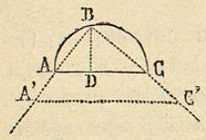
co puede resolverse el problema por el primer medio con exactitud; puesto que no puede rectificarse exactamente la circunferencia [**143**, (*)].

De manera que la cuadratura del círculo, el problema mas famoso de la Geometría, es irresoluble con los auxilios que presta la Geometría elemental (*).

168. 4.° Dado un polígono P construir otro P′ semejante al primero, y cuyas áreas estén en una razon dada, por ejemplo, de 3 á 4.

En una recta AC (fig. 146) tómese AD=3 partes cualesquiera, pero iguales entre sí, y á continuacion DC=4 partes iguales á las anteriores: sobre AC como diámetro trácese una semicircunferencia: en el punto D del diámetro levántese la perpendicular DB, y trácense las rectas BA y BC, indefinidas por la parte inferior del diámetro: tómese sobre BA una parte BA′ igual á uno de los lados del polígono dado P: y trazando la recta A′C′ paralela al diámetro, constrúyase sobre BC′, considerada como lado homólogo del lado BA′ del polígono P, otro polígono P′ semejante al dado (**121**); y el polígono formado de esta manera será el pedido.

Fig. 146.



En efecto, se tiene (**161**)

$$\frac{P}{P'}=\frac{BA'^2}{BC'^2}.$$

Los triángulos BAC y BA′C′ son semejantes (**97**); luego

$$\frac{BA'}{BC'}=\frac{BA}{BC},$$

ó (Alg. **182**, 4.ª) $\frac{BA'^2}{BC'^2}=\frac{BA^2}{BC^2}$: pero (**110**), obs.)

$$\frac{BA^2}{BC^2}=\frac{3}{4};$$

luego de esta proporcion y la anterior, que tienen una razon comun, se deduce

$$\frac{BA'^2}{BC'^2}=\frac{3}{4}.$$

Esta proporcion y la primera tienen tambien una razon igual, luego por último

$$\frac{P}{P'}=\frac{3}{4}.$$

(*) Si bien la resolucion exacta de este problema sería interesante bajo el punto de vista científico, no lo sería tanto, mejor dicho, traería muy poca utilidad, con relacion á sus aplicaciones prácticas, porque la aproximacion puede llevarse tan adelante como en cualquier caso sea de desear.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

SECCION PRIMERA.

PROPIEDADES DE LAS FIGURAS EN EL ESPACIO.

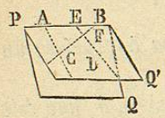
PRELÍMINARES.

Del plano.

169. Teorema 1.° *Por tres puntos* A, B, C (fig. 147), *que no estén en línea recta, puede pasar un plano, pero nada mas que uno solo.*

Por los puntos A, B, C trácense rectas: por una de estas AB, hágase pasar un plano PQ (*), el cual puede evidentemente girar sirviéndole de eje AB hasta llegar al punto C; luego el plano PQ pasa por los tres puntos dados.

Fig. 147.



Otro plano PQ′, que pasase por los mismos puntos A, B, C, coincidiria con el PQ.

Porque las tres rectas AB, BC y AC estarian en los dos planos (**8**, corol.); luego por un punto cualquiera D, situado en el plano PQ′, se podria trazar una recta DE que cortase dos rectas AB y BC de las tres que unen los puntos dados. Ahora la recta DE, que tiene los puntos E y F en el plano PQ, coincidirá con

(*) El plano se representa comunmente por un paralelógramo que debe suponerse ilimitado, y se nombra por las letras de una de sus diagonales como ya se ha visto (**145** y siguientes). Con mas propiedad se representaria por un círculo; pero esto ni se acostumbra ni sería mas cómodo.

él en toda su extension (**8**, corol.); luego el punto D de esta recta se hallará tambien en el plano PQ, luego dicho punto es comun á los dos planos; luego estos tienen todos sus puntos comunes, luego coinciden.

Corol. 1.º *Tres puntos que no están en línea recta determinan la posicion de un plano.*

Corol. 2.º *Un ángulo ó dos rectas que se cortan determinan la posicion de un plano.*

Porque el punto comun de las dos rectas y otro en cada una de ellas forman un sistema de tres puntos que no están en línea recta; hallándose las dos rectas en el plano de dichos puntos (**8**, corol.).

