!\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : \ldots\ldots\ldots\ldots : 3\times 2^n \\ \div\!\!\div\ 4 : 8 : 16 : 32 : \ldots\ldots\ldots\ldots : 4\times 2^n \\ \div\!\!\div\ 5 : 10 : 20 : 40 : \ldots\ldots\ldots\ldots : 5\times 2^n \\ \div\!\!\div\ 15 : 30 : 60 : 120 : \ldots\ldots\ldots\ldots : 15\times 2^n \end{array}$$

136. 7.° **Dado el lado** *a* (fig. 127) **de un polígono regular cualquiera, por ejemplo, de un octógono, construir el polígono.**

En una circunferencia, cuyo rádio sea una línea cualquiera OB, inscríbase un octógono ABCD.....: sobre uno de sus lados AB tómese AM=*a*: por M trácese una paralela MB' al rádio AO, hasta que corte en B' al OB', prolongado si es necesario: con un rádio igual á OB' trácese una nueva circunferencia: prolónguense los rádios OA, OC, OD, etc., si se necesita, hasta que encuentren la nueva circunferencia en los puntos A', B', C', etc.: únanse estos puntos por medio de cuerdas, y el polígono A'B'C'D'..... será el pedido.

Fig. 127.



Porque siendo OA=OB y OA'=OB', se tiene

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'};$$

luego AB es paralela á A'B' (**91**, rec.); y como MB' es tambien paralela á AA', por construccion, la figura AA'B'M es un paralelógramo; luego (**79**, 1.º)

$$A'B'=AM=a.$$

Siendo los ángulos en O iguales entre sí, los arcos A'B', B'C',C'D'... que miden estos ángulos, serán tambien iguales; luego A'B'C'D'.. es un octógono regular, cuyo lado es igual á la recta dada *a*.

ARTÍCULO II.

Razon de la circunferencia al diámetro.

137. Teorema 1.º *Todo círculo se puede considerar como un polígono regular de infinito número de lados, cuyo perímetro es la circunferencia, y cuyos rádios y apotemas son iguales.*

Inscribiendo en una circunferencia un polígono regular cualquiera, despues otro de duplo número de lados, luego otro, y así sucesivamente: los rádios de estos polígonos permanecen siempre iguales á los de la circunferencia: las apotemas se van aproximando al rádio, porque los lados del polígono son cada vez menores (**39**, 2.º y **40**, 2.º): y los perímetros de los polígonos se van confundiendo con la circunferencia, á medida que el número de lados se duplica; de manera que á las pocas inscripciones ya la vista no distingue la curva del último polígono inscripto. Como las inscripciones se pueden aun suponer continuadas cuanto se quiera, se infiere que el teorema es cierto.

Corol. 1º. *Dos circunferencias cualesquiera son proporcionales á sus rádios y á sus diámetros.*

Porque, siendo c, c' dos circunferencias, r, r' sus radios, y d, d' los diámetros, se tiene (**128**)

$$\frac{c}{c'}=\frac{r}{r'}=\frac{2r}{2r'} \quad ó \quad \frac{c}{c'}=\frac{r}{r'}=\frac{d}{d'}.$$

Corol. 2.º *La razon de la circunferencia al diámetro es una cantidad constante.*

En efecto, alternando la proporcion

$$\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'} \quad \text{resulta} \quad \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}.$$

Corol. 3.º Llamando π (*) la razon de la circunferencia al diámetro, se tendrá

$$\frac{c}{d}=\pi \quad ó \quad \frac{c}{2r}=\pi.$$

En cualquiera de estas dos ecuaciones entran tres cantidades indeterminadas, y por consiguiente conocidas dos de ellas se puede hallar el valor de la otra. Así

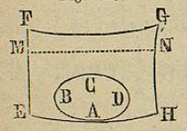
$$c=\pi d \quad ó \quad c=2\pi r,$$

$$d=\frac{c}{\pi} \quad y \quad r=\frac{c}{2\pi}.$$

138. Teorema 2.º *Toda línea convexa* (**) *cerrada, comprendida dentro de otra cualquiera, es menor que ésta.*

Sea ABCDA (fig. 128) la línea convexa. Si esta no es menor que todas las que la comprenden, habrá de ellas una menor que todas las demas, que será más corta que ABCDA ó igual con ella. Supongamos que la línea que comprende á la ABCDA con estas circunstancias sea AEFGH: trácese entre estas dos líneas una recta cualquiera MN, que no corte á la ABCDA, y se tendrá (**5**)

Fig. 128.



$$MN < MFGN,$$

agregando á los dos miembros la línea MEAHN, resulta

$$AEMNHA < AEFGHA:$$

mas por hipótesis AEFGHA es la línea menor de las que comprenden á la ABCDA; luego esta hipótesis es absurda; luego todas las líneas que comprenden á la convexa son mayores que ella, ó ABCDA es la menor de todas.

