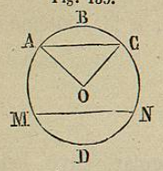
156. *Llámase* SECTOR *de círculo la parte* ABCO (fig. 139) *de éste comprendida entre dos rádios* OA, OC *y un arco* ABC.

COROLARIO. *El área de un sector de círculo es igual á la mitad del producto de su rádio por el arco.*

Fig. 139.



Porque se puede considerar tambien como un sector poligonal correspondiente á un polígono regular de infinito número de lados.

157. *Se llama* SEGMENTO *de círculo la parte de este comprendida entre una cuerda y su arco, ó entre dos cuerdas paralelas y los arcos que estas interceptan.*

La cuerda ó cuerdas que le forman se llaman *base* ó *bases* del segmento.

ABC y ADC son segmentos de una base AC : ACNM es un segmento de dos bases AC y MN.

COROL. El área de un segmento ABC de una base, y menor que el semicírculo, es igual á la del sector AOCB ménos la del triángulo AOC : la de un segmento ADC de una base tambien pero mayor que el semicírculo, es igual á la del sector ADCO mas la del triángulo AOC ; y la del segmento ACNM de dos bases es igual á la diferencia de las áreas de los segmentos MBN y ABC de una base.

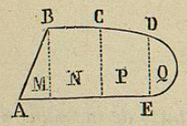
158. *Se llaman circunferencias* CONCÉNTRICAS *las que tienen el mismo centro.*

Llámase CORONA Ó ANILLO *la superficie comprendida entre dos circunferencias concéntricas de diferente rádio.*

COROL. *El área de una corona es igual á la del círculo de mayor rádio, ménos la del círculo de rádio menor.*

159. Para determinar el área de una figura plana cualquiera, no comprendida en lo que precede de este artículo, se divide exacta ó aproximadamente en otras, cuyas áreas se saben hallar : se suman estas, y la suma será exacta ó aproximadamente el área pedida.

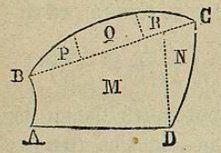
Fig. 140.



Así, para hallar el área de la figura ABCDE (fig. 140) se puede dividir en el triángulo M, el rectángulo N, el trapecio P y el semicírculo Q ; y las áreas de M+N+P+Q forman el área total pedida.

Si la figura no fuese rectilínea ni compuesta de arcos de círculo, como ABCD (fig. 141), se dividiria en otras que supondriamos rectilíneas, por ejemplo, el trapecio M, los triángulos P, R, N y el rectángulo Q ; y la suma de las áreas de estas sería aproximadamente el área de la figura propuesta.

Fig. 141.



ARTÍCULO II.

Comparacion de las áreas en las figuras planas.

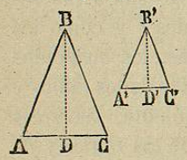
160. TEOREMA 1.º *Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

Las áreas de los triángulos ABC y A'B'C' (fig. 142) serán (**151**)

$$\frac{1}{2}AC\times BD,\ \frac{1}{2}A'C'\times B'D' : \text{ de donde } \frac{\frac{1}{2}AC\times BD}{\frac{1}{2}A'C'\times B'D'}=\frac{AC\times BD}{A'C'\times B'D'}.$$

Sustituyendo en la razon compuesta $\frac{AC\times BD}{A'C'\times B'D'}$, en vez de la razon componente $\frac{BD}{B'D'}$ su igual (**108**) $\frac{AC}{A'C'}$, resulta (Alg. **175**, corol.)