Corol. 3.º *Dos paralelas determinan la posicion del plano en que están situadas.*

Porque tomando un punto en una de las paralelas y dos en la otra, se tiene un sistema de tres puntos que no están en línea recta.

Corol. 4.º *La interseccion de dos planos es una línea recta.*

Porque si en esta interseccion se pudiesen tomar tres puntos no en línea recta, los dos planos formarian uno solo; contra la hipótesis.

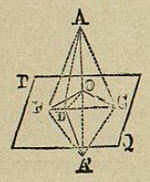
Rectas perpendiculares y oblícuas á un plano.

170. *Se llama* pié *de una línea que encuentra ó atraviesa un plano, el punto comun á la recta y al plano.*

Se dice que una recta es perpendicular á un plano, *ó que éste lo es á aquella, cuando la recta es perpendicular á todas las que pueden pasar por su pié en el mismo plano: y* oblícua *cuando le encuentra sin serle perpendicular.*

171. Teorema. 1.º *Si una recta* AO (fig. 148) *es perpendicular á otras dos* BO *y* CO, *que pasan por su pié* O *en un plano* PQ, *lo será tambien á otra recta cualquiera* DO, *que pase por este punto* O *en el mismo plano.*

Fig. 148.



Tómese (sobre la recta AO y su prolongacion) AO=A'O: trácese por un punto cualquiera D de la DO una recta BC, que corte á las

rectas indefinidas BO y CO: únanse los puntos A y A' con los B, C y D.

Como los puntos A, B y A' están en un plano (**169**), y ademas BO es perpendicular á AA' en su punto medio O, resulta (**25**, 1.º) AB=A'B; por igual razon AC=A'C; luego los triángulos ABC y A'BC tienen sus tres lados respectivamente iguales, luego son iguales. Doblando el A'BC sobre el ABC por la recta BC, la línea A'D coincide con la AD, luego son iguales, luego la recta DO tiene los puntos D y O equidistantes de A y A', luego es perpendicular á la AA' (**26**, corol. 2.º); y por consiguiente AA' lo será á DO (**22**, corol. 1.º).

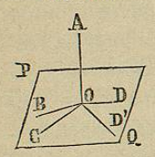
Corol. 1.º *Si una recta es perpendicular á dos que pasan por su pié en un plano, es perpendicular al plano.*

Corol. 2.º *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos* A *y* A' *de una recta, es el plano* PQ *perpendicular en el punto medio* O *de dicha recta.*

Recíprocamente. *Si dos rectas* BO *y* CO (fig. 149) *son perpendiculares á una tercera* AO *en un punto dado* O, *otra recta cualquiera* DO, *perpendicular á la misma* AO *y en el mismo punto, estará en el plano* BOC *de las dos primeras.*

Porque supongamos que, siendo PQ el plano de las BO y CO, la DO se encuentre fuera de él: hágase pasar por AO y DO otro plano, el cual cortará al PQ en otra recta D'O distinta de DO, y se tendrá: D'O perpendicular á AO (teor. direc.), y DO perpendicular tambien á la AO por hipótesis; luego en el punto O de la AO y en el plano AOD se tienen dos perpendiculares á esta recta, lo que es absurdo (**23**).

Fig. 149.



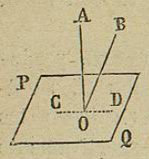
Corolario. *El lugar geométrico de las perpendiculares trazadas en un punto de una recta, es el plano perpendicular á la recta en el mismo punto.*

172. Teorema 2.º *Por un punto dado no se puede trazar á un plano mas de una perpendicular.*

Pueden ocurrir dos casos: 1.º que el punto esté en el plano: 2.º que esté fuera de él.

1.º Sea el punto dado O (fig. 150), situado en el plano PQ, y supongamos que se puedan levantar las dos rec-

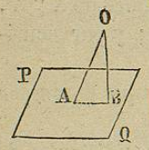
Fig. 150.



tas OA y OB, perpendiculares á dicho plano. Haciendo pasar por OA y OB otro plano, su interseccion con el PQ será una recta CD (**169**, corolario 4.º); luego en el punto O de la recta CD se tendrian dos perpendiculares á esta recta (**170**), lo que es absurdo (**23**).