(*) Este signo es la *p* griega que se pronuncia *pi*.

(**) Cuando se da este nombre á una curva, sin relacion á otra línea ni punto, se significa con él que la curva no puede ser cortada por una recta mas que en dos puntos. Así, la circunferencia es una curva convexa

Corol. 1.º *La circunferencia es mayor que el perímetro de un polígono cualquiera inscripto y menor que el de otro cualquiera circunscripto.*

Corol. 2.º. *Los perímetros de los polígonos regulares inscriptos van creciendo á medida que el número de sus lados se duplica, y los de los circunscriptos van disminuyendo en igual caso.*

Observacion. De estos corolarios se infiere tambien [**51**, (*)] que

La circunferencia es el límite superior de los polígonos regulares inscriptos, y el inferior de los circunscriptos.

PROBLEMAS.

139. 1.º **Hallar la razon numérica de la circunferencia al diámetro, ó sea el valor de π.**

Siendo constante ó igual para todas las circunferencias la cantidad que vamos á determinar (**137**, corol. 2.º), si se calcula el valor de una circunferencia en el supuesto de que el diámetro es 1, se tendrá la razon pedida; puesto que la razon de una cantidad con la unidad es la cantidad misma.

Inscribiendo en una circunferencia, cuyo diámetro es 1, un exágono regular, el lado de este polígono valdrá $\frac{1}{2}$ (**133**); y el perímetro

$$\frac{1}{2}\times 6=3.$$

El lado del exágono circunscripto será tambien (**130**, 2.º)

$$\frac{2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3}=0{,}577\ldots,$$

y el perímetro $0{,}577\ldots\ldots\times 6=3{,}46\ldots.$

Ahora la circunferencia es mayor que el perímetro del polígono inscripto y menor que el del circunscripto (**138**, corol. 1.º); luego el valor numérico de la circunferencia será 3 y una fraccion decimal menor que 0,46.

Si del mismo modo calculamos el perímetro del polígono inscripto de 12 lados (**131**, 2.º), y el de igual número de lados circunscripto, el primero de estos valores será mayor que 3 y el 2.º menor que 3,46... (**138**, corol. 2.º), luego la circunferencia estará representada por 3 y la parte decimal que tengan comun los perímetros que acaban de determinarse.

Continuando de la misma manera el cálculo de los perímetros de los polígonos inscriptos y circunscriptos de 24, 48, 96, etc., lados, los valores de estos perímetros se irán aproximando mas y mas, y el valor de la circunferencia se podrá hallar tan aproximado como se quiera (*). Así se halló

$$\pi=3{,}14159\ldots$$

Observacion. La razon de la circunferencia al diámetro hallada por Arquímedes es $\frac{22}{7}$, por Pedro Mecio $\frac{355}{113}$ (**); por otros procedimientos ménos elementales que el que hemos empleado,

$$\pi=3{,}1415926535\ldots\ldots \text{ (hasta 155 cifras decimales).}$$

140. 2.º **Si un rádio tiene seis metros, ¿cuál será la longitud de la circunferencia?**

Se tendrá (**137**, corol. 3.º)

$$c=2\pi r=2\times 3{,}14159\times 6=37{,}69908 \text{ metros.}$$

Recíprocamente. **Si una circunferencia tiene 516 varas de longitud, ¿cuál será su rádio?**

El rádio será (**137**, corol. 3.º)

$$r=\frac{c}{2\pi}=\frac{516}{6{,}28318}=82{,}12 \text{ varas.}$$

141. 3.º **Si un arco tiene 20º y el rádio es 10 metros, ¿cuál será la longitud del arco?**

La de la circunferencia es (**137**, corol. 3.º)

$$c=2\times 3{,}14159\times 10=62{,}8318 \text{ metros,}$$

(*) Claro se ve que por este procedimiento no es posible llegar á un valor exacto que represente la razon de la circunferencia al diámetro. Mas aun, por cualquiera otro de los inventados ó por inventar se hallaría un resultado análogo, porque la razon de la circunferencia al diámetro, y aun el cuadrado de esta razon, es una cantidad inconmensurable. (V. *Legendre*, Geom., nota 4.ª),

(**) Este número se puede obtener escribiendo las tres primeras cifras impares cada una dos veces, y separando por medio el grupo que forman, de este modo

113 | 355.

