Recíprocamente. *Todo plano que pasa por el extremo exterior de un rádio de la superficie esférica : 1.º si es tangente á esta superficie será perpendicular al rádio ; 2.º si es secante será oblícuo* (**12**).

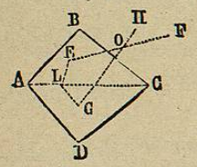
Corol. *Por un punto de la superficie esférica no se puede trazar mas que un plano tangente.*

Porque si se pudiesen trazar dos ó mas, habria en el extremo de un rádio dos ó mas planos perpendiculares á este; lo que es absurdo (**173**).

239. Teorema 6.º *Por cuatro puntos* A, B, C y D (fig. 201), *que no están en un mismo plano, puede pasar una superficie esférica, pero nada mas que una sola.*

Tres cualesquiera de estos puntos A, B, C estarán en un mismo plano (**169**), y A, C, D estarán tambien en otro, pero diferente el primero; puesto que por hipótesis los cuatro no están en uno mismo. Supongamos que E y G sean los centros de las circunferencias circunscriptas á los triángulos ABC y ACD : desde estos puntos E y G bájense perpendiculares sobre la AC, comun seccion de los planos, y estas perpendiculares se encontrarán en un punto L (**41**); luego la recta AC será perpendicular al plano ELG (**171** cor. 1º.); luego los planos ABC y ACD son perpendiculares al ELG (**198**), y este lo será á los dos primeros. Levantando ahora en el punto E la perpendicular EF al plano ABC, esta perpendicular se hallará en el plano ELG (**198**, corol. 2.º) : por igual razon la GH, perpendicular al plano ACD, se hallará tambien en el ELG; luego las rectas EF y GH están en un mismo plano ELG. Por otra parte, EF y GH no son paralelas; porque si lo fuesen, la EL perpendicular á una de ellas EF, lo sería á la otra GH; luego por L habria dos perpendiculares EL (prolongada) y LG á GH, lo que es imposible (**23**). Luego EF y GH se encuentran en un punto O.

Fig. 201.



Ahora, siendo EF el lugar geométrico de los puntos equidistantes de A, B y C (**175**, corol. 2.º), y GH el de los puntos equidistantes de A, D y C, el punto O donde se cortan será el único equidistante de A, B, C, y D; luego por estos puntos puede pasar una superficie esférica, y no mas que una.

Corol. 1º. *Cuatro puntos, que no están en un mismo plano, determinan la posicion de una superficie esférica.*

Corol. 2.º *La interseccion de dos superficies esféricas tiene todos sus puntos en un mismo plano.*

Porque de lo contrario se podrían tomar tres puntos de los comunes en un plano, y uno en otro plano distinto; y las dos superficies esféricas se confundirian en una sola, contra la hipótesis.

Corol. 3.º *La interseccion de dos superficies esféricas es una circunferencia.*

Porque esta interseccion tiene todos sus puntos en un mismo plano (corol. anterior); luego es la interseccion de un plano con cada una de las superficies esféricas; luego es una circunferencia (**231**).

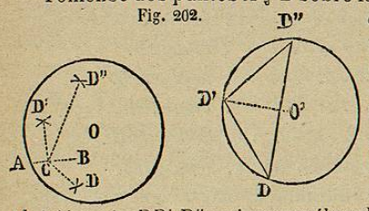
Observacion. Con suma facilidad se pueden demostrar, relativamente á la interseccion y contacto de dos superficies esféricas, teoremas análogos á los demostrados acerca de la interseccion y contacto de dos circunferencias (**47** y **48**).

PROBLEMA.

240. Dada una esfera O (fig. 202), determinar su rádio

Tómense dos puntos A y B sobre la superficie esférica : haciendo centro en estos puntos, con un rádio cualquiera, trácense dos arcos que se corten en D y D' : con un rádio diferente trácense otros dos arcos, que se corten en otro punto D'' : con las distancias DD', D'D'' y DD'' constrúyase aparte, en un plano, el triángulo DD' D'' : circunscríbasele una circunferencia (**61**), y el rádio O'D' de esta será igual al rádio de la esfera.

Fig. 202.



En efecto, uniendo los puntos D, D'. D'' con el medio C de la recta AB, las rectas CD, CD', CD'', son perpendiculares á la AB en el punto C (**26**, corol. 2.º); luego están en el plano perpendicular á la AB en su punto medio (**171**, rec. corol.); luego el centro O de la esfera estará en el mismo plano (**171**, corol. 2.º); luego la circunferencia que pasa por los puntos D, D', D'' es máxima; y como esta es igual á la circunscripta al triángulo DD'D'', el rádio O'D' de la última es igual al rádio de la esfera.

