y la del arco se halla por la siguiente proporcion

$$\frac{360^0}{20^0}=\frac{62,8318}{x};\text{ de donde } x=\frac{20\times 62,8318}{360}=3,4906 \text{ metros.}$$

142. 4.º **Conocido el rádio de un arco, hallar el número de grados que debe tener para que su longitud sea igual á la de una circunferencia de radio tambien dado.**

Llamando r el radio del arco y x el número de grados, la longitud del arco será $\frac{2\pi r\times x}{360}$; la de la circunferencia, cuyo rádio es r', será tambien $2\pi r'$: y como estas dos expresiones representan, por hipótesis, cantidades iguales, resulta

$$\frac{2\pi r\times x}{360}=2\pi r';$$

de donde (Alg. **72**) $x=360\times\frac{r'}{r}$.

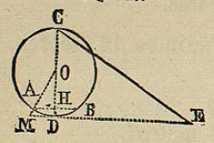
Así, el número de grados de un arco cuyo radio son 24 varas, é igual en longitud á una circunferencia cuyo rádio sean 10 varas, será

$$x=360^0\times\frac{10}{24}=150^0.$$

143. 5.º **Hallar gráficamente la longitud aproximada de una circunferencia (*).**

Trácese la cuerda AB (fig. 129), igual al rádio, y el diámetro CD perpendicular á esta cuerda: se traza por D la tangente ME, y el rádio OA, prolongándole hasta encontrarla en M: desde este punto hácia la derecha se toman tres rádios; se une el extremo E del último con el C del diámetro y la recta CE será la longitud de la semicircunferencia con ménos error que 0,0001 del rádio.

Fig. 129.



En efecto, en el triángulo CED, rectángulo en D, se tiene (**111**, corolario)

$$CE=\sqrt{CD^2+DE^2}=\sqrt{CD^2+(ME-MD)^2}=\sqrt{CD^2+ME^2-2ME\times MD+MD^2},$$

(*) Tambien es imposible la resolucion exacta de este problema empleando sólo la línea recta y la circunferencia.

ó poniendo en vez de CD su valor $2r$, y en lugar de ME el suyo $3r$,

$$CE=\sqrt{4r^2+9r^2-6r\times MD+MD^2}=\sqrt{13r^2-6r\times MD+MD^2}\quad[1].$$

Para hallar el valor de MD, de los triángulos semejantes OAH y OMD se deduce $\frac{MD}{AH}=\frac{OD}{OH}$; de donde $MD=\frac{AH\times OD}{OH}$,

ó sustituyendo $\frac{1}{2}r$ por AH, r por OD y $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-r^2}$ por OH (**130** [2])

$$MD=\frac{\frac{1}{2}r\times r}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-r^2}}=\frac{\frac{1}{2}r^2}{\frac{1}{2}\sqrt{3r^2}}=\frac{r^2}{r\sqrt{3}}=\frac{r}{\sqrt{3}}=\frac{r\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}r\sqrt{3}.$$

Sustituyendo este valor de MD en la ecuacion [1] resulta,

$$CE=\sqrt{13r^2-6r\times\tfrac{1}{3}r\sqrt{3}+\tfrac{1}{9}\times r^2\times 3}=\sqrt{r^2(13\tfrac{1}{3}-2\sqrt{3})}=$$

$$r\sqrt{13,33.....-3,46410161.....}=r\sqrt{9,86923171.....},$$

ó por último $CE=r\times 3,14153...$;

y como (**137**, corol. 3.º) $c=2r\times 3,14159$ *la línea* CE *representa el valor de la semicircunferencia con ménos error de* 0,0001 *del rádio.*

CAPÍTULO III.

De las areas de las figuras planas.

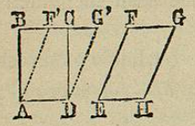
ARTÍCULO PRIMERO.

Determinacion de las áreas de las figuras planas.

144. *Se llaman superficies* EQUIVALENTES *las que tienen igual magnitud, aunque tengan distinta figura* (**3**).

145. TEOREMA 1.º *Dos paralelógramos* (fig. 130) AC *y* EG (*), *que tienen las bases* AD *y* EH *iguales é igual altura* (**77**), *son equivalentes.*

Fig. 130.

