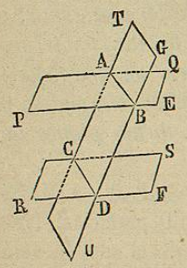
secciones de los planos con el transversal no son paralelas, como fácilmente se comprende observando que si dos planos que se cortan son perpendiculares á un tercero, forman con este los ocho ángulos diedros rectos, y por consiguiente iguales; resultando consiguientemente los alternos y correspondientes iguales y los internos de un mismo lado suplementarios, sin que los planos sean paralelos. En el recíproco 1.º dichas intersecciones son siempre paralelas (**202**); y este por lo tanto es cierto en todo caso, ó sea sin más hipótesis que las hechas en el análogo de la Geometría plana.

**206.** Teorema 5.º *Las partes* AC *y* BD (fig. 176) *de paralelas, comprendidas entre planos* PQ *y* RS *paralelos, son iguales.*

Fig. 176.




Trazando un plano que pase por dichas paralelas, las comunes secciones AB y CD de este plano con los paralelos son líneas paralelas (**202**); luego la figura ABCD es un paralelógramo, luego

$$AC = BD.$$

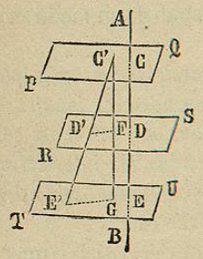
Corol. *Los puntos de un plano equidistan de su paralelo.*

Porque las perpendiculares trazadas desde un plano á su paralelo son paralelas (**179**), luego son iguales.

**207.** Teorema 6.º *Dos rectas* CE *y* C'E' (fig. 177) *comprendidas entre dos planos* PQ *y* TU *paralelos, cortadas por un tercer plano* RS, *paralelo á los primeros, quedan divididas en partes proporcionales.*

Trácese la recta C'G paralela á CE, y por E'C'G hágase pasar un plano.

Fig. 177.




D'F y E'G serán paralelas (**202**); luego se tendrá (**94**)

$$\frac{C'F}{FG} = \frac{C'D'}{D'E'};$$

pero C'F=CD y FG=DE por partes de paralelas comprendidas entre planos paralelos; luego

$$\frac{CD}{DE} = \frac{C'D'}{D'E'}.$$



## ARTÍCULO IV.

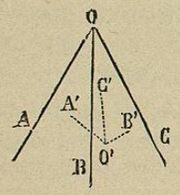
### De los ángulos poliedros.

**208.** *Se llama* Ángulo poliedro *la extension comprendida por tres ó más planos que concurren en un punto, y tienen dos á dos una recta comun.*

Los planos se llaman *caras* ó ángulos rectilíneos, las intersecciones de las caras reciben el nombre de *aristas*, y el de *vértice* el punto de concurrencia.

OABC (fig. 178) es un ángulo poliedro; AOB, BOC y COA sus caras : OA, OB y OC las aristas, y O el vértice.

Fig. 178.




Un ángulo poliedro se nombra, como acaba de verse, por la letra del vértice seguida de una colocada en cada arista. Tambien se puede nombrar, si está solo, por la letra del vértice : así para expresar el anterior bastará decir el ángulo poliedro O.

Corol. *Un ángulo poliedro no varía de valor aunque varíe la longitud de sus aristas.*

*Se da el nombre de ángulo poliedro* convexo *al que no puede ser atravesado por una recta más que en dos puntos.*

En todo lo que sigue supondremos convexos los ángulos poliedros.

*Llámase* Ángulo triedro *ó simplemente* triedro, *el ángulo poliedro formado por tres caras.*

**209.** *Se dice que dos triedros son suplementarios cuando los ángulos rectilíneos de cada uno son respectivamente suplementarios de los diedros del otro.*

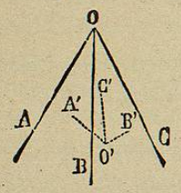
**210.** Teorema 1.º *Dado un ángulo triedro* O, *se puede formar otro suplementario.*

Desde un punto O', interior del triedro dado, trácense las perpendiculares O'A', O'B' y O'C' á las caras AOB, BOC y COA de mismo triedro, y el formado en O' por estas perpendiculares será el pedido.

En efecto el ángulo rectilíneo A'O'C', formado por las per-

pendiculares O'A' y O'C' á las caras AOB y AOC, es suplemento del diedro OA (**199**) : por igual razon los rectilíneos A'O'B' y B'O'C' son suplementos de los diedros OB y OC; luego los ángulos rectilíneos del triedro O' son suplementarios de los diedros del triedro O.

