SECCION SEGUNDA.

DE LA EXTENSION DE LAS FIGURAS EN EL ESPACIO.

CAPÍTULO PRIMERO.

De los poliedros semejantes, inscriptos y circunscriptos.

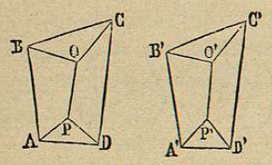
PRELIMINARES

261. *Se llaman* POLIEDROS SEMEJANTES *los que tienen sus ángulos diedros, colocados del mismo modo, respectivamente iguales y sus caras homólogas semejantes.*

Llámanse ARISTAS HOMÓLOGAS *las aristas de los diedros iguales, y* CARAS HOMÓLOGAS *las formadas por aristas homólogas.*

Si en los poliedros OPABCD y O'P'A'B'C'D' (fig. 212), suponemos iguales los diedros AB=A'B', BO=B'O', etc., cuyas aristas tienen las mismas letras, las aristas AB y A'B', AP y A'P', etc., son homólogas; y las caras ABOP y A'B'O'P', APD y A'P'D', etc., formadas por dichas aristas, son las caras homólogas.

Fig. 212.



COROL. *Los poliedros semejantes tienen proporcionales las aristas homólogas.*

Porque la semejanza de las caras ABOP y A'B'O'P' nos da

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BO}{B'O'}=\frac{OP}{O'P'}=\frac{AP}{A'P'},$$

y la de los triángulos APD y A'P'D' da tambien

$$\frac{AP}{A'P'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{PD}{P'D'},$$

cuyas séries de razones iguales se enlazan por la razon comun

$\frac{AP}{A'P'}$, y se enlazarian igualmente con otras deducidas de la comparacion de las caras homólogas restantes.

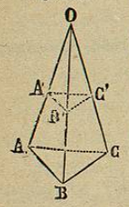
ARTÍCULO PRIMERO.

De los tetraedros semejantes.

262. TEOREMA 1.º *Si un tetraedro* OABC (fig. 213) *se corta por un plano* A'B'C' *paralelo á una de sus caras, el tetraedro* OA'B'C' *parcial que resulta, es semejante al total.*

Los diedros OB y OB' son uno mismo, y por lo tanto iguales. Otro tanto sucede con los diedros laterales restantes. Los diedros OBAC y OB'A'C' son tambien iguales (**205**, rec. 1.º) : y como lo mismo se demostraria respecto de los demas diedros de las bases, resulta que los tetraedros propuestos tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales.

Fig. 213.

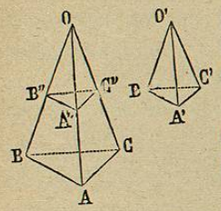


Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes (**247**, 1.º) : OAB es tambien semejante con OA'B' (**97**), y como los demás triángulos laterales se hallan en igual caso, los tetraedros tienen sus caras homólogas respectivamente semejantes.

Luego dichos tetraedros son semejantes.

263. TEOREMA 2.º *Dos tetraedros son semejantes : 1.º si tienen tres caras respectivamente semejantes ; 2.º si tienen dos caras respectivamente semejantes é igual el diedro comprendido ; 3.º si tienen una cara semejante contigua á tres diedros respectivamente iguales ; con tal que en todos estos casos los elementos estén semejantemente dispuestos.*

Fig. 214.



1.º Sean los tetraedros OABC y O'A'B'C' (fig. 214), en que se suponen semejantes los triángulos OAB y O'A'B', OAC y O'A'C', OBC y O'B'C'.

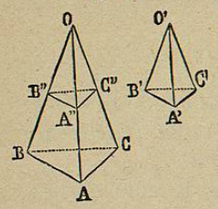
Tómese sobre la arista OB una parte OB''=O'B', y por el punto B'' trácese el plano B''A''C'', paralelo á BAC.

Los tetraedros OABC y OA''B''C'' serán semejantes (**262**). De la semejanza de estos tetraedros se deduce la de las caras homólogas OAB y OA''B'', OBC y OB''C'', etc.;

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIV. "ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

mas por hipótesis OAB y O'A'B', OBC y O'B'C', etc., son tambien semejantes; luego los triángulos OA''B'' y O'A'B', OB''C'' y O'B'C', etc., tienen sus ángulos respectivamente iguales; luego los triángulos OA''B' y O'A'B', OB''C'' y O'B'C', que tienen OB''=O'B' por construccion y los ángulos contiguos iguales, son iguales (**72**, 3.º), luego los triángulos OA''C'' y O'A'C' tambien lo serán (**72**, 2.º); luego los tetraedros OA''B''C'' y O'A'B'C' son iguales (**246**, 1.º): pero el primero es semejante con OABC, luego el segundo tambien lo será.