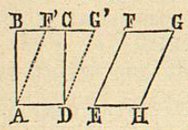


Superpóngase el paralelógramo EG al AC, de modo que EH coincida con su igual AD; y como las alturas son iguales, los lados BC y FG formarán la línea recta BG' (**32**, corolario).

(*) Estos paralelógramos los nombramos, para mayor concision, por las letras colocadas en los extremos de una diagonal: del mismo modo se expresará en lo sucesivo todo cuadrilátero, siempre que esto no dé lugar á equivocaciones.

Los triángulos ABF′ y CDG′ tienen los ángulos BAF′=CDG′ (**33**, 1.º), ademas AB=CD y AF′=DG (**79**, 1.º) luego son iguales (**72**, 2.º).

Fig. 130

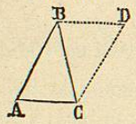


Si del trapecio ABG′D se resta el triángulo ABF′ queda el paralelógramo AF′G′D, que representa al EG: sí del mismo trapecio se resta el triángulo DCG′ queda el paralelógramo AC; luego los paralelógramos AC y EG son equivalentes.

146. Teorema 2.º *Todo triángulo* ABC (fig. 131) *es la mitad de un paralelógramo de igual base y altura.*

Si por los vértices B y C se trazan las rectas BD y CD respectivamente paralelas á AC y AB, la figura ABCD es un paralelógramo que tiene la misma base AC que el triángulo, y tambien la misma altura (**32**, corol.): pero los triángulos ABC y BCD son iguales (**79**, corol. 1.º); luego ABC es la mitad del paralelógramo AD, que tiene la misma base y altura.

Fig. 131.



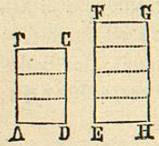
Corol. *Dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.* Porque son mitades de paralelógramos equivalentes (**145**).

147. *Se llama* Área *de una superficie la medida de su magnitud* (**2**).

En la determinacion de las áreas *tomarémos siempre por unidad un cuadrado cuyo lado sea la unidad de longitud.*

148. Teorema 3.º *Las áreas de dos rectángulos* AC y EG (fig. 132), *de iguales bases* AD y EH, *son proporcionales á sus alturas* AB y EF.

Fig. 132.



Distinguirémos dos casos: 1.º que las alturas sean conmensurables; 2.º que sean inconmensurables.

1.º Supongamos que la medida comun se pueda colocar 3 veces sobre AB, y 4 sobre EF, y se tendrá

$$\frac{AB}{EF}=\frac{3}{4}.$$

Por los puntos de division trácense paralelas á las bases, y los rectángulos AC y EG quedarán divididos, el primero en

3 rectángulos parciales y el segundo en 4, todos iguales entre sí (**79**, corol. 2.º); luego

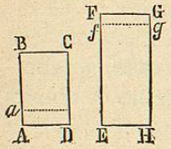
$$\frac{AC}{EG}=\frac{3}{4}.$$

De esta proporcion y de la anterior se deduce (Alg. **183**)

$$\frac{AC}{EG}=\frac{AB}{EF}.$$

2.º Sean AB y EF (fig. 133) inconmensurables. Supongamos que la AB se divida en partes iguales tan pequeñas como se quiera, y que una de estas partes sea A*a*: colóquese esta parte sobre EF todas las veces que se pueda, y quedará un resto F*f*, una vez que AB y EF son inconmensurables: trácese luego la *fg* paralela á EH.

Fig. 133.



Siendo las rectas AB y E*f* conmensurables, se tendrá (primera parte del teorema)

$$\frac{AC}{Eg}=\frac{AB}{Ef},$$

comparando estos quebrados con los siguientes

$$\frac{AC}{EG}=\frac{AB}{EF},$$

se observará que los segundos (que están en columna) tienen el numerador AB comun, y que el denominador E*f* se puede aproximar á EF todo lo que se quiera: porque F*f* es menor que A*a* y esta parte puede ser mas pequeña que una cantidad dada cualquiera; luego $\frac{AB}{EF}$ es el límite de $\frac{AB}{Ef}$ [**51**, (*)]: por igual razon $\frac{AC}{EG}$ es el límite de $\frac{AC}{Eg}$: pero las cantidades variables son iguales; luego los límites tambien lo serán [**51**, (*) corol.]; luego

$$\frac{AC}{EG}=\frac{AB}{EF}.$$

Observacion. Como en todo rectángulo se puede tomar la base por altura y la altura por base, resulta que

Las áreas de dos rectángulos de iguales alturas, son proporcionales á sus bases.