Fig. 178.



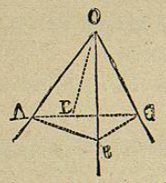

Siendo O'A' perpendicular á la cara AOB y O'C' á la AOC, el plano A'O'C' es perpendicular á estas dos caras (**198**); luego la interseccion AO de estas será perpendicular á dicho plano A'O'C' (**198**, corol. 3.º) : por igual razon OB es perpendicular al plano A'O'B', y OC al B'O'C'; luego el diedro O'A' es suplemento del ángulo rectilíneo AOB, O'B' del rectilíneo BOC, y O'C' del AOC; luego los ángulos rectilíneos del triedro O son suplementos de los diedros del triedro O'.

Luego los triedros O y O' son suplementarios (**209**).

**211.** Teorema 2.º *En todo ángulo triedro, un ángulo rectilíneo : 1.º es menor que la suma de los otros dos ; 2.º es mayor que su diferencia.*

1.º Sea el triedro O (fig. 179), y supongamos que el ángulo rectilíneo AOC es mayor que cualquiera de los otros dos AOB y BOC.

Fig. 179.




Fórmese el ángulo DOC=BOC, y trácese por D la recta AC : tómese OB=OD, y únase B con A y con C.

De esta construccion resulta que los triángulos DOC y BOC son iguales (**72**, 2.º), luego DC=BC : AC ó sea AD+DC<AB+BC (**70**); luego, restando de esta desigualdad la igualdad anterior, se tiene

$$AD<AB.$$

Ahora, los triángulos AOD y AOB tienen AO comun, OD=OB por construccion y AD<AB; luego el ángulo AOD<AOB (**76**, recíproco); luego sumando con esta desigualdad los ángulos iguales por construccion DOC y BOC, resulta

$$AOD+DOC<AOB+BOC \text{ ó } AOC<AOB+BOC.$$

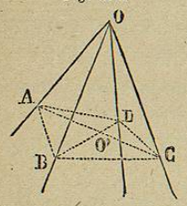


2.º Esta parte del teorema es una consecuencia necesaria de la primera.

**212.** Teorema 3.º *La suma de los ángulos rectilíneos* AOB, BOC, *etc., que forman un ángulo poliedro* O (fig. 180) *es menor que cuatro rectos.*

Córtense todas las aristas del ángulo poliedro O por un plano ABCD, y desde un punto O', interior de este polígono, trácense las líneas O'A, O'B, etc., á los vértices de todos sus ángulos.

Fig. 180.




La suma de los ángulos de los triángulos laterales AOB, BOC, etc., es igual á la de los ángulos de igual número de triángulos AO'B, BO'C, etc. formados en el polígono (**71**).

Ahora, en el triedro BAOC se tiene ABC<ABO+OBC (**211**, 1.º), ó ABO'+O'BC<ABO+OBC; y como lo mismo se verifica en los triedros cuyos vértices están en los puntos C, D y A, resulta que en los triángulos cuyo vértice está en O, la suma de los ángulos de las bases es mayor que la de los ángulos, tambien en las bases, de los triángulos cuyo vértice está en O'; luego por compensacion, la suma de los ángulos en O será menor que la de los ángulos en O', pero estos valen cuatro rectos (**19**, corol. 4.º); luego los en O, ó sean los rectilíneos del ángulo poliedro, valen ménos de cuatro rectos.

**213.** Teorema 4.º *La suma de los ángulos diedros de un triedro cualquiera es mayor que dos rectos y menor que seis.*

En efecto, los ángulos diedros de un triedro, sumados con los rectilíneos de su suplementario, valen seis rectos : pero los rectilíneos del suplementario valen evidentemente mas de cero y ménos de cuatro rectos (**212**); luego los diedros del primitivo valen ménos de seis rectos y mas de dos.

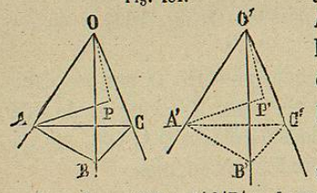
**214.** Teorema 5.º *Dos ángulos triedros son iguales : 1.º si tienen sus tres caras ó ángulos rectilíneos respectivamente iguales ; 2.º si tienen dos caras iguales é igual el diedro comprendido ; 3.º si tienen una cara igual contigua á dos diedros respectivamente iguales ; 4.º si tienen sus tres ángulos diedros respectivamente iguales, con tal que en todos estos casos los elementos estén dispuestos del mismo modo.*

1.º Sean los triedros O y O' (figura **181**), en que se

supone AOB = A'O'B', BOC = B'O'C' y AOC = A'O'C'.