Fig. 214.



2.º y 3.º Estos casos se demuestran de una manera análoga, fundándose en el 2.º y 3.º del núm. **246**.

ARTÍCULO II.

De los poliedros semejantes en general.

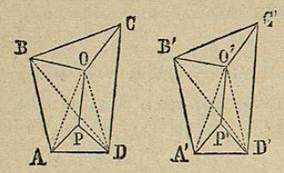
264. Teorema 1.º *Si una pirámide se corta por un plano paralelo á la base, la pirámide deficiente es semejante á la total.*

La demostracion de este teorema es igual á la del teorema del núm. **262**, que es un caso particular del presente.

Corol. *Las bases de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus alturas* (**247**, 2.º).

265. Teorema 2.º *Si dos poliedros* OPABCD *y* O'P'A'B'C'D (fig. 215) *están compuestos del mismo número de tetraedros* OABD *y* O'A'B'D', OAPD *y* O'A'P'D', OBCD *y* O'B'C'D' *respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

Fig. 215.



La semejanza de los tetraedros OABD y O'A'B'D' nos da los diedros

AB=A'B'.

De los mismos tetraedros resulta la igualdad de los diedros OADB y O'A'D'B' : y como los tetraedros OAPD y O'A'P'D' son tambien semejantes, los diedros OADP y O'A'D'P' serán de la misma manera iguales; luego los diedros

OADB+OADP=O'A'D'B'+O'A'D'P',

ó los diedros totales AD=A'D'

Lo mismo se demuestra la igualdad de los diedros restantes.

La semejanza de los tetraedros OAPD y O'A'P'D' nos da la semejanza de sus caras homólogas

APD y A'P'D'.

De los mismos tetraedros resulta la semejanza de los triángulos AOP y A'O'P' : y como los tetraedros OABD y O'A'B'D' son tambien semejantes, los triángulos ABO y A'B'O' lo serán del mismo modo; luego los polígonos

ABOP y A'B'O'P'

son semejantes (**101**).

Lo mismo se demuestra la semejanza de las demas caras.

Luego los poliedros propuestos tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales y sus caras homólogas semejantes, luego son semejantes (**261**).

Recíprocamente. *Si dos poliedros son semejantes, se pueden descomponer en el mismo número de tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.*

Haciendo pasar un plano por los puntos O, A, D, y otro por los O, B, D, y ejecutando igual operacion en el segundo políedro, aquel quedará dividido en los tetraedros

OAPD, OABD, OBCD,

y este en los O'A'P'D', O'A'B'D', O'B'C'D'.

Ahora, los tetraedros OAPD y O'A'P'D', tienen los diedros AP=A'P', por ser diedros colocados del mismo modo en los poliedros semejantes : el triángulo APD es semejante al A'P'D' tambien por hipótesis, y el OAP al O'A'P' (**101**, rec.); luego los tetraedros son semejantes.

Como del mismo modo se demostraria la semejanza de los tetraedros restantes, el teorema recíproco es evidente.

ARTÍCULO III.

Poliedros inscriptos y circunscriptos en los cuerpos de revolucion.

266. *Se dice que una pirámide está* inscripta *en un cono ó un cono* circunscripto *á una pirámide, cuando ambos cuerpos tienen el mismo vértice y la base de la pirámide está inscripta en la del cono.*

267. Inscribiendo en un cono una pirámide cualquiera, despues otra de duplo número de caras laterales, luego otra, y así sucesivamente, las aristas de la pirámide permanecen iguales á los lados del cono: el número de aristas que coincide con la superficie cónica se duplica; y por lo tanto la superficie lateral de la pirámide se va confundiendo con la superficie cónica, y la base de aquella con la de esta, de manera que á las pocas inscripciones ya la vista no puede distinguir un cuerpo del otro. Como las inscripciones se pueden aún suponer continuadas cuanto se quiera, se infiere que

Todo cono se puede considerar como una pirámide de infinito número de caras.

Observacion. El cono recto y circular se debe considerar en tal caso como una pirámide regular de infinito número de caras, cuyas apotemas y aristas son iguales y están representadas por los lados.