CAPÍTULO III.

De los poliedros.

Definiciones preliminares.

241. *Se llama* poliedro *el cuerpo limitado por planos.*

Estos planos, limitados por sus mútuas intersecciones, los ángulos diedros ó poliedros que forman, los vértices de estos y las aristas, reciben los nombres de *caras*, *ángulos*, *vértices* y *aristas* del poliedro.

Diagonal *es toda línea que une dos vértices, que no están en una misma cara.*

Un poliedro se llama CONVEXO *cuando su superficie no puede ser atravesada por una recta más que en dos puntos.*

Los poliedros de que nos ocuparemos en lo sucesivo serán convexos, si no se advierte lo contrario.

242. *Llámase* POLIEDRO REGULAR *aquel cuyas caras son polígonos regulares é iguales, y cuyos ángulos poliedros son tambien iguales; é* IRREGULAR *el que no reune estas condiciones.*

Por razon del número de caras que pueden tener los poliedros se clasifican del modo siguiente :

El poliedro que tiene 4 *caras* se llama *tetraedro.*
5 . . . . . *pentaedro.*
6 . . . . . *exaedro.*
7 . . . . . *heptaedro.*
8 . . . . . *octaedro.*
12 . . . . . *dodecaedro.*
20 . . . . . *icosaedro.*

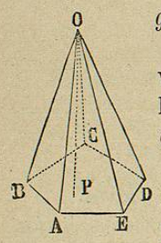
Los poliedros de diferente número de caras que los precedentes no tienen nombres especiales, y se les llama poliedros de 9, 11, 13,....., 100, etc., caras.

ARTÍCULO PRIMERO.

De las pirámides.

243. *Se da el nombre de* PIRÁMIDE *á un poliedro que tiene una cara poligonal cualquiera, y las demas son triángulos cuyos vértices se reunen en un mismo punto.*

Fig. 203.



La cara poligonal se llama *base*, *vértice* el vértice comun á las caras triangulares, y *altura* la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base.

OABCDE (fig. 203) es una pirámide, cuya base es el polígono ABCDE, el punto O el vértice y la recta OP la altura.

244. *Se llama pirámide* REGULAR *aquella cuya base es un polígono regular y cuya altura cae en el centro del polígono de la base; é* IRREGULAR *la que no reune estas condiciones.*

COROL. 1.º *Las aristas laterales de una pirámide regular son iguales* (**175**, 1.º).

COROL. 2.º *Las caras laterales son triángulos iguales é isósceles.*

Llámase APOTEMA *en una pirámide regular la altura de cualquiera de sus triángulos laterales.*

OBSERVACION. Las pirámides regulares no son siempre poliedros regulares, tales como se han definido en el número **242**; una sola pirámide puede ser poliedro regular (V. **260**).

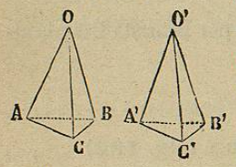
245. Por razon del número de lados del polígono de la base, las pirámides se dividen en *triangulares, cuadrangulares, pentagonales,* etc., segun dicho polígono sea triángulo, cuadrilátero, pentágono, etc.

OBSERVACION. La pirámide triangular es un tetraedro, y es ademas el poliedro mas sencillo ó de menor número de caras; porque es imposible cerrar espacio con ménos de cuatro planos.

246. TEOREMA 1.º *Dos tetraedros son iguales si tienen :* 1.º *tres caras respectivamente iguales ;* 2.º *dos caras respectivamente iguales, é igual el diedro comprendido ;* 3.º *una cara igual contigua á tres diedros respectivamente iguales; con tal que en todos estos casos los elementos estén dispuestos del mismo modo.*

1.º Sean los tetraedros OABC y O'A'B'C' (fig. 204); y supongamos que los triángulos AOB=A'O'B', BOC=B'O'C' y AOC=A'O'C'.

Fig. 204



De la igualdad de estos triángulos se deduce la de los ángulos rectilíneos, que forman los triedros en O y en O'; luego estos triedros son iguales (**214**, 1.º); luego superpuestos coinciden, y al verificarlo, coinciden tambien las caras ABC y A'B'C'; luego los tetraedros son iguales.