2.º Sea el punto dado O (fig. 151), situado fuera del plano PQ, y supongamos que se puedan bajar las perpendiculares AO y BO á este plano. Haciendo pasar por AO y BO otro plano, su interseccion con el PQ será una recta AB (**169**, corol. 4.º); luego desde el punto O se tendrian bajadas sobre la AB dos perpendiculares (**170**), lo que es imposible (**23**).

Fig. 151.

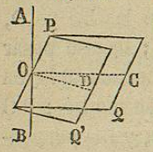


173. Teorema 3.º *Por un punto dado no se puede trazar á una recta mas que un plano perpendicular.*

Se distinguen tambien dos casos : 1.º que el punto esté en la recta ; 2.º que esté fuera de ella.

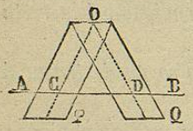
1.º Supongamos que por el punto O (fig. 152), situado en la recta AB, se puedan trazar dos planos PQ y PQ' perpendiculares á esta recta. Haciendo pasar por AO un tercer plano, que corte á los otros dos, sus intersecciones con los dos primeros serán las rectas OC y OD (**169**, corol. 4.º); luego la recta AO sería perpendicular á las OC y OD, que pasan por su pié en dichos planos (**170**), luego en el punto O de la recta AB, y en un mismo plano, se tendrian dos perpendiculares á dicha recta, lo que es absurdo (**23**).

Fig. 152.



2.º Si desde el punto O (fig. 153), situado fuera de la recta AB, suponemos trazados los dos planos OP y OQ perpendiculares á esta recta, haciendo pasar por O y por dicha recta AB un tercer plano, las intersecciones de este con los primeros serían las rectas OC y OD (**169**, corol. 4.º) : y como AB es perpendicular á los dos planos OP y OQ, lo sería tambien á las rectas OC y OD que pasan por los puntos C y D en estos planos (**170**); luego desde el punto O fuera de la recta AB, y en un

Fig. 153.

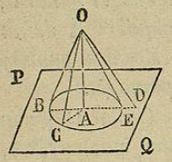


mismo plano, se tendrian dos perpendiculares á dicha recta, lo que es imposible (**23**).

174. Teorema 4.º *Si desde un punto* O, *fuera de un plano* PQ (fig. 154), *se trazan á este una perpendicular* OA *y una oblícua* OB, *la perpendicular es menor que la oblícua.*

Uniendo B con A, el triángulo OAB es rectángulo en A, (**170**) ; luego OA<OB (**75**, corol. 3.º).

Fig. 154.



Corol. *La distancia entre un punto y un plano se mide por la perpendicular trazada desde dicho punto al plano.*

Recíprocamente. *Si una recta es la menor que se puede trazar entre un punto y un plano, será perpendicular á este plano.*

Porque si no sería oblícua, y entónces trazando una perpendicular sería menor que ella; lo que es contra la hipótesis.

175. Teorema 5.º *Si desde un punto* O, *fuera de un plano* PQ, *se trazan á este una perpendicular* OA *y diferentes oblícuas* OB, OC, OD : 1.º *las oblícuas* OB *y* OC, *que se separan igualmente de la perpendicular son iguales ;* 2.º *de dos oblícuas* OC *y* OD, *la* OD *que mas se separa de la perpendicular, es la mayor.*

1.º Uniendo A con B y con C, los triángulos AOB y AOC tienen el lado AO comun, AB=AC por hipótesis, y los ángulos BAO y CAO iguales por rectos; luego estos triángulos son iguales (**72**, 2.º), luego OB=OC.

2.º Uniendo A con D, como AD>AC por hipótesis, se podrá tomar sobre AD una parte AE=AC, en cuyo caso OC=OE, segun la primera parte del teorema : pero OD>OE (**25**, 2.º); luego OD>OC.

Recíprocamente. *Si desde un punto fuera de un plano se trazan á este una perpendicular y diferentes oblícuas :* 1.º *las oblícuas iguales se separan igualmente de la perpendicular* 2.º *de dos oblícuas, la mayor se separa mas de la perpendicular* (**12**).

Corol. 1.º *El lugar geométrico de los piés* B, C, E, *etc., de las oblícuas iguales* OB, OC, OE, *etc., bajadas desde un punto* O *sobre un plano* PQ. *es una circunferencia* BCE, *cuyo*

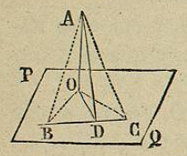
centro es el pié A *de la perpendicular* AO : *y cuyo rádio es la distancia de este pié al de las oblícuas.*

Corol. 2.º *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de una circunferencia* BCE, *es la perpendicular* AO *levantada en el plano* PQ *de dicha circunferencia y en su centro* A.