y la del arco se halla por la siguiente proporcion

$$\frac{360^0}{20^0}=\frac{62,8318}{x};\text{ de donde } x=\frac{20\times 62,8318}{360}=3,4906 \text{ metros.}$$

142. 4.º **Conocido el rádio de un arco, hallar el número de grados que debe tener para que su longitud sea igual á la de una circunferencia de radio tambien dado.**

Llamando r el radio del arco y x el número de grados, la longitud del arco será $\frac{2\pi r\times x}{360}$; la de la circunferencia, cuyo rádio es r', será tambien $2\pi r'$: y como estas dos expresiones representan, por hipótesis, cantidades iguales, resulta

$$\frac{2\pi r\times x}{360}=2\pi r';$$

de donde (Alg. **72**) $x=360\times\frac{r'}{r}$.

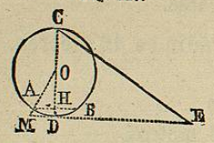
Así, el número de grados de un arco cuyo radio son 24 varas, é igual en longitud á una circunferencia cuyo rádio sean 10 varas, será

$$x=360^0\times\frac{10}{24}=150^0.$$

143. 5.º **Hallar gráficamente la longitud aproximada de una circunferencia (*).**

Trácese la cuerda AB (fig. 129), igual al rádio, y el diámetro CD perpendicular á esta cuerda: se traza por D la tangente ME, y el rádio OA, prolongándole hasta encontrarla en M: desde este punto hácia la derecha se toman tres rádios; se une el extremo E del último con el C del diámetro y la recta CE será la longitud de la semicircunferencia con ménos error que 0,0001 del rádio.

Fig. 129.



En efecto, en el triángulo CED, rectángulo en D, se tiene (**111**, corolario)

$$CE=\sqrt{CD^2+DE^2}=\sqrt{CD^2+(ME-MD)^2}=\sqrt{CD^2+ME^2-2ME\times MD+MD^2},$$

(*) Tambien es imposible la resolucion exacta de este problema empleando sólo la línea recta y la circunferencia.

ó poniendo en vez de CD su valor $2r$, y en lugar de ME el suyo $3r$,

$$CE=\sqrt{4r^2+9r^2-6r\times MD+MD^2}=\sqrt{13r^2-6r\times MD+MD^2}\quad[1].$$

Para hallar el valor de MD, de los triángulos semejantes OAH y OMD se deduce $\frac{MD}{AH}=\frac{OD}{OH}$; de donde $MD=\frac{AH\times OD}{OH}$,

ó sustituyendo $\frac{1}{2}r$ por AH, r por OD y $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-r^2}$ por OH (**130** [2])

$$MD=\frac{\frac{1}{2}r\times r}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-r^2}}=\frac{\frac{1}{2}r^2}{\frac{1}{2}\sqrt{3r^2}}=\frac{r^2}{r\sqrt{3}}=\frac{r}{\sqrt{3}}=\frac{r\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}r\sqrt{3}.$$

Sustituyendo este valor de MD en la ecuacion [1] resulta,

$$CE=\sqrt{13r^2-6r\times\tfrac{1}{3}r\sqrt{3}+\tfrac{1}{9}\times r^2\times 3}=\sqrt{r^2(13\tfrac{1}{3}-2\sqrt{3})}=$$

$$r\sqrt{13,33.....-3,46410161.....}=r\sqrt{9,86923171.....},$$

ó por último $CE=r\times 3,14153...$;

y como (**137**, corol. 3.º) $c=2r\times 3,14159$ *la línea* CE *representa el valor de la semicircunferencia con ménos error de* 0,0001 *del rádio.*

CAPÍTULO III.

De las areas de las figuras planas.

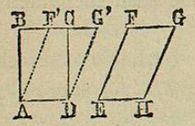
ARTÍCULO PRIMERO.

Determinacion de las áreas de las figuras planas.

144. *Se llaman superficies* EQUIVALENTES *las que tienen igual magnitud, aunque tengan distinta figura* (**3**).

145. TEOREMA 1.º *Dos paralelógramos* (fig. 130) AC *y* EG (*), *que tienen las bases* AD *y* EH *iguales é igual altura* (**77**), *son equivalentes.*

Fig. 130.



Superpóngase el paralelógramo EG al AC, de modo que EH coincida con su igual AD; y como las alturas son iguales, los lados BC y FG formarán la línea recta BG' (**32**, corolario).

(*) Estos paralelógramos los nombramos, para mayor concision, por las letras colocadas en los extremos de una diagonal: del mismo modo se expresará en lo sucesivo todo cuadrilátero, siempre que esto no dé lugar á equivocaciones.