2.º Supongamos que los mismos tetraedros tengan los diedros AO=A'O' y los triángulos AOB=A'O'B', AOC=A'O'C'.

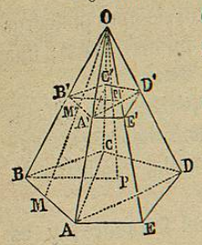
Superponiendo estos tetraedros de modo que la cara AOB coincida con su igual A'O'B', la cara AOC caerá sobre A'O'C', por ser iguales los diedros AO y A'O' : y como estas caras son tambien iguales, la arista OC coincide con O'C', la OB con O'B', etc.; luego los dos tetraedros coinciden en todos sus puntos, luego son iguales.

3.º Se demuestra de una manera análoga á los anteriores.

247. TEOREMA 2.º *Si una pirámide* (OABCDE (fig. 205) *es*

cortada por un plano A'B'C'D'E' *paralelo á la base:* 1.º *el polígono de la seccion es semejante al de la base;* 2.º *las áreas de estos polígonos son proporcionales á los cuadrados de sus distancias* OP *y* OP' *al vértice de la pirámide.*

Fig. 205.



1.º Las rectas AB y A'B', BC y B'C', CD y C'D', etc., son paralelas (**202**): por igual razon, si se trazan las diagonales AC y AD en el polígono de la base, y por ellas y la arista OA se hacen pasar planos, AC y A'C', AD y A'D' serán tambien paralelas; luego los triángulos ABC y A'B'C' tienen sus ángulos respectivamente iguales (**181**), luego son semejantes: y como lo mismo sucede con los triángulos ACD y A'C'D', etc., resulta que los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' son tambien semejantes (**101**).

2.º De la semejanza de los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' se deduce (**161**)

$$\frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}.$$

Siendo AB y A'B' paralelas, los triángulos AOB y A'OB' son semejantes, luego

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BO}{B'O}:$$

por igual razon, haciendo pasar un plano por la arista BO y la altura PO, se tendrá

$$\frac{BO}{B'O}=\frac{PO}{P'O}.$$

De esta proporcion y la anterior se deduce (Alg. **183**)

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{PO}{P'O} \text{ ó (Alg. } \mathbf{182}\text{, 4.ª)} \frac{AB^2}{A'B'^2}=\frac{PO^2}{P'O^2}:$$

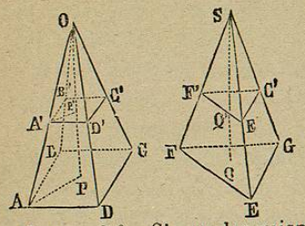
pero esta última proporcion y la primera tienen una razon comun; luego

$$\frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'}=\frac{PO^2}{P'O^2}.$$

Corol. 1.º *Si dos pirámides* OABCD *y* SEFG (fig. 206) *de igual altura, se cortan por planos* A'B'C'D' *y* E'F'G', *paralelos á las bases y equidistantes de los vértices, las áreas de las secciones son proporcionales á las de dichas bases.*

Porque segun el teorema, se tiene

Fig. 206.



$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{PO^2}{P'O^2} \text{ y } \frac{EFG}{E'F'G'}=\frac{QS^2}{Q'S^2}:$$

mas por hipótesis PO=SQ y P'O=Q'S; luego estas proporciones tienen igual la última razon, luego

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{EFG}{E'F'G'}.$$

Corol. 2.º *Si,* en las mismas hipótesis, *las bases son equivalentes, las secciones tambien lo serán.*

Porque en tal caso los antecedentes de la proporcion anterior son iguales, luego tambien lo serán los consecuentes.

248. *Llámase* TRONCO *de pirámide ó pirámide* TRUNCADA *la parte* AC' *de una pirámide comprendida entre la base de esta y el plano que la corta paralelamente á dicha base, y pirámide* DEFICIENTE *la parte de pirámide que queda al otro lado del plano secante.*

Los planos ABCD y A'B'C'D', que limitan el tronco, se llaman *bases* del mismo, y *altura* la distancia entre las bases.