Fig. 142.



$$\frac{AC\times BD}{\frac{1}{2}A'C'\times B'D'}=\frac{AC^2}{A'C'^2}.$$

Los términos de la primera razon representan, como se ha dicho, las áreas de los triángulos dados, y la razon segunda es igual á $\frac{AB^2}{A'B'^2}$ y á $\frac{BC^2}{B'C'^2}$ (Alg., **182**, 4.ª);

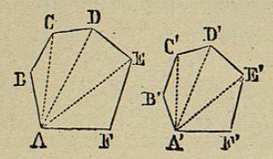
luego $$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}=\frac{AC^2}{A'C'^2}=\frac{BC^2}{B'C'^2}.$$

161. TEOREMA 2.º *Las áreas de dos polígonos semejantes cualesquiera* ABCD..... *y* A'B'C'D'..... (fig. 143) *son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

Estos polígonos se pueden descomponer en igual número de

triángulos ABC y A'B'C', ACD y A'C'D', etc., semejantes y semejantemente dispuestos(**101**,recíproco) ; luego se tendrá (**160**) :

Fig. 143.



$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{BC^2}{B'C'^2},\ \frac{ACD}{A'C'D'}=\frac{CD^2}{C'D'^2}\cdots.$$

Estas proporciones tienen las últimas razones iguales (**96**, y Algebra, **182**, 4.ª), luego

$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{ACD}{A'C'D'}=\text{etc.}=\frac{BC^2}{B'C'^2};$$

de donde (Alg., **186**)

$$\frac{ABC+ACD+\text{etc.}}{A'B'C'+A'C'D'+\text{etc.}}=\frac{BC^2}{B'C'^2},$$

ó llamando P y P' las áreas de los polígonos,

$$\frac{P}{P'}=\frac{BC^2}{B'C'^2}.$$

Corol. *Las áreas de los polígonos regulares de un mismo número de lados son proporcionales á los cuadrados de sus rádios y apotemas.*

Estos polígonos son semejantes (**102**), luego sus áreas serán proporcionales á los cuadrados de los lados : y como los lados son proporcionales á los rádios y apotemas, los cuadrados de los lados serán proporcionales á los cuadrados de los rádios y de las apotemas (Alg., **182**, 4.ª) ; y por consiguiente, las áreas serán tambien proporcionales á los cuadrados de los rádios y de las apotemas. Así

$$\frac{P}{P'}=\frac{r^2}{r'^2}=\frac{a^2}{a'^2}.$$

162. Teorema 3.º *Las áreas de los círculos son proporcionales á los cuadrados de los rádios y de los diámetros.*

Las fórmulas de las áreas de dos círculos son (**155**, corolario)

$$C=\pi r^2 \quad \text{y} \quad C'=\pi r'^2;$$

de donde

$$\frac{C}{C'}=\frac{\pi r^2}{\pi r'^2}=\frac{r^2}{r'^2}:$$

y como los cuadrados de los rádios son proporcionales á los cuadrados de los diámetros, resulta

$$\frac{C}{C'}=\frac{r^2}{r'^2}=\frac{d^2}{d'^2}.$$

163. Teorema 4.º *Si sobre la hipotenusa* a *y los catetos* b *y* c *de un triángulo rectángulo, considerados como lados homólogos, se construyen polígonos semejantes* A, B, C; *el área del polígono construido sobre la hipotenusa es igual á la suma de las áreas de los polígonos construidos sobre los catetos.*

En efecto, se tiene (**161**)

$$\frac{A}{a^2}=\frac{B}{b^2}=\frac{C}{c^2}:$$

pero $a^2=b^2+c^2$ (**111**, 1.º); luego (Alg., **186**, corol.)

$$A=B+C.$$

Corol. 1.º *El cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.*

Porque estos tres cuadrados son polígonos semejantes (**102**).

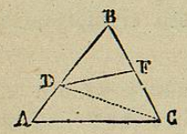
Corol. 2.º *Si con radios ó diámetros respectivamente iguales á la hipotenusa ó catetos de un triángulo rectángulo se trazan circunferencias, y en ellas se inscriben ó circunscriben polígonos regulares de igual número de lados, el área del polígono formado en la primera es igual á la suma de las áreas de los otros dos.*

Este corolario y el siguiente se demuestran como el teorema.