Tómense las aristas OA, OB, OC, O'A', O'B' y O'C' iguales, y trácense los triángulos ABC y A'B'C' : bájense las perpendiculares OP y O'P' sobre los planos de estos triángulos, y únanse los puntos P y P' con A y A'.

Fig. 181.




En los triángulos AOB y A'O'B' se tiene AO=OB=O'A'=O'B' y a ángulo AOB=A'O'B'; luego estos triángulos son iguales (**72**, 2.º); luego AB=A'B' : por igual razon BC=B'C' y AC=A'C'; luego los triángulos ABC y A'B'C' son iguales (**72**, 1.º).

Los puntos P y P', piés de las perpendiculares OP y O'P', son los centros de las circunferencias circunscriptas á dichos triángulos (**175**, corol. 1.º); luego los radios AP y A'P' son iguales; luego los triángulos rectángulos AOP y A'O'P' son tambien iguales (**73**), luego OP=O'P'.

Superpónganse el triedro O al O', de modo que el triángulo ABC coincida con su igual A'B'C' : el punto P coincide con P' y PO con P'O' (**172**); luego la arista OA coincidirá con O'A', OB con O'B' y OC con O'C'; luego los triedros coinciden, luego son iguales.

2.º Supongamos que en los triedros O y O' se tengan los diedros AO=A'O', y los rectilíneos AOB=A'O'B' y AOC=A'O'C'.

Superpóngase el triedro O al O', de modo que la cara AOC coincida con su igual A'O'C', y que la arista OB caiga al mismo lado de la cara comun que la O'B' : la cara AOB caerá sobre A'O'B' por ser los diedros OA y O'A' iguales, y la arista OB coincidirá con O'B' por la igualdad de los ángulos rectilíneos AOB y A'O'B'; luego los triedros coinciden, luego son iguales.

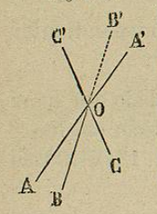
3.º Este caso se demuestra de una manera análoga al 2.º

4.º Si los triedros O y O' tienen sus diedros respectivamente iguales, formando los triedros suplementarios respectivos, estos tendrán sus ángulos rectilíneos respectivamente iguales; luego son iguales, segun el primer caso; luego los ángulos rectilíneos de los triedros O y O' son iguales; luego estos triedros tambien lo serán (primer caso).



Observacion. Cuando dos triedros tienen los elementos que se indican en cada caso respectivamente iguales y dispuestos de diferente modo, todas sus partes son iguales respectivamente; pero la coincidencia no puede verificarse.

Fig. 182.




Los triedros que reunen estas circunstancias se llaman *simétricos*.

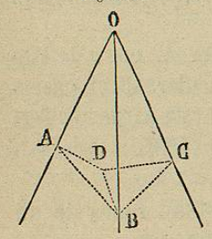
Si las aristas de un triedro OABC (fig. 182) se prolongan al otro lado del vértice, resulta el triedro OA'B'C' simétrico del primero.

En efecto, los ángulos rectilíneos AOB y A'OB' son iguales por opuestos por el vértice, lo mismo que los AOC y A'OC', BOC y B'OC'; los diedros OA y OA' son iguales tambien (**193**), y los OB y OB', OB y OC' lo son de igual modo. Por otra parte, estos dos triedros no pueden, en general, superponerse de modo que coincidan, como á simple vista se percibe.

**215.** Teorema 6.º *En todo ángulo triedro:* 1.º *á caras iguales se oponen diedros iguales;* 2.º *á mayor cara se opone mayor diedro.*

1.º Sea el triedro O (fig. 183) en que se supone AOB=BOC, y vamos á demostrar que el diedro OC es igual al OA.

Fig. 183.




Por un punto B de la arista OB trácense dos planos, uno perpendicular á OA y otro á OC, los cuales serán perpendiculares á la cara AOC (**198**) lo mismo que su comun interseccion BD (**198**, corol. 3.º). Los triángulos AOB y BOC son iguales (**72**, corolario); luego AB=BC, luego los triángulos ABD y BDC son tambien iguales (**73**); luego los ángulos BAD y BCD resultan iguales: mas estos son los rectilíneos correspondientes á los diedros OA y OC, luego estos son iguales.

2.º Si en la misma figura suponemos AOB>BOC, vamos á demostrar que el diedro OC es mayor que el OA.