249. PROBLEMA. Dado un tronco de pirámide AC' (fig. 206) **hallar la altura** OP **de la pirámide total y la** OP' **de la pirámide deficiente.**

Supongamos completa la pirámide OABCD, y la semejanza de los triángulos AOB y A'OB' nos dará

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AO}{A'O}:$$

la de los triángulos AOP y A'OP' da tambien

$$\frac{AO}{A'O}=\frac{OP}{OP'};$$

de cuyas proporciones se deduce

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{OP}{OP'},$$

de donde (Alg. **184**)

$$\frac{AB-A'B'}{AB}=\frac{OP-OP'}{OP} \text{ y } \frac{AB-A'B'}{A'B'}=\frac{OP-OP'}{OP'};$$

ó llamando l y l' los lados paralelos de la base y de la seccion y a la altura del tronco,

$$\frac{l-l'}{l}=\frac{a}{OP} \text{ y } \frac{l-l'}{l'}=\frac{a}{OP'};$$

y por consiguiente

$$OP=\frac{a\times l}{l-l'} \quad y \quad OP'=\frac{a\times l'}{l-l'}.$$

ARTÍCULO II.

De los prismas.

250. *Se llama* PRISMA *un poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas y las demas son paralelógramos.*

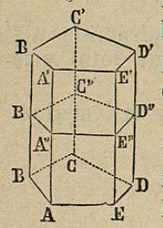
Las caras iguales y paralelas se llaman *bases*, y *altura* la distancia entre estas.

El poliedro AD′ (fig. 207) es un prisma cuyas bases son los polígonos ABCDE y A′B′C′D′E′, y su altura la recta CC′.

COROL. 1.º *Las aristas de un prisma son paralelas* (**180**, corolario 3.º) *é iguales* (**206**).

COROL. 2.º Para construir un prisma se traza una de sus bases ABCDE : en los vértices A, B, C, etc., se levantan las aristas laterales AA′, BB′, CC′, etc., iguales y paralelas, y se unen los extremos de estas aristas consecutivas por rectas A′B′, B′C′, C′D′, etc.

Fig. 207.



Porque las caras laterales BA′, BC′, CD′, etc., son paralelógramos (**79**, rec. 2.º); luego AB es igual y paralela á A′B′, BC á B′C′, CD á C′D′, etc.; luego los ángulos ABC=A′B′C′, BCD=B′C′D′, etc. (**181**); luego los polígonos ABCDE y A′B′C′D′E′ son tambien iguales (**84**).

251. *Se llama* PRISMA RECTO *aquel cuyas aristas son perpendiculares á las bases, y* OBLÍCUO *aquel en que son oblícuas.*

Prisma REGULAR *es aquel cuyas bases son polígonos regulares y que ademas es recto.*

COROL. *En el prisma recto la altura es igual á cualquiera de sus aristas, y las caras laterales son rectángulos; en el prisma regular los rectángulos laterales son iguales entre sí.*

OBSERVACION. Los prismas regulares no son siempre poliedros regulares como se han definido (**242**); el cubo es el único prisma regular, que es al mismo tiempo poliedro regular (V **250**).

252. TEOREMA 1.º *Si un prisma* AD′ *se corta por un plano* A″B″C″D″E″, *paralelo á las bases, la seccion es un polígono igual á una cualquiera de estas* ABCDE.

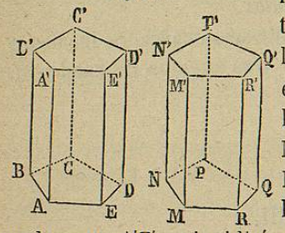
Las rectas AB y A″B″, BC y B″C″, CD y C″D″, etc., son paralelas (**202**); luego los ángulos ABC y A″B″C″ BCD, y B″C″D″, etc., son iguales (**181**).

Por otra parte, siendo AA″ y BB″, BB″ y CC″, etc., paralelas, los cuadriláteros AB″, BC″, CD″, etc., son paralelógramos; luego AB=A″B″, BC=B″C″, etc. Luego los polígonos ABCDE y A″B″C″D″E″ tienen sus ángulos y lados respectivamente iguales; luego son iguales (**84**).

253. TEOREMA 2.º *Dos prismas* AD′ y MQ′ (fig. 208) *son iguales, si tienen un ángulo triedro* A *y* M, *formado por tres caras respectivamente iguales*, ABCDE=MNPQR, AB′ = MN′ y AE′ = MR′ *é igualmente dispuestas.*

Siendo iguales respectivamente y estando dispuestos del mismo modo los polígonos, que forman los triedros en A y en M, estos serán iguales (**214**, 1.º); luego superponiendo el prisma AD′ al MQ′, de manera que la cara ABCDE coincida con su igual MNPQR, la cara AB′ caerá sobre la MN′, y como estas caras son iguales, la recta A′B′ coincidirá con M′N′: por igual razon A′E′ coincidirá con M′R′; luego la base A′B′C′D′E′ coincide con su igual M′N′P′Q′R′, luego los vértices de los dos primas coinciden, luego estos son evidentemente iguales.