Corol. 3.º *El área del círculo trazado con un radio ó diámetro igual á la hipotenusa es igual á la suma de las áreas de los trazados con el radio ó diámetro respectivamente iguales á los catetos.*

164. Teorema 5.º *Las áreas de dos triángulos* ABC *y* DBF (fig. 144), *que tienen un ángulo* B *comun, son proporcionales á los productos* AB×BC *y* BD×BF *de los lados que en cada triángulo forman dicho ángulo.*

Fig. 144.

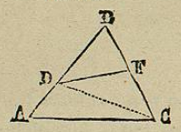


Trazando la DC y tomando por bases de los triángulos ABC y DBC los lados AB y DB, estos triángulos tienen la misma altura, luego (**151**, corol.)

$$\frac{ABC}{DBC}=\frac{AB}{DB}.$$

Si se toman por bases de los triángulos DBC y DBF los lados BC y BF, tambien estos triángulos tienen la misma altura; luego

Fig. 144.



$$\frac{DBC}{DBF}=\frac{BC}{BF}.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones y suprimiendo al mismo tiempo el factor comun DBC, resulta

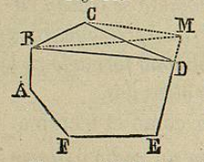
$$\frac{ABC}{DBF}=\frac{AB\times BC}{DB\times BF}.$$

PROBLEMAS.

165. 1.º Trasformar un polígono ABCD..... (fig. 145) en otro equivalente y que tenga un lado ménos.

Únase B con D: por C trácese CM paralela á BD: prolónguese el lado ED hasta encontrar en M á la CM, y el polígono ABMEF será el pedido.

Fig. 145.



En efecto, los triángulos BCD y BMD, que tienen la misma base BD y sus vértices C y M equidistantes de esta base (**32**, corol.) son equivalentes (**146**, corol.). Luego si al polígono ABDEF se le agrega el triángulo BCD, y despues el BMD, los polígonos resultantes ABCDEF y ABMEF son equivalentes; y éste tiene evidentemente un lado ménos que el primero.

Corol. *Todo polígono se puede trasformar gráficamente en un triángulo equivalente.*

Porque si tiene por ejemplo 10 lados, se trasforma en otro equivalente que tenga 9, luego en otro que tenga 8, y así sucesivamente.

166. 2.º Cuadrar un triángulo, ó sea trasformarle en cuadrado equivalente.

Hállese una media proporcional entre la altura y la mitad de la base, ó entre la base y la mitad de la altura (**117**): sobre

esta media proporcional se construye un cuadrado, el cual será el pedido.

En efecto, de la proporcion

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{\frac{1}{2}b} \quad ó \quad \frac{b}{x}=\frac{x}{\frac{1}{2}a}$$

se deduce

$$x^2=\frac{1}{2}ab.$$

Corol. *Todo polígono puede cuadrarse gráficamente.*

Porque se puede trasformar en triángulo equivalente (**165**, corol.), y luego en cuadrado segun el problema.

OBSERVACIONES.

1.ª Los polígonos para la determinacion de cuya área hay fórmula determinada pueden cuadrarse sin necesidad de trasformarlos ántes en triángulos equivalentes, *hallando una media proporcional entre los dos factores que forman dicha área, y construyendo un cuadrado sobre la media proporcional.*

Así, para cuadrar el paralelógramo se halla la media proporcional entre la base y la altura; para cuadrar el trapecio, se determina la media proporcional entre la altura y la semisuma de las bases, etc.

2.ª Tambien es fácil calcular el lado del cuadrado equivalente á una figura cualquiera, hallando su área y extrayendo la raíz cuadrada del número que resulte.

Así, el lado del cuadrado equivalente á una figura cuya área son 1800 varas cuadradas, es

$$l=\sqrt{1800}=42{,}4\dot{2}\ldots \text{ varas.}$$

167. 3.º Cuadrar el círculo aproximadamente.

Hállese una media proporcional entre el rádio y la semicircunferencia, y éste será aproximadamente el lado del cuadrado equivalente al círculo, ó determínese el área del círculo, extráigase la raíz cuadrada del número que la represente, y esta raíz será con aproximacion el lado del cuadrado equivalente.

