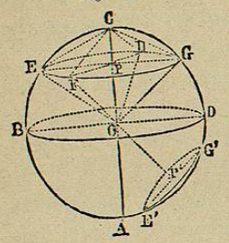
dicha circunferencia, y los únicos que puede tener (**175**, corol. 2.º).

232. Teorema 2.º *Si haciendo centro en un punto* C (figura 197) *de la superficie esférica, con un rádio cualquiera* CE *se traza una curva* EFGH, *esta curva será una circunferencia.*

Trácese el rádio OC de la esfera, y otros mas OE, OF, OG, etc.; á diferentes puntos de la curva : los triángulos OEC, OFC, OGC, etc., que tienen OE = OF = OG = etc., por rádios de la esfera, EC = FC = GC = etc., por hipótesis, y el lado OC comun, son iguales (**72**, 1.º); luego si desde los vértices E, F, G, etc., se bajan perpendiculares sobre el lado comun OC, se encontrarán evidentemente en un mismo punto P; luego estarán en un mismo plano (**171**, rec.) : y como ademas EP = FP = GP = etc., la curva EFGH será una circunferencia.

Fig. 197.



Observacion. El punto C, que ha servido de centro para trazar una circunferencia, es uno de sus polos.

233. Teorema 3.º *En una misma esfera:* 1.º *los planos de circunferencias iguales equidistan del centro;* 2.º *de los planos de dos circunferencias desiguales, el correspondiente á la mayor se aproxima mas al centro que el de la menor.*

1.º Sean las circunferencias, cuyos centros son P y P', iguales (fig. 197). Haciendo pasar por el centro O de la esfera y por los P y P' un plano, las intersecciones de este con los planos de las circunferencias serán los diámetros EG y E'G' de las mismas; luego EG y E'G' son cuerdas, iguales por hipótesis, de la circunferencia originada por el plano que pasa por O, P y P'; luego equidistan del centro O (**40**, 1.º); luego OP = OP' : pero OP y OP' miden tambien la distancia del centro de la esfera á los planos de dichas circunferencias (**174**, corol.); luego estos planos equidistan del centro de la esfera.

2.º Sea la circunferencia P mayor que P'. Repitiendo la construccion anterior se hallará del mismo modo OP<OP' (**40**, 2.º); luego el plano de la circunferencia P se aproxima mas al centro que el de la circunferencia P'.

Recíprocamente. *En una misma esfera:* 1.º *las circunferencias cuyos planos equidistan del centro son iguales;* 2.º *de dos circunferencias cuyos planos no equidistan del centro, la correspondiente al plano que mas se aproxima al centro es la mayor* (**12**).

Corol. 1.º *La mayor circunferencia de la esfera es aquella cuyo plano pasa por el centro.*

Por esta razon se llama circunferencia *máxima* y las demas *menores.* La circunferencia cuyo diámetro es BD (fig. 197) es máxima, y las que tienen por diámetros EG y E'G' son menores.

Corol. 2.º *Las circunferencias máximas de una esfera son iguales.*

Corol. 3.º *Dos puntos de la superficie esférica que no sean extremos de un mismo diámetro, determinan una circunferencia máxima.*

Porque estos dos puntos y el centro de la esfera, forman un sistema de tres puntos no en línea recta, que determinan la posicion del plano de dicha circunferencia (**169**).

Corol. 4.º *Las circunferencias máximas se dividen mútuamente en dos partes iguales.*

Porque la interseccion de sus planos es un diámetro.

Corol. 5.º *Una circunferencia máxima* BD *divide la superficie esférica en dos partes iguales.*

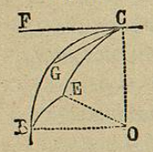
Porque colocando la parte superior BCD sobre la inferior BAD, de modo que la circunferencia permanezca comun, y que el punto C caiga hácia A, estas dos partes coinciden en todos sus puntos; porque de lo contrario estos puntos no equidistarian del centro O.

Observacion. Esta superposicion prueba tambien que un círculo máximo divide la esfera en dos partes iguales, que se llaman *hemisferios.*

231. *Recibe el nombre de* Ángulo esférico *la extension comprendida entre dos arcos de circunferencia máxima* BC *y* EC (fig. 198), *llamados* lados, *que se reunen en un mismo punto* C, *llamado* vértice.

Medida *de un ángulo esférico es el ángulo rectilíneo* FCG, *formado por dos tangentes* FC *y* GC, *una á cada arco, en el vértice del ángulo.*

Fig. 198.



Corol. *La medida de un ángulo esférico es medida tambien del diedro formado por los planos que determinan sus lados.*

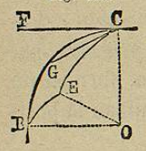
Porque siendo FC tangente al arco BC en el punto C, es perpendicular al rádio OC (**44**, rec. 1.º) : por igual razon GC es perpendicular al mismo rádio y en el mismo punto : y

como estas rectas están en los planos de los arcos, el ángulo rectilíneo FCG es el rectilíneo correspondiente al diedro BCOE (**194**); luego tambien será su medida (**196**, obs.).