Fig. 208.



COROL. *Dos prismas rectos de igual base y altura son iguales.*

Porque los triedros A y M son iguales, por ser los ángulos BAE=NMR, BAA′=NMM′ y A′AE=M′MR, por hipótesis: las caras ABCDE = MNPQR (tambien por hipótesis), y BA′=NM′, AE′=MR′ (**79**, corol. 2.º).

254. Por razon del número de lados de las bases, los prismas se dividen en *triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.*, segun dichas bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc.

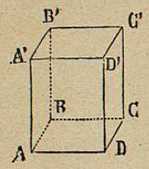
Llámase PARALELIPÍPEDO *el prisma cuyas bases son paralelógramos.*

255. TEOREMA 3.º *En todo paralelipípedo* AC′ (fig. 209) *las*

caras laterales y opuestas AB′ y DC′, AD′ y BC′, *son tambien iguales y paralelas.*

La recta AA′ es igual y paralela á DD′ (**250**, corol. 1.°) y por hipótesis AB es igual y paralela con DC; luego la cara AB′ es igual y paralela á DC′ (**79**, corolario 2.°, y **202**, corol.). Por igual razon la cara AD′ es igual y paralela á BC′.

Fig. 209.



Corol. *En un paralelipípedo se pueden tomar por bases dos caras opuestas cualesquiera*

256. *Se llama* PARALELIPÍPEDO RECTÁNGULO *aquel que tiene por bases dos paralelógramos rectángulos y además es recto.*

Corol. *Las caras de un paralelipípedo rectángulo son paralelógramos rectángulos, y sus ángulos diedros son rectos.*

257. *Se da el nombre de* CUBO *á un paralelipípedo rectángulo, cuyas aristas son todas iguales.*

Corol. *El cubo es un exaedro regular.*

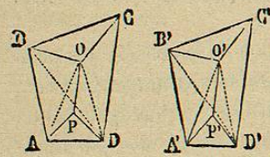
Porque sus caras son evidentemente seis cuadrados iguales, y sus ángulos poliedros, formados por tres ángulos de cuadrado, son tambien iguales (**214**, 1.°).

ARTÍCULO III.

De los poliedros en general.

258. Teorema 1.° *Si dos poliedros* OPABCD *y* O′P′A′B′C′D′ (fig. 210) *tienen sus caras* ABCD y A′B′C′D′, ABOP y A′B′O′P′ etc., *y sus ángulos diedros* AB y A′B′, OB y O′B′, etc., *respectivamente iguales é igualmente dispuestos, son iguales.*

Fig. 210.



Superpóngase el primer poliedro al segundo, de modo que la cara ABCD coincida con su igual A′B′C′D′, la cara ABOP caerá sobre A′B′O′P′ por ser los diedros

AB y A′B′ iguales, y la arista OP coincidirá con la O′P′, por la igualdad de estas caras; luego los vértices de estos poliedros coinciden, luego los poliedros son iguales.

Del mismo modo se demostraria cualquiera que fuese el número de caras de los poliedros.

259. Teorema 2.° *Si dos poliedros* OPABCD *y* O′P′A′B′C′D′ *se componen del mismo número de tetraedros* OABD *y* O′A′B′D′, OAPD *y* O′A′P′D′, OBCD *y* O′B′C′D′, *respectvamente iguales é igualmente dispuestos, los poliedros son iguales.*

La igualdad de los tetraedros OABD y O′A′B′D′ nos da los diedros AB=A′B′.

De los mismos tetraedros resulta la igualdad de los diedros OADB y O′A′D′B′: y como los tetraedros OAPD y O′A′P′D′ son tambien iguales, los diedros OADP y O′A′D′P′ lo serán de la misma manera: luego los diedros

$$OADB + OADP = O'A'D'B' + O'A'D'P',$$

ó los diedros totales

$$AD = A'D'.$$

Lo mismo se demuestra la igualdad de los diedros restantes.