Observacion. Por este último procedimiento es imposible hallar con exactitud el lado del cuadrado equivalente al círculo; porque entrando por factor del área la razon de la circunferencia al diámetro, y siendo esta cantidad inconmensurable [**139**, (*)], el resultado no puede ser exacto, aunque sí tan aproximado como se quiera. Tampo-

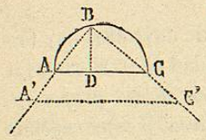
co puede resolverse el problema por el primer medio con exactitud; puesto que no puede rectificarse exactamente la circunferencia [**143**, (*)].

De manera que la cuadratura del círculo, el problema mas famoso de la Geometría, es irresoluble con los auxilios que presta la Geometría elemental (*).

168. 4.° Dado un polígono P construir otro P′ semejante al primero, y cuyas áreas estén en una razon dada, por ejemplo, de 3 á 4.

En una recta AC (fig. 146) tómese AD=3 partes cualesquiera, pero iguales entre sí, y á continuacion DC=4 partes iguales á las anteriores: sobre AC como diámetro trácese una semicircunferencia: en el punto D del diámetro levántese la perpendicular DB, y trácense las rectas BA y BC, indefinidas por la parte inferior del diámetro: tómese sobre BA una parte BA′ igual á uno de los lados del polígono dado P: y trazando la recta A′C′ paralela al diámetro, constrúyase sobre BC′, considerada como lado homólogo del lado BA′ del polígono P, otro polígono P′ semejante al dado (**121**); y el polígono formado de esta manera será el pedido.

Fig. 146.



En efecto, se tiene (**161**)

$$\frac{P}{P'}=\frac{BA'^2}{BC'^2}.$$

Los triángulos BAC y BA′C′ son semejantes (**97**); luego

$$\frac{BA'}{BC'}=\frac{BA}{BC},$$

ó (Alg. **182**, 4.ª) $\frac{BA'^2}{BC'^2}=\frac{BA^2}{BC^2}$: pero (**110**), obs.)

$$\frac{BA^2}{BC^2}=\frac{3}{4};$$

luego de esta proporcion y la anterior, que tienen una razon comun, se deduce

$$\frac{BA'^2}{BC'^2}=\frac{3}{4}.$$

Esta proporcion y la primera tienen tambien una razon igual, luego por último

$$\frac{P}{P'}=\frac{3}{4}.$$

(*) Si bien la resolucion exacta de este problema sería interesante bajo el punto de vista científico, no lo sería tanto, mejor dicho, traería muy poca utilidad, con relacion á sus aplicaciones prácticas, porque la aproximacion puede llevarse tan adelante como en cualquier caso sea de desear.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

SECCION PRIMERA.

PROPIEDADES DE LAS FIGURAS EN EL ESPACIO.

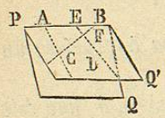
PRELÍMINARES.

Del plano.

169. Teorema 1.° *Por tres puntos* A, B, C (fig. 147), *que no estén en línea recta, puede pasar un plano, pero nada mas que uno solo.*

Por los puntos A, B, C trácense rectas: por una de estas AB, hágase pasar un plano PQ (*), el cual puede evidentemente girar sirviéndole de eje AB hasta llegar al punto C; luego el plano PQ pasa por los tres puntos dados.

Fig. 147.



Otro plano PQ′, que pasase por los mismos puntos A, B, C, coincidiria con el PQ.

Porque las tres rectas AB, BC y AC estarian en los dos planos (**8**, corol.); luego por un punto cualquiera D, situado en el plano PQ′, se podria trazar una recta DE que cortase dos rectas AB y BC de las tres que unen los puntos dados. Ahora la recta DE, que tiene los puntos E y F en el plano PQ, coincidirá con

(*) El plano se representa comunmente por un paralelógramo que debe suponerse ilimitado, y se nombra por las letras de una de sus diagonales como ya se ha visto (**145** y siguientes). Con mas propiedad se representaria por un círculo; pero esto ni se acostumbra ni sería mas cómodo.