176. Teorema 6º. *Si desde el pié* O (fig. 155) *de la perpendicular* AO *á un plano* PQ, *se traza una perpendicular* OD *á otra recta* BC *situada en el mismo plano, y se une el punto* D, *donde estas rectas se encuentran, con otro cualquiera* A *de la perpendicular al plano, la recta* AD, *que une estos dos puntos, es perpendicular a la línea* BC *situada en dicho plano* (*).

Tómese DB=DC, y únanse los puntos B y C con O y con A. Las oblícuas OB y OC son iguales (**25**, 1.º); luego las oblícuas AB y AC al plano PQ, lo son tambien (**175**, 1.º); luego el triángulo ABC es isósceles; luego la línea AD es perpendicular á la base BC de este triángulo (**75**, obs.).

Fig. 155.



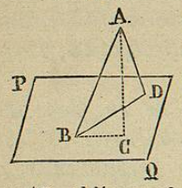
Observacion. La recta BC es perpendicular al plano AOD (**75**. corol. 1.º).

177. *Llámase* proyeccion de un punto *sobre un plano el pié de la perpendicular bajada desde dicho punto al plano.*

Proyeccion de una recta AB (fig. 156) *sobre un plano es otra recta* BC, *que une las proyecciones de los extremos de la primera.*

178. Teorema 7.º *El ángulo* ABC, *que forma una recta* AB *con su proyeccion* BC *sobre un plano* PQ, *es menor que el* ABD *que la misma recta forma con otra cualquiera* BD, *trazada por su pié en dicho plano.*

Fig. 156.



Tómese BD=BC, y los triángulos ABC y ABD tendrán el lado AB comun, AC<AD, por ser AC perpendicular al plano PQ (**177**) y AD oblícua al mismo (**172**); luego el ángulo ABC<ABD (**76**, rec.).

(*) Este *teorema* se suele llamar *de las tres perpendiculares.*

Corol. *El ángulo que una recta forma con un plano, tiene por medida el que la misma recta forma con su proyeccion sobre dicho plano.*

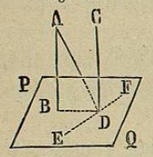
De las rectas paralelas en el espacio.

179. Teorema 1.º *Dos rectas* AB *y* CD (fig. 157), *perpendiculares á un mismo plano* PQ, *son paralelas.*

AB y CD son perpendiculares á la recta BD que une sus piés.

Por otra parte, trazando la EF perpendicular á BD en el plano PQ y uniendo A con D, esta recta AD es perpendicular á la EF (**176**) : BD y CD lo son tambien, la primera por construccion y la segunda por hipótesis ; luego las tres rectas BD, AD y CD están en un mismo plano (**171**, rec.): y como la AB se halla tambien en él (**8**, corol.), las rectas AB y CD están en un mismo plano, y son perpendiculares á una tercera, luego son paralelas (**28**).

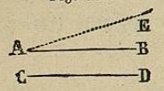
Fig. 157.



180. Teorema 2.º *Por un punto* A (fig. 158), *dado en el espacio, no se puede trazar á una recta* CD *mas que una paralela* AB.

En efecto, si se pudiese trazar otra AE, como las rectas AB y AE estarian en el plano que pasa por los puntos A, C y D (**27**), las tres rectas se hallarian en este plano (**169**) ; luego por un punto fuera de una recta y en un mismo plano se tendrian dos paralelas á dicha recta, lo que es absurdo (**29**, corol. 1.º).

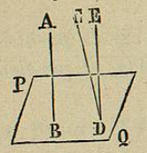
Fig. 158.



Corolario 1.º *Dos rectas, una* AB (fig. 159) *perpendicular y otra* CD *oblícua á un plano* PQ, *no son paralelas.*

Porque si lo fuesen, levantando en D la DE perpendicular al mismo plano PQ, sería tambien paralela á AB (**179**); luego por D habria dos rectas DC y DE paralelas á AB, lo que es imposible.

Fig. 159.



