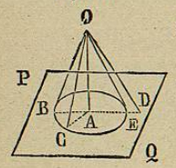
PROBLEMAS.

216. 1.º **Por un punto dado trazar una perpendicular á un plano.**

Pueden ocurrir dos casos: 1.º que el punto dado esté fuera del plano; 2.º que esté en el mismo plano.

Fig. 184.

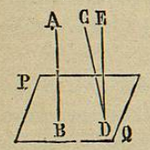


1.º Sea el punto dado O (fig. 184), situado fuera del plano PQ (*).

Bájense desde O sobre el plano tres rectas iguales OB, OC y OE; trácese una circunferencia que pase por sus piés B, C y E (**64**): únase el centro A de esta circunferencia con el punto dado O, y la recta AO será la perpendicular que se pide.

Porque la perpendicular levantada en A pasa por O (**175**, corolario 2.º); luego esta recta es la perpendicular pedida.

Fig. 185.

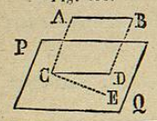


2.º Sea el punto D (fig. 185) situado en el plano PQ.

Desde un punto cualquiera A, fuera de este plano, bájese una perpendicular AB al mismo (caso ant.): por D trácese una paralela DE á esta perpendicular, y la recta DE será la perpendicular pedida (**180**, corol. 2.º, observacion).

217. 2.º **Por un punto dado A (fig. 186), fuera de un plano PQ, trazar una paralela á este plano.**

Fig. 186.



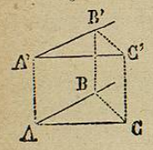
Trácese en el plano PQ una recta cualquiera CD, y por A una paralela AB á la CD; la recta AB será la pedida (**183**).

(*) En la resolucion de este problema no se hace mérito de las líneas OD, ED, etc., de la figura del márgen; lo cual depende de que la misma figura ha sido empleada en la demostracion de proposiciones en que era necesaria la consideracion de las líneas ahora omitidas.

Una cosa análoga sucede, por igual razon, con las tres figuras siguientes y con otras mas de que se hará uso en lo sucesivo.

218 3.º **Por un punto A' (fig. 187), situado fuera de un plano BAC, trazar otro plano paralelo al dado.**

Fig. 187.



Por A' trácense dos rectas A'B' y A'C' respectivamente paralelas á otras dos AB y AC, situadas en el plano dado BAC, y el plano determinado por B'A'C' será el pedido (**203**, corol.)

CAPÍTULO II.

De las superficies de revolucion.

219. *Llámanse* SUPERFICIES DE REVOLUCION *las engendradas por el movimiento de una línea, llamada* GENERATRIZ, *al rededor de una recta fija, que recibe el nombre de* EJE.

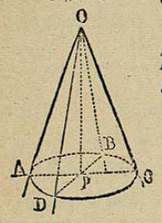
Entre las infinitas superficies de revolucion que pueden concebirse, tres son las que ahora nos interesa conocer: la *cónica*, la *cilíndrica* y la *esférica*.

ARTÍCULO PRIMERO.

De la superficie cónica.

220. *Se llama* SUPERFICIE CÓNICA *la engendrada por una recta que gira al rededor de otra con la cual concurre en un punto:* ó tambien *la originada por una recta sujeta á pasar por un punto fijo, llamado* VÉRTICE, *y á recorrer una curva plana cualquiera que toma el nombre de* DIRECTRIZ (*).

Fig. 188.



En este último caso *llamamos* EJE *la recta que pasa por el vértice y por el centro de la directriz, si le tiene.*

OABCD (fig. 188) es una superficie cónica, cuyo *vértice* es O: OA, OB, OC ú OD, prolongada cuanto se quiera por la parte inferior, es la *generatriz* en sus diferentes posiciones, ó las *generatrices* cuando se consideran dos ó mas: la curva ABCD es la *directriz*, y OP el *eje*.

(*) Si la generatriz se supone prolongada al otro lado del vértice, trazará otra superficie cónica, que con la primera forman la superficie cónica total, de la que cada una de las parciales es una *hoja*. Actualmente no consideramos mas que una de estas hojas.

La superficie cónica es RECTA *si el eje es perpendicular al plano de la directriz* (fig. 188), y OBLÍCUA *cuando el eje es oblícuo á dicho plano* (fig. 189).