La igualdad de los tetraedros OAPD y O′A′P′D′ nos da la igualdad de sus caras homólogas

$$APD = A'P'D'.$$

De los mismos tetraedros resulta la igualdad de los triángulos AOP y A′O′P′: y como los tetraedros OABD y O′A′B′D′ son tambien iguales, los triángulos AOB y A′O′B′ lo serán del mismo modo; luego

$$AOP + AOB = A'O'P' + A'O'B',$$

ó las caras totales (**85**) ABOP=A′B′O′P′

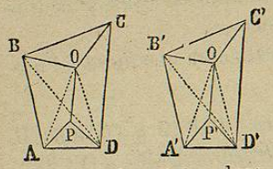
Lo mismo se demuestra la igualdad de las caras restantes.

Luego los poliedros propuestos tienen sus caras y ángulos diedros respectivamente iguales y ordenados del mismo modo; luego son iguales (**258**).

Recíprocamente. *Si dos poliedros son iguales, se pueden descomponer en el mismo número de tetraedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*

Haciendo pasar un plano por los puntos O, A, D, y otro por los O, B, D, y ejecutando igual operacion en el segundo poliedro, aquel quedará dividido en los tetraedros

Fig. 210.



OAPD, OABD, OBCD,

y este en los

O'A'P'D', O'A'B'D', O'B'C'D'.

Ahora, los tetraedros OAPD y O'A'P'D' tienen el diedro AP=A'P', por ser diedros colocados del mismo modo en los poliedros iguales : la cara APD=A'P'D' tambien por hipótesis, y la OAP=O'A'P' (**85**, rec.); luego los tetraedros son iguales (**246**, 2.º).

Como del mismo modo se demuestra la igualdad de los tetraedros restantes, el teorema recíproco es cierto.

260. Teorema 3.º *El número de poliedros regulares no puede pasar de cinco.*

En efecto, el número de poliedros regulares no puede exceder al de ángulos poliedros que puedan formarse con ángulos de polígonos regulares iguales (**242**) ; luego si demostramos que el número de estos ángulos poliedros es cinco, se tendrá demostrado que el de los poliedros regulares no puede exceder á este número.

Esto supuesto, y recordando que para formar un ángulo poliedro se necesitan á lo ménos tres ángulos rectilíneos, cuya suma no puede llegar á cuatro rectos (**212**) ó sea 360º, se tendrá que :

Valiendo el ángulo de triángulo equilátero 60º (**82**, obs. 2.ª) con 3, 4 y 5 de estos ángulos se podrán formar ángulos poliedros, porque

$$60\times3<360,\quad 60\times4<360 \quad \text{y} \quad 60\times5<360;$$

mas con 6 ya no puede formarse, porque

$$60\times6=360.$$

Valiendo el ángulo de cuadrado 90º, con 3 de estos ángulos se podrá formar un ángulo poliedro, porque

$$90\times3<360;$$

pero con 4 de estos ángulos ya no puede formarse, porque

$$90\times4=360.$$

Valiendo el ángulo de pentágono regular 108º, con 3 de estos ángulos se puede formar un ángulo poliedro, porque

$$108\times3<360;$$

mas con 4 ya no puede formarse, porque

$$108\times4>360.$$

Valiendo el ángulo del exágono 120º, con 3 de estos ángulos no puede formarse ya ángulo poliedro, porque

$$120\times3=360.$$

Con mayor razon no pueden formarse ángulos poliedros con ángulos de polígonos regulares de mayor número de lados.

Luego con ángulos de polígonos regulares é iguales, sólo pueden formarse 5 ángulos poliedros : 3 con los ángulos de triángulo equilátero, 1 con los del cuadrado y 1 con los del pentágono; luego el número de poliedros regulares no puede pasar de *cinco.*

Observacion. Deberíamos ahora demostrar la posibilidad de la formacion de los cinco poliedros regulares; pero la demostracion no es de este lugar. Nos limitaremos á indicar que efectivamente existen estos cinco poliedros regulares, y son :

El *tetraedro,* terminado por 4 triángulos equiláteros (fig. 211, 1).

El *exaedro,* terminado por 6 cuadrados (fig. 211, 2).

El *octaedro,* terminado por 8 triángulos equiláteros (fig. 211, 3).

El *dodecaedro,* terminado por 12 pentágonos regulares (figura 211, 4).

El *icosaedro*, terminado por 20 triángulos equiláteros (figura 211, 5).

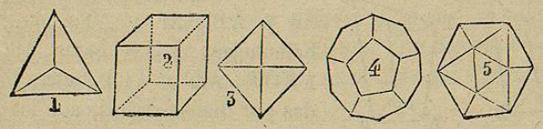



Fig. 211.