268. *Se dice que un prisma está* INSCRIPTO *en un cilindro ó un cilindro* CIRCUNSCRIPTO *á un prisma, cuando las bases del prisma están inscriptas en las del cilindro.*

269. Si en un cilindro se inscribe un prisma cualquiera, despues otro de duplo número de caras laterales, luego otro, y así sucesivamente, el número de aristas que coincide con la superficie cilíndrica se va duplicando á medida que el número de caras laterales se duplica; y por lo tanto la superficie lateral del prisma se va confundiendo con la del cilindro, y las bases de aquel con las de este, de manera que á las pocas inscripciones ya no es fácil distinguir un cuerpo del otro. Como las inscripciones se pueden aún suponer continuadas cuanto se quiera, se infiere que

Todo cilindro se puede considerar como un prisma de infinito número de caras.

270. *Se dice que un poliedro está* INSCRIPTO *en una esfera, ó una esfera* CIRCUNSCRIPTA *á un poliedro, cuando todos los vértices del poliedro están en la superficie esférica.*

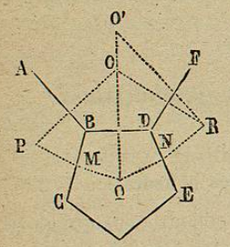
Dícese que un poliedro está CIRCUNSCRIPTO *á una esfera, ó una esfera* INSCRIPTA *en un poliedro, cuando todas las caras del poliedro son tangentes á la superficie esférica.*

271. Teorema. *A todo poliedro regular: 1.º se le puede inscribir una esfera; 2.º circunscribir otra.*

Supongamos que ABC y CBD (fig. 216) sean dos caras adyacentes del poliedro dado; levantando en los centros P y Q de los polígonos, que forman dichas caras, perpendiculares á las mismas, estas perpendiculares se encontrarán en el punto O, centro de la esfera que

paso por dichos puntos A, B, C, D (**239**). Si en el centro R de la cara EDF, contigua á una de las anteriores CBD, se levanta otra perpendicular, esta encontrará por igual razon á la QO en un punto cualquiera O'.

Fig. 216.



Ahora este punto O' debe ser el mismo punto O donde se encuentran las PO y QO. En efecto, trácense desde P y Q perpendiculares sobre la arista BC, comun á las dos primeras caras, cuyas perpendiculares concurrirán en el punto M (**41**); y desde Q y R sobre la DE, las cuales concurren en N, por la misma razon: dóblese el cuadrilátero plano (**239**) OPMQ sobre el de igual clase O'QNR, sirviendo de eje OQ, y QM caerá sobre QN por ser los ángulos OQM y OQN rectos (**170**), y el punto M coincidirá con N, porque QM=QN por apotemas de un mismo polígono, MP caerá sobre NR, por ser iguales los ángulos PMQ y QNR, como medidas de los diedros BC y DE, iguales por hipótesis; y el punto P coincidirá con R por ser PM=NR, como apotemas de polígonos iguales: PO caerá sobre RO' por ser rectos los ángulos OPM y O'RN (**170**); luego el punto O' coincide con O, y OP=O'R. Como lo mismo se demostraria respecto de la perpendicular levantada en el centro de otra cara cualquiera, resulta que todas las perpendiculares levantadas en los centros de los polígonos se encuentran en un mismo punto O y son iguales, luego todas las caras equidistan de este punto O; luego si desde él como centro se traza una esfera de igual rádio que OP, todas las caras del poliedro son perpendiculares á los extremos de los rádios OP, OQ, OR, etc., de esta esfera, luego son tangentes (**238**, 1.º); luego la esfera queda inscripta en el poliedro.

2.º Siendo OP perpendicular al polígono ABC en su centro P, se tendrá (*) OA=OB=OC=etc. (**175**, 1.º): por igual razon OB=OC=OD=etc.; de donde OA=OB=OC=OD=etc. y como lo mismo se demostraria de todas las rectas que desde O van á los vértices del poliedro, resulta que estos equidistan de O; luego si desde O, como centro, se supone trazada una esfera de igual rádio que OA, esta pasará por todos los vértices del poliedro, y por lo tanto estará circunscripta á este.

272. *Llámase* CENTRO *de un poliedro regular el centro de las esferas inscripta y circunscripta al mismo poliedro:* RADIOS *del poliedro las rectas que van desde el centro á los vértices de sus ángulos; y* APOTEMAS *las perpendiculares trazadas desde el centro á las caras del poliedro.*

Corol. 1.º *Los rádios de un poliedro son iguales entre sí, y las apotemas lo son tambien.*

(*) Estas líneas no están trazadas en la figura; porque los puntos extremos las expresan con claridad, y si se hubiesen trazado, la figura resultaría confusa.

Corol. 2.° *Todo poliedro regular se puede descomponer en tantas pirámides regulares é iguales como caras tiene, cuyas bases son las caras del poliedro y cuyos vértices se reunen en el centro.*

CAPÍTULO II.