Llámase superficie cónica CIRCULAR *aquella cuya directriz es una circunferencia.*

221. *Recibe el nombre de* CONO *el cuerpo limitado por una superficie cónica* OABCD, *y un plano* ABCD *que corta todas las generatrices.*

VÉRTICE *del cono es el vértice* O *de la superficie cónica:* BASE *el plano* ABCD *que limita la superficie cónica:* LADOS *las partes* OA, OB, *etc., de las generatrices, interceptadas entre el vértice y la base, y* EJE *es la recta* OP *que une el vértice con el centro de la base, si le tiene.*

El cono es RECTO *si el eje es perpendicular á la base* (fig. 188), *y* OBLÍCUO *en el caso contrario* (fig. 189).

Se llama ALTURA *del cono la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base.*

CONO CIRCULAR *es aquel cuya base es un círculo.*

COROL. 1.º *En el cono recto la altura coincide con el eje.*

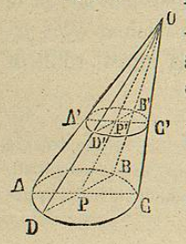
COROL. 2.º *Los lados del cono recto y circular son iguales* (**175**, 1.º).

OBSERVACION. El cono recto y circular se puede suponer tambien engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo APO al rededor de uno de sus catetos OP.

222. TEOREMA. *Si la superficie curva de un cono circular* (figura 189), *se corta por un plano* A'B'C'D' *paralelo á la base* ABCD, *la seccion es una circunferencia.*

En efecto, haciendo pasar planos por los lados OA, OB, OC, etc., y por el eje OP, las intersecciones AP y A'P', BP y B'P, etc., de estos planos con los paralelos ABCD y A'B'C'D' serán paralelas (**202**); luego los triángulos OPA y OP'A', OPB y OP'B', etc., son semejantes (**97**);

Fig. 189.



luego $\frac{AP}{A'P'}=\frac{OP}{OP'}, \frac{BP}{B'P'}=\frac{OP}{OP'}, \ldots$

de donde $\frac{AP}{A'P'}=\frac{BP}{B'P'}=$ etc.

pero AP=BP= etc., por radios de un mismo círculo; luego

A'P'=B'P'= etc.;

luego la curva A'B'C'D' es una circunferencia.

223. *Llámase* TRONCO *de cono ó cono* TRUNCADO la parte ABCDA'B'C'D' *comprendida entre la base del cono y un plano que le corta paralelamente á dicha base; y cono* DEFICIENTE *la parte del cono total, que queda al otro lado del plano secante.*

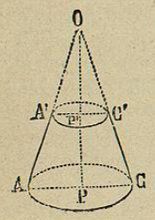
Los planos ABCD *y* A'B'C'D', *que limitan el tronco de cono, se llaman* BASES; *y* ALTURA *la distancia entre las bases.*

PROBLEMAS

224. 1.º Dado un tronco de cono circular y recto AC' (fig. 190), hallar la altura OP del cono total, y la OP', del cono deficiente.

Complétese el cono OPAC, y la semejanza de los triángulos OPA y OP'A', nos dará $\frac{AP}{A'P'}=\frac{OP}{OP'}$; de donde (Alg. **184**)

Fig. 190.



$$\frac{AP-A'P'}{AP}=\frac{OP-OP'}{OP} \text{ y } \frac{AP-A'P'}{A'P'}=\frac{OP-OP'}{OP'}$$

ó llamando r, r' los radios de las bases mayor y menor, y a la altura PP' del tronco,

$$\frac{r-r'}{r}=\frac{a}{OP} \text{ y } \frac{r-r'}{r'}=\frac{a}{OP};$$

y por consiguiente

$$OP=\frac{ar}{r-r'} \text{ y } OP'=\frac{ar'}{r-r'}.$$

OBSERVACION. De la misma manera se hallaria que el lado del cono total y el del cono deficiente son

$$OA=\frac{AA'\times r}{r-r'} \text{ y } OA'=\frac{AA'\times r'}{r-r'}.$$

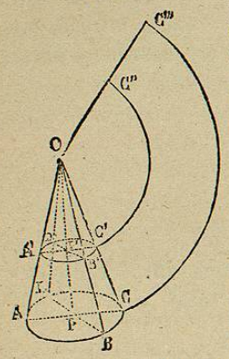
225. 2.º Desarrollar sobre un plano una superficie cónica.

Distinguiremos dos casos: 1.º que el cono á que esta superficie pertenece sea recto y circular; 2ª. que no reuna estas circunstancias.

1.º Sea el cono recto y circular OPAC (fig. 191). Tomando el lado

OC del cono por rádio, trácese un arco CC″ de igual longitud que la circunferencia de la base (**142**) : únase O con C″, y el sector OCC″ será la superficie cónica desarrollada.

Fig. 191.