149. Teorema 4.º *Las áreas de dos rectángulos son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

Llámese R, *b*, *a*, el área, base y altura de un rectángulo,
R′ *b*′, *a*′, el área, base y altura de otro rectángulo,
R″, *b*, *a*′, el área, base y altura de un tercer rec-

tángulo, que, como se ve, tiene igual base que el primero é igual altura que el segundo.

El primero y tercer rectángulo tienen bases iguales, luego (**148**)

$$\frac{R}{R'}=\frac{a}{a'}.$$

El segundo y tercer rectángulo tienen iguales alturas, luego (**148**, obs.)

$$\frac{R''}{R'}=\frac{b}{b'}.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, y suprimiendo el factor R'', comun á los dos términos de la primera razon compuesta, resulta

$$\frac{R}{R'}=\frac{a\times b}{a'\times b'}.$$

Corol. 1.º Si suponemos que R' es la unidad de medida del rectángulo R, el primer quebrado representa el área de este rectángulo (**2**) : mas en tal caso $b'=a'=1$ (**147**); luego en dicha hipótesis se tiene

$$R=a\times b.$$

Luego *el área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

De modo que si un rectángulo tuviese por base 41 metros y por altura 22, llamando R su área, se tendria

$$R=41\times 22=902 \text{ metros cuadrados.}$$

Corol. 2.º *El área de un cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.*

Porque el cuadrado es un rectángulo en que la base y altura son iguales.

Así, el área de un cuadrado, cuyo lado son 6 varas y 2 piés, llamando C dicha área y reduciendo el complejo á incomplejo, resulta

$$C=20^2=400 \text{ piés cuadrados.}$$

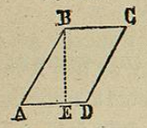
150. Teorema 5.º *El área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura.*

Porque el paralelógramo es equivalente á un rectángulo de igual base y altura (**145**) : el área del rectángulo es igual al producto de su base por su altura (**149**, corol. 1º); luego la

del paralelógramo será igual tambien, al producto de la base por la altura.

Así para hallar el área del paralelógramo AC (fig. 134), se mide su base AD, que supongamos tiene 6 metros : se traza su altura BE, que tambien se mide, y supóngase que tiene 8 metros : y llamando P el área buscada, se tendrá

Fig. 134.



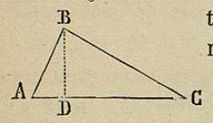
$$P=6\times 8=48 \text{ metros cuadrados.}$$

151. Teorema 6.º *El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

Porque el triángulo es la mitad de un paralelógramo de igual base y altura (**146**) : el área del paralelógramo es igual al producto de su base por su altura (**150**); luego la del triángulo será igual á la mitad del producto de la base por la altura.

De modo que para hallar el área del triángulo ABC (figura 135), se mide su base AC : se traza la altura BD, que se mide tambien, y suponiendo que la primera de estas líneas tenga 10 varas y la segunda 7, llamando T el área buscada, será

Fig. 135.

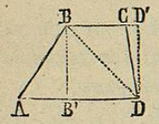


$$T=\frac{10\times 7}{2}=35 \text{ varas cuad.}$$

Corolario. *Las áreas de dos triángulos son proporcionales á los productos de las bases por las alturas : si las bases son iguales, serán proporcionales á las alturas ; y si las alturas son iguales, serán proporcionales á las bases.*

152. Teorema 7.º *El área de un trapecio* ABCD (fig. 136 *es igual al producto de su altura por la semisuma de las bases.*

Fig. 136.



Trazando la diagonal BD, el trapecio queda dividido en dos triángulos, cuyas bases pueden ser las AD y BC del trapecio, y cuyas alturas son en tal caso BB'=DD', que es la misma del trapecio.