Ejecutando la construccion anterior y doblando el triángulo BOC sobre BOA resulta que BA>BC (**10**, obs.); luego los triángulos tambien rectángulos ABD y BDC tienen el ángulo BCD mayor que BAD (**73**, obs. 2.ª), luego el diedro OC es mayor que el OA.

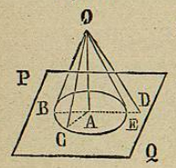
Recíprocamente. *En todo ángulo triedro:* 1.º *á diedros iguales se oponen caras iguales;* 2.º *á mayor diedro se opone mayor cara.*

PROBLEMAS.

**216.** 1.º **Por un punto dado trazar una perpendicular á un plano.**

Pueden ocurrir dos casos: 1.º que el punto dado esté fuera del plano; 2.º que esté en el mismo plano.

Fig. 184.

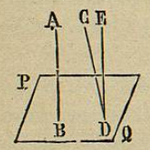



1.º Sea el punto dado O (fig. 184), situado fuera del plano PQ (*).

Bájense desde O sobre el plano tres rectas iguales OB, OC y OE; trácese una circunferencia que pase por sus piés B, C y E (**64**): únase el centro A de esta circunferencia con el punto dado O, y la recta AO será la perpendicular que se pide.

Porque la perpendicular levantada en A pasa por O (**175**, corolario 2.º); luego esta recta es la perpendicular pedida.

Fig. 185.

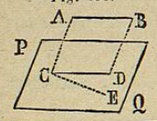



2.º Sea el punto D (fig. 185) situado en el plano PQ.

Desde un punto cualquiera A, fuera de este plano, bájese una perpendicular AB al mismo (caso ant.): por D trácese una paralela DE á esta perpendicular, y la recta DE será la perpendicular pedida (**180**, corol. 2.º, observacion).

**217.** 2.º **Por un punto dado A (fig. 186), fuera de un plano PQ, trazar una paralela á este plano.**

Fig. 186.




Trácese en el plano PQ una recta cualquiera CD, y por A una paralela AB á la CD; la recta AB será la pedida (**183**).

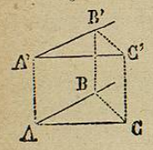
(*) En la resolucion de este problema no se hace mérito de las líneas OD, ED, etc., de la figura del márgen; lo cual depende de que la misma figura ha sido empleada en la demostracion de proposiciones en que era necesaria la consideracion de las líneas ahora omitidas.

Una cosa análoga sucede, por igual razon, con las tres figuras siguientes y con otras mas de que se hará uso en lo sucesivo.



**218** 3.º **Por un punto A' (fig. 187), situado fuera de un plano BAC, trazar otro plano paralelo al dado.**

Fig. 187.




Por A' trácense dos rectas A'B' y A'C' respectivamente paralelas á otras dos AB y AC, situadas en el plano dado BAC, y el plano determinado por B'A'C' será el pedido (**203**, corol.)

---

# CAPÍTULO II.

## De las superficies de revolucion.

**219.** *Llámanse* SUPERFICIES DE REVOLUCION *las engendradas por el movimiento de una línea, llamada* GENERATRIZ, *al rededor de una recta fija, que recibe el nombre de* EJE.

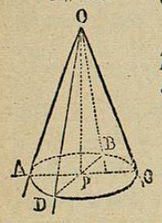
Entre las infinitas superficies de revolucion que pueden concebirse, tres son las que ahora nos interesa conocer: la *cónica*, la *cilíndrica* y la *esférica*.

### ARTÍCULO PRIMERO.

### De la superficie cónica.

**220.** *Se llama* SUPERFICIE CÓNICA *la engendrada por una recta que gira al rededor de otra con la cual concurre en un punto:* ó tambien *la originada por una recta sujeta á pasar por un punto fijo, llamado* VÉRTICE, *y á recorrer una curva plana cualquiera que toma el nombre de* DIRECTRIZ (*).

Fig. 188.




En este último caso *llamamos* EJE *la recta que pasa por el vértice y por el centro de la directriz, si le tiene.*

OABCD (fig. 188) es una superficie cónica, cuyo *vértice* es O: OA, OB, OC ú OD, prolongada cuanto se quiera por la parte inferior, es la *generatriz* en sus diferentes posiciones, ó las *generatrices* cuando se consideran dos ó mas: la curva ABCD es la *directriz*, y OP el *eje*.

(*) Si la generatriz se supone prolongada al otro lado del vértice, trazará otra superficie cónica, que con la primera forman la superficie cónica total, de la que cada una de las parciales es una *hoja*. Actualmente no consideramos mas que una de estas hojas.