235. *Llámase* TRIÁNGULO ESFÉRICO *la porcion de superficie esférica comprendida por tres arcos de circunferencia máxima:* BCE (fig. 198) es un triángulo esférico.

OBSERVACION. Si los vértices B, C, E del triángulo esférico BCE, se unen con el centro O de la esfera por medio de rádios, estos forman un ángulo triedro O, cuyos ángulos diedros OB, OC y OE tienen la misma medida que los ángulos esféricos CBE, BCE y BEC (**234**, corol.), y cuyos ángulos rectilíneos BOC, BOE y COE tienen por medida los lados BC, BE y CE del mismo triángulo; luego las propiedades de los triángulos esféricos se deducen de las de los ángulos triedros, luego reemplazando los nombres de *caras* y *ángulos diedros* por los de *lados* y *ángulos*, se tendrá:

Fig. 198.



1.º *En todo triángulo esférico un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia* (**211**).

2.º *La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que una circunferencia máxima* (**212**).

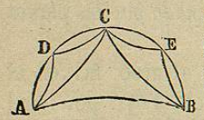
3.º *La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis* (**213**).

4.º *Dos triángulos esféricos de una misma esfera ó esferas iguales son iguales si tienen:* 1.º *sus tres lados respectivamente iguales*; 2.º *dos lados iguales é igual el ángulo comprendido*; 3.º *un lado igual contiguo á dos ángulos respectivamente iguales*; 4.º *sus tres ángulos respectivamente iguales; con tal que en todos estos casos los elementos estén dispuestos del mismo modo* (**214**).

5.º *En todo triángulo esférico:* 1.º *á lados iguales se oponen ángulos iguales*; 2.º *á mayor lado se opone mayor ángulo; y recíprocamente* (**215**).

236. TEOREMA 4.º *El arco* AB (fig. 199) *de circunferencia máxima, menor que* 180º, *que une dos puntos* A *y* B *de una superficie esférica, es menor que otra curva cualquiera* ACB, *trazada sobre la misma superficie, y que une dichos puntos.*

Fig. 199.



En efecto, uniendo A con C, y C con B por arcos de circunferencia máxima, se tiene (**235**, obs., 1.º)

$$AB < AC + CB.$$

Tomando entre A y C, y entre C y B, los puntos intermedios D y E; y trazando los arcos de circunferencia máxima AD, DC, CE y EB, se tendrá tambien

$$AC < AD + DC \quad y \quad CB < CE + EB;$$

de donde $$AC + CB < AD + DC + CE + EB.$$

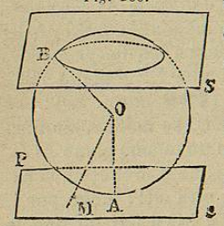
Si se continúa tomando puntos intermedios, se seguirá formando líneas poligonales esféricas, de las que cada una tiene más puntos comunes con la curva y es mayor que la anterior; luego la curva es el límite superior de dichas líneas poligonales [**51**, (*)], y como AB es menor que la mas corta de estas, con mayor razon será menor que la curva propuesta ACB.

237. *Se llama* PLANO TANGENTE *á la superficie esférica el que no tiene con esta mas que un punto comun; y* SECANTE *el que tiene con la misma más de un punto comun*, esto es, una circunferencia (**231**).

El punto comun á la superficie esférica y al plano tangente recibe el nombre de *punto de contacto*.

238. TEOREMA 5.º *Todo plano que pasa por el extremo exterior de un rádio de la superficie esférica:* 1.º *si es perpendicular al rádio será tangente á esta superficie;* 2.º *si es oblícuo será secante.*

Fig. 200.



1.º Si el plano PQ (fig. 200) es perpendicular al rádio OA en el extremo A, el rádio tambien lo será al plano; luego uniendo el punto O con otro cualquiera M del mismo plano, la recta OM será oblícua á este (**172**), luego será mayor que OA (**174**); luego el punto M estará fuera de la superficie esférica; luego el plano PQ no tiene comun con esta superficie mas que el punto A, luego le es tangente.

2.º Si el plano RS (fig. 200) es oblícuo al rádio OB en el extremo B, el rádio tambien lo será al plano; luego bajando desde O sobre este oblícuas iguales con OB, los piés de estas se hallarán á la vez en la superficie esférica y en el plano: y como el lugar geométrico de los piés de estas oblícuas sobre el plano es una circunferencia (**175**, corol. 1.º), el plano y la superficie esférica tienen una circunferencia comun, luego el plano es secante de la superficie esférica.

Recíprocamente. *Todo plano que pasa por el extremo exterior de un rádio de la superficie esférica : 1.º si es tangente á esta superficie será perpendicular al rádio ; 2.º si es secante será oblícuo* (**12**).