El área de ABD es $\frac{1}{2}AD\times BB'$, la de BDC es $\frac{1}{2}BC\times DD'$; luego la del trapecio será

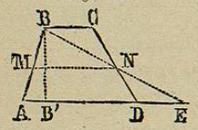
$$\frac{1}{2}AD\times BB'+\frac{1}{2}BC\times DD'=BB'\times\frac{1}{2}(AD+BC).$$

Así, el área del trapecio anterior, en el supuesto de que BB'=10 pulgadas, AD=13 y BC=5, sería

$$10\times\frac{1}{2}(13+5)=10\times9=90 \text{ pulgadas cuad.}$$

Observacion. Si se prolonga la base AD del trapecio ABCD (fig. 137) una parte DE=BC, y se une B con E, el triángulo ABE es equivalente al trapecio; porque tiene la misma altura que éste, y su base es la suma de las dos bases del mismo. Luego el área del trapecio es tambien

Fig. 137.



$$BB'\times\frac{1}{2}AE \quad [1].$$

Los triángulos BCN y NDE, que tienen BC=DE por hipótesis, y los ángulos BCN=NDE y NBC=DEN por alternos entre paralelas, son iguales (**72**, 3.º) : luego BN=NE; y tambien CN=ND.

Trazando por N la recta NM paralela á AE, se tendrá (**97**)

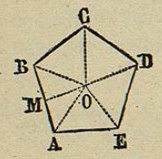
$$\frac{BN}{BE}=\frac{BM}{BA}=\frac{MN}{AE}:$$

pero $BN=\frac{1}{2}BE$; luego $BM=\frac{1}{2}BA$ y $MN=\frac{1}{2}AE$.

Sustituyendo este valor de $\frac{1}{2}AE$ en la fórmula [1], el área del trapecio será $BB'\times MN$.

Luego *el área del trapecio es tambien igual al producto de su altura por una recta trazada por los puntos medios de los lados no paralelos, ó sea por una paralela á las bases y equidistante de estas* (*)

Fig. 138.



153. Teorema 8.º *El área de un polígono regular* ABCDE (fig. 138) *es igual á la mitad del producto de la apotema por el perímetro.*

Trazando los radios AO, BO, CO, etc. del polígono, este queda dividido en tantos triángulos AOB, BOC, etc. iguales entre sí (**72**, 1.º)

(*) A esta línea MN se le suele dar el nombre de paralela media.

como lados tiene : el área de uno de los triángulos AOB es $\frac{1}{2}MO\times AB$ (**151**); luego la del polígono será $\frac{1}{2}MO\times AB\times5=\frac{1}{2}MO\times5AB$, ó llamando P el área del polígono, a la apotema y p el perímetro

$$P=\frac{1}{2}ap.$$

Así, para hallar el área de un exágono regular, cuyo lado tiene 4 metros, será $p=6\times4=24$ metros, y (**130**, obs. 2.ª)

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{4\times16-16}=3{,}46\ldots \text{ metros};$$

de donde $P=\frac{1}{2}\times3{,}46\times24=41{,}52$ metros... cuad.

154. *Llámase* sector poligonal *la parte* ABCO *de polígono regular comprendida por dos rádios y dos ó mas lados.*

La parte ABC *de perímetro correspondiente á un sector se llama base de este.*

Corol. *El área de un sector poligonal es igual á la mitad del producto de su apotema por la base.*

155. Teorema 9.º *El área del círculo es igual á la mitad del producto del rádio por la circunferencia.*

Porque el círculo se puede considerar como un polígono regular de infinito número de lados, cuyo perímetro es la circunferencia, y cuya apotema es el rádio (**137**); luego llamando c la circunferencia, r el rádio y C el área del círculo, se tendrá

$$C=\frac{1}{2}rc.$$

Corol. Sustituyendo en esta fórmula en vez de c su valor $2\pi r$ (**137**, corol. 2.º), se tendrá

$$C=\frac{1}{2}r\times2\pi r=\pi r^2 \text{ ó } C=\pi r^2.$$

Luego *el área del círculo es igual al producto de la razon de la circunferencia al diámetro por el cuadrado del rádio.*

Así, el área de un círculo cuyo radio sean 10 varas será

$$C=3{,}14159\times10^2=314{,}159 \text{ varas cuad.}$$