De las áreas de los cuerpos geométricos.

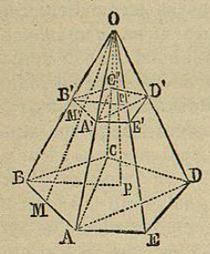
ARTÍCULO PRIMERO.

Determinacion de las áreas de los poliedros.

273. El área de la superficie de un poliedro cualquiera es evidentemente igual á la suma de las áreas de los polígonos que forman sus diferentes caras; y como se sabe determinar las áreas de las figuras planas (*), sólo nos ocuparemos al presente de las áreas de las superficies laterales del prisma, de la pirámide regular y de su tronco, que pueden determinarse de una manera más sencilla, como aparece de los siguientes teoremas.

274. Teorema 1.° *El área de la superficie lateral de una pirámide regular* OABCDE (fig. 217) *es igual á la mitad del producto de la apotema* OM *por el perímetro de la base.*

Fig. 217.



Los triángulos laterales AOB, BOC, etc., son iguales é isósceles (**244**, corol. 2.°): el área de cada uno de estos triángulos es (**151**) $\frac{1}{2}$ MO$\times$AB; luego la de los cinco será

$$\frac{1}{2}\text{MO}\times\text{AB}\times 5=\frac{1}{2}\text{MO}\times 5\text{AB},$$

ó, llamando a la apotema y p el perímetro de la base,

$$\text{Ar. de sup. lat. de pirám. reg.}=\frac{1}{2}ap.$$

Ejemplo. Hallar el área de la superficie lateral de la pirámide OABC....., suponiendo que la apotema tiene 3,12 metros y el lado de la base 1,03 metros; $p=1{,}03\times 5=5{,}15$, $a=3{,}12$; luego el área buscada será

$$\frac{3{,}12\times 5{,}15}{2}=8{,}0340 \text{ metros cuadrados.}$$

(*) V. Geometría plana, seccion II, cap. 3.°, art. 1.°.

275. Teorema 2.° *El área de la superficie lateral de un tronco* AD' *de pirámide regular es igual al producto de su apotema* MM' *por la semisuma de los perímetros de las bases.*

Los trapecios laterales ABA'B', BCB'C', etc., son evidentemente iguales: el área del primero de estos es (**152**)

$$\text{MM}'\times\frac{1}{2}(\text{AB}+\text{A}'\text{B}'); \text{ luego la de los cinco será}$$

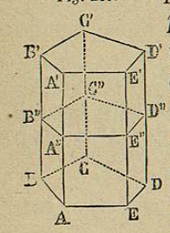
$$\text{MM}'\times\frac{1}{2}(\text{AB}+\text{A}'\text{B}')\times 5=\text{MM}'\times\frac{1}{2}(5\text{AB}+5\text{A}'\text{B}').$$

ó, llamando p y p' los perímetros de sus bases y a la apotema,

$$\text{Ar. lat. de tronco de pir. reg.}=a\times\frac{1}{2}(p+p').$$

276. Teorema 3.° *El área de la superficie lateral de un prisma* AD' (fig. 218) *cualquiera es igual al producto de la arista* AA' *por el perímetro de una seccion* A''B''C''D''E'', *perpendicular á dicha arista.*

Fig. 218.



Siendo la seccion perpendicular á la arista AA', lo será á todas (**180**, corol. 2.°); luego estas lo serán á la seccion, y por lo tanto, cada una de ellas á los lados A''B'', B''C'', ... de la seccion, que pasan por su pié en el mismo plano (**170**); luego el área de los paralelógramos laterales será (**150**)

$$\text{ABA}'\text{B}'=\text{AA}'\times\text{A}''\text{B}'', \quad \text{BCB}'\text{C}'=\text{BB}'\times\text{B}''\text{C}'', \text{ etc.};$$

luego el área de la superficie lateral del prisma, como las aristas son iguales (**250**, corol. 1.°), será

$$\text{AA}'(\text{A}''\text{B}''+\text{B}''\text{C}''+\text{C}''\text{D}''+\text{D}''\text{E}''+\text{E}''\text{A}''),$$

ó, llamando a la arista y p el perímetro de dicha seccion,

$$\text{Ar. lat. de prisma}=ap.$$

Corol. *El área de la superficie lateral de un prisma recto es igual al producto de su arista por el perímetro de la basse.*

Porque en este prisma la base es una seccion perpendicular á la arista.

ARTÍCULO II.

Áreas de los cuerpos de revolucion.

277. Teorema 1.° *El área de la superficie curva de un cono recto y circular es igual á la mitad del producto del lado por la circunferencia de la base.*