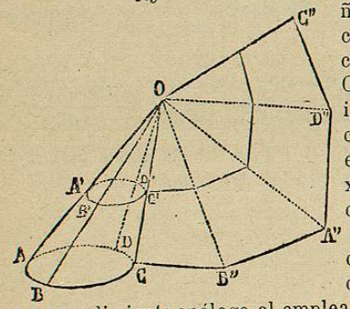


En efecto, haciendo rodar el cono en el plano que pasa por OC, los demas lados van coincidiendo con dicho plano, y como todos son de igual longitud (**221**, corol. 2.°), sus extremos se confunden sucesivamente con los puntos del arco CC″; y por consiguiente la circunferencia CBAD con el mismo arco, hasta que el punto D se ajusta con C″; luego la superficie cónica desarrollada es igual al sector OCC″.

Observacion. La superficie curva del cono deficiente recto y circular OP′A′C′, desarrollada tambien sobre un plano, es evidentemente el sector OC′C‴; y por consiguiente la del tronco AC′ es el *trapecio circular* CC′C‴C″.

2.° Sea OABCD un cono cualquiera (fig. 192). Divídase la directriz CBAD en partes bastante pequeñas para que se puedan tomar como rectas sin error sensible : constrúyanse los triángulos OCB″, OB″A″, etc., respectivamente iguales á los OCB, OBA, etc., considerados como rectilíneos; y el polígono OCB″...C″ será aproximadamente la superficie cónica desarrollada sobre un plano.

Fig. 192.



Observacion. La superficie curva de un tronco de cono cualquiera se puede desarrollar por un procedimiento análogo al empleado en este caso; advirtiendo sólo que la division de dicha superficie debe ser ahora en trapecios, como se advertirá en la figura.

ARTÍCULO II.

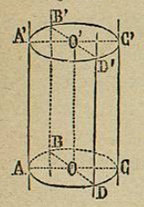
De la superficie cilíndrica

226. *Llámase* superficie cilíndrica *la engendrada por el movimiento de una recta que gira al rededor de otra, á la cual es siempre paralela : ó* tambien *la originada por una recta, que permaneciendo constantemente paralela á sí misma, recorra una curva plana cualquiera llamada* directriz.

En este último caso *llamanos* eje *la recta que siendo paralela á la generatriz, pasa por el centro de la directriz, si le tiene.*

ABCDA′B′C′D′ (fig. 193) es una superficie cilíndrica : AA′, BB′, CC′ ó DD′ considerada como indefinida, es la *generatriz* en sus diferentes posiciones, ó las *generatrices* cuando se consideran dos ó mas : la curva ABCD la *directriz*, y OO′ el *eje*.

Fig. 193.



La superficie cilíndrica es recta, *si el eje ó la generatriz es perpendicular al plano de la directriz* (fig. 193); *y* oblícua *cuando la generatriz ó el eje es oblícuo á dicho plano* (fig. 194).

Llámase superficie cilíndrica circular *aquella cuya directriz es una circunferencia.*

227. *Recibe el nombre de* cilindro *el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica y dos planos paralelos* ABCD *y* A′B′C′D′, *que cortan las generatrices.*

Bases *del cilindro son los planos* ABCD *y* A′B′C′D′ *que limitan la superficie curva :* lados *las partes* AA′, BB′, etc., *de las generatrices interceptadas por las bases : y* eje *la recta* OO′ *que une los centros de las bases, si le tienen.*

El cilindro es recto *si el eje es perpendicular á las bases* (figura 193), *y* oblícuo *en el caso contrario* (fig. 194).

Se llama altura *del cilindro la distancia entre las bases.*

Cilindro circular *es aquel cuyas bases son dos círculos.*

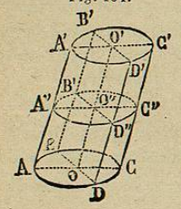
Corol 1.° *En el cilindro recto la altura es igual al eje.*

Corol 2.° *Los lados del cilindro son iguales* (**206**).

Observacion. El cilindro recto y circular se puede tambien suponer engendrado por la revolucion y de un rectángulo AOO′A′ al rededor de uno de sus lados OO′.

228. Teorema. *Si la superficie curva de un cilindro circular* (fig. 194) *se corta por un plano* A″B″C″D″, *paralelo á una de sus bases* ABCD, *la seccion es una circunferencia igual á esta base.*

Fig. 194.



Haciendo pasar planos por los lados AA′, BB′, etc., y por el eje OO′, las intersecciones de estos planos con la base y la seccion son las

rectas AO y A″O″, BO y B″O″, etc., paralelas (**202**): y como el eje OO′ lo es á los lados, las figuras AOO″A″ BOO″B″, etc., son paralelógramos; luego AO = A″O″, BO = B″O″, etc.: pero AO = BO = etc., por rádios de un mismo círculo, luego

A″O″ = B″O″ = etc.;

luego la seccion A″B″C″D″ es una circunferencia igual á la de la base ABCD.