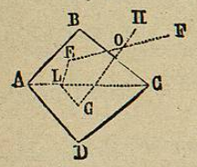
Corol. *Por un punto de la superficie esférica no se puede trazar mas que un plano tangente.*

Porque si se pudiesen trazar dos ó mas, habria en el extremo de un rádio dos ó mas planos perpendiculares á este; lo que es absurdo (**173**).

239. Teorema 6.º *Por cuatro puntos* A, B, C y D (fig. 201), *que no están en un mismo plano, puede pasar una superficie esférica, pero nada mas que una sola.*

Tres cualesquiera de estos puntos A, B, C estarán en un mismo plano (**169**), y A, C, D estarán tambien en otro, pero diferente el primero; puesto que por hipótesis los cuatro no están en uno mismo. Supongamos que E y G sean los centros de las circunferencias circunscriptas á los triángulos ABC y ACD : desde estos puntos E y G bájense perpendiculares sobre la AC, comun seccion de los planos, y estas perpendiculares se encontrarán en un punto L (**41**); luego la recta AC será perpendicular al plano ELG (**171** cor. 1º.); luego los planos ABC y ACD son perpendiculares al ELG (**198**), y este lo será á los dos primeros. Levantando ahora en el punto E la perpendicular EF al plano ABC, esta perpendicular se hallará en el plano ELG (**198**, corol. 2.º) : por igual razon la GH, perpendicular al plano ACD, se hallará tambien en el ELG; luego las rectas EF y GH están en un mismo plano ELG. Por otra parte, EF y GH no son paralelas; porque si lo fuesen, la EL perpendicular á una de ellas EF, lo sería á la otra GH; luego por L habria dos perpendiculares EL (prolongada) y LG á GH, lo que es imposible (**23**). Luego EF y GH se encuentran en un punto O.

Fig. 201.



Ahora, siendo EF el lugar geométrico de los puntos equidistantes de A, B y C (**175**, corol. 2.º), y GH el de los puntos equidistantes de A, D y C, el punto O donde se cortan será el único equidistante de A, B, C, y D; luego por estos puntos puede pasar una superficie esférica, y no mas que una.

Corol. 1º. *Cuatro puntos, que no están en un mismo plano, determinan la posicion de una superficie esférica.*

Corol. 2.º *La interseccion de dos superficies esféricas tiene todos sus puntos en un mismo plano.*

Porque de lo contrario se podrían tomar tres puntos de los comunes en un plano, y uno en otro plano distinto; y las dos superficies esféricas se confundirian en una sola, contra la hipótesis.

Corol. 3.º *La interseccion de dos superficies esféricas es una circunferencia.*

Porque esta interseccion tiene todos sus puntos en un mismo plano (corol. anterior); luego es la interseccion de un plano con cada una de las superficies esféricas; luego es una circunferencia (**231**).

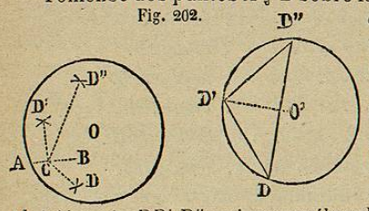
Observacion. Con suma facilidad se pueden demostrar, relativamente á la interseccion y contacto de dos superficies esféricas, teoremas análogos á los demostrados acerca de la interseccion y contacto de dos circunferencias (**47** y **48**).

PROBLEMA.

240. Dada una esfera O (fig. 202), determinar su rádio

Tómense dos puntos A y B sobre la superficie esférica : haciendo centro en estos puntos, con un rádio cualquiera, trácense dos arcos que se corten en D y D' : con un rádio diferente trácense otros dos arcos, que se corten en otro punto D'' : con las distancias DD', D'D'' y DD'' constrúyase aparte, en un plano, el triángulo DD' D'' : circunscríbasele una circunferencia (**61**), y el rádio O'D' de esta será igual al rádio de la esfera.

Fig. 202.



En efecto, uniendo los puntos D, D'. D'' con el medio C de la recta AB, las rectas CD, CD', CD'', son perpendiculares á la AB en el punto C (**26**, corol. 2.º); luego están en el plano perpendicular á la AB en su punto medio (**171**, rec. corol.); luego el centro O de la esfera estará en el mismo plano (**171**, corol. 2.º); luego la circunferencia que pasa por los puntos D, D', D'' es máxima; y como esta es igual á la circunscripta al triángulo DD'D'', el rádio O'D' de la última es igual al rádio de la esfera.

CAPÍTULO III.

De los poliedros.

Definiciones preliminares.

241. *Se llama* poliedro *el cuerpo limitado por planos.*

Estos planos, limitados por sus mútuas intersecciones, los ángulos diedros ó poliedros que forman, los vértices de estos y las aristas, reciben los nombres de *caras*, *ángulos*, *vértices* y *aristas* del poliedro.

Diagonal *es toda línea que une dos vértices, que no están en una misma cara.*