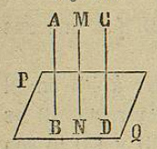
Corol. 2.º *Si un plano* PQ *es perpendicular á una de dos paralelas* AB, *tambien lo será á la otra* DE.

Porque si el plano PQ fuese oblícuo respecto de DE, esta recta lo sería respecto de él; en cuyo caso las rectas AB y DE no serían paralelas (corolario anterior), contra la hipótesis.

Observacion. Este corolario puede enunciarse de otro modo: *Si una recta es perpendicular á un plano cualquiera, otra recta paralela con ella será perpendicular al mismo plano.*

Corol. 3.º *Dos rectas* AB *y* CD (fig. 160), *paralelas á una tercera* MN, *son paralelas entre sí.*

Fig. 160.

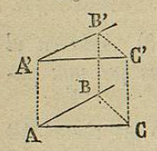


Porque trazando un plano PQ perpendicular á AB, lo será tambien á su paralela MN (corolario anterior), y siéndolo á MN lo será á su paralela CD; luego AB y CD son perpendiculares al plano PQ, luego son paralelas (**179**).

181. Teorema 3.º *Si dos ángulos* BAC, B'A'C' (fig. 161), *situados en diferentes planos, tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, son iguales.*

Tómese AB=A'B', AC=A'C', y trácense las rectas AA', BB', CC', BC y B'C'. El cuadrilátero ABA'B' tiene AB igual y paralela á A'B', luego es un paralelógramo (**79**, rec. 2.º); luego AA' es igual y paralela con BB': por igual razon CC' es igual y paralela á AA'; luego BB' y CC' son iguales y paralelas entre sí; luego BCB'C' es un paralelógramo, luego BC=B'C'; luego los triángulos ABC y A'B'C' son iguales (**72**, 1.º), luego los ángulos BAC y B'A'C' lo son tambien.

Fig. 161.

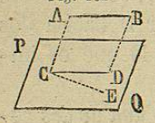


De las rectas paralelas á un plano.

182. *Se dice que una recta es* paralela á un plano, *ó que el plano es paralelo á la recta, cuando no se encuentran por mas que uno y otra se prolonguen.*

183. Teorema 1.º *Si una recta* AB (fig. 162) *es paralela á otra* CD, *situada en un plano* PQ, *es paralela al plano.*

Fig. 162.



La AB está en el plano ABCD (**27**); luego no puede encontrar al plano PQ sino en algun punto de la CD: pero esto es contra la hipótesis; luego tampoco puede encontrar á dicho plano, luego le es paralela.

184. Teorema 2.º *Si por una recta* AB, *paralela á un plano* PQ, *se traza otro plano que corte al primero, la interseccion* CD *de estos planos es paralela á la recta dada.*

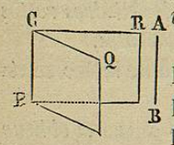
En efecto, AB y CD están en un mismo plano ABCD, además AB no puede encontrar á CD, porque si la encontrase, encontraria tambien al plano PQ en que esta se halla situada, lo que es contra la hipótesis; luego AB y CD son paralelas (**27**).

Corol. 1.º *Si una recta* AB *es paralela á un plano* PQ, *y por un punto* C *de este se traza otra recta* CD *paralela á la primera, dicha recta* CD *estará toda ella en el mismo plano.*

Porque si CD no tuviese mas que el punto C en el plano PQ, trazando por AB y CD otro plano, cortaria al PQ en una recta CE paralela con AB (segun el teorema); luego por C habria dos paralelas CD y CE á la AB, lo que es imposible (**29**, corol. 1.º)

Corol. 2.º *Si una recta* AB (fig. 163) *es paralela á dos planos* PQ y PR, *que se cortan, será paralela á la interseccion* CP *de estos planos.*

Fig. 163.



Porque trazando por un punto cualquiera C de la interseccion CP una paralela á la AB, debe hallarse al mismo tiempo en los dos planos (corolario anterior); luego coincide con dicha interseccion CP, luego AB y CP son paralelas.

CAPÍTULO PRIMERO.

Planos en sus diferentes posiciones.

ARTÍCULO PRIMERO.

Ángulos diedros.

185. *Se llama* ángulo diedro, *ó simplemente* diedro, *la extension comprendida entre dos planos que se cortan. Estos planos se llaman* caras, *y* arista *su interseccion.*