Corol. *Las bases del cilindro circular son iguales* (*).

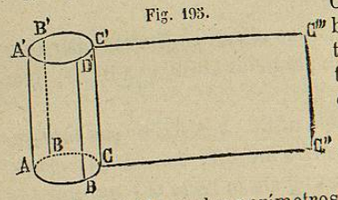
PROBLEMA.

229. Desarrollar sobre un plano una superficie cilíndrica.

Distinguirémos dos casos: 1.º que el cilindro á que esta superficie pertenece sea recto; 2.º que sea oblícuo.

1.º Sea el cilindro recto AC′ (fig. 195). Constrúyase sobre el lado CC′ un rectángulo CC″C‴C′, cuya base CC″ sea la curva ABCD rectificada, y el rectángulo construido será la superficie cilíndrica desarrollada.

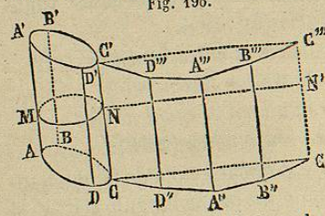
Fig. 195.



Se demuestra como en el número **225**, 1.º.

2.º Sea el cilindro oblícuo AC′ (fig. 196). Divídanse los perímetros de las bases, partiendo de un mismo lado en partes respectivamente iguales CD = C′D′, DA = D′A′ etc., y suficientemente pequeñas para que se puedan tomar como rectas sin error sensible: constrúyan se los paralelógramos CD″D‴C′, D″A″A‴D‴, etc., respectivamente iguales á los DCC′D′ DD′A′A, etc., considerados como planos, y el polígono CD″..... C″C‴B‴..... C′, será aproximadamente la superficie cilíndrica desarrollada sobre un plano.

Fig. 196.



Observacion. El rectángulo CC″C‴C′, cuya altura es el lado del cilindro, y cuya base debe ser igual evidentemente á la longitud NN′ de la seccion MN perpendicular al lado, es equivalente al polígono que representa la superficie cilíndrica desarrollada: porque lo que á cada paralelógramo le falta por su parte superior para llenar dicho rectángulo, le sobra por la inferior, como sería fácil demostrar.

(*) Esta propiedad es comun á todos los cilindros, como fácilmente se comprende; por cuya razon omitimos la demostracion, que por otra parte tampoco es de este lugar.

ARTÍCULO III.

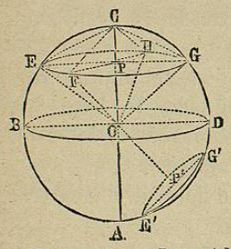
De la superficie esférica.

230. *Se llama* superficie esférica *la engendrada por la revolucion de una semicircunferencia* ABC (fig. 197) *al rededor de su diámetro* AC.

Recibe el nombre de esfera *el cuerpo limitado por una superficie esférica.*

Observacion. Con frecuencia se suele llamar esfera la superficie esférica; pero el sentido en que se hable, denotará si se trata del cuerpo geométrico ó de su superficie.

Fig. 197.



Llámase *centro* el punto O, centro de la semicircunferencia generatriz; *rádio* toda recta OA que desde el centro va á terminar en la superficie esférica, y *diametro* la recta que pasando por el centro termina por sus dos extremos en la superficie esférica.

Corol. 1.º *Los rádios de una esfera son iguales.*

Porque son rádios de la semicircunferencia generatriz en alguna de sus posiciones.

Corol. 2.º *Los diámetros de una esfera son iguales.*

Porque cada uno se compone de dos rádios.

Se llama eje *de la esfera el diámetro* AC *de la semicircunferencia generatriz.*

Se llaman polos *de la esfera los extremos* A *y* C *del eje.*

231. Teorema. 1.º *La interseccion de un plano* EG *con la superficie esférica* O, *es una circunferencia* EFGH.

Trazando el rádio OC perpendicular á dicho plano, y los OE, OF, OG, OH, etc., las rectas EP, FP, GP, etc., que unen el pié de la perpendicular al plano con los diferentes puntos de la seccion, son iguales (**175**, rec. 1.º); luego la curva EFGH es una circunferencia.

Llámase polo *de una circunferencia* EFGH, *trazada en la superficie esférica, cada uno de los puntos de esta que equidistan de dicha circunferencia.*

Corol. *Los extremos* A *y* C *del diametro* AC, *perpendicular al plano de una circunferencia* EFGH *en su centro* P, *son polos de*