Corol. 2.° *Todo poliedro regular se puede descomponer en tantas pirámides regulares é iguales como caras tiene, cuyas bases son las caras del poliedro y cuyos vértices se reunen en el centro.*

CAPÍTULO II.

De las áreas de los cuerpos geométricos.

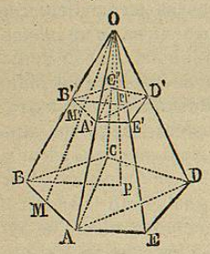
ARTÍCULO PRIMERO.

Determinacion de las áreas de los poliedros.

273. El área de la superficie de un poliedro cualquiera es evidentemente igual á la suma de las áreas de los polígonos que forman sus diferentes caras; y como se sabe determinar las áreas de las figuras planas (*), sólo nos ocuparemos al presente de las áreas de las superficies laterales del prisma, de la pirámide regular y de su tronco, que pueden determinarse de una manera más sencilla, como aparece de los siguientes teoremas.

274. Teorema 1.° *El área de la superficie lateral de una pirámide regular* OABCDE (fig. 217) *es igual á la mitad del producto de la apotema* OM *por el perímetro de la base.*

Fig. 217.



Los triángulos laterales AOB, BOC, etc., son iguales é isósceles (**244**, corol. 2.°): el área de cada uno de estos triángulos es (**151**) $\frac{1}{2}$ MO$\times$AB; luego la de los cinco será

$$\frac{1}{2}\text{MO}\times\text{AB}\times 5=\frac{1}{2}\text{MO}\times 5\text{AB},$$

ó, llamando a la apotema y p el perímetro de la base,

$$\text{Ar. de sup. lat. de pirám. reg.}=\frac{1}{2}ap.$$

Ejemplo. Hallar el área de la superficie lateral de la pirámide OABC....., suponiendo que la apotema tiene 3,12 metros y el lado de la base 1,03 metros; $p=1{,}03\times 5=5{,}15$, $a=3{,}12$; luego el área buscada será

$$\frac{3{,}12\times 5{,}15}{2}=8{,}0340 \text{ metros cuadrados.}$$

(*) V. Geometría plana, seccion II, cap. 3.°, art. 1.°.

275. Teorema 2.° *El área de la superficie lateral de un tronco* AD' *de pirámide regular es igual al producto de su apotema* MM' *por la semisuma de los perímetros de las bases.*

Los trapecios laterales ABA'B', BCB'C', etc., son evidentemente iguales: el área del primero de estos es (**152**)

$$\text{MM}'\times\frac{1}{2}(\text{AB}+\text{A}'\text{B}'); \text{ luego la de los cinco será}$$

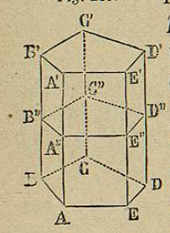
$$\text{MM}'\times\frac{1}{2}(\text{AB}+\text{A}'\text{B}')\times 5=\text{MM}'\times\frac{1}{2}(5\text{AB}+5\text{A}'\text{B}').$$

ó, llamando p y p' los perímetros de sus bases y a la apotema,

$$\text{Ar. lat. de tronco de pir. reg.}=a\times\frac{1}{2}(p+p').$$

276. Teorema 3.° *El área de la superficie lateral de un prisma* AD' (fig. 218) *cualquiera es igual al producto de la arista* AA' *por el perímetro de una seccion* A''B''C''D''E'', *perpendicular á dicha arista.*

Fig. 218.



Siendo la seccion perpendicular á la arista AA', lo será á todas (**180**, corol. 2.°); luego estas lo serán á la seccion, y por lo tanto, cada una de ellas á los lados A''B'', B''C'', ... de la seccion, que pasan por su pié en el mismo plano (**170**); luego el área de los paralelógramos laterales será (**150**)

$$\text{ABA}'\text{B}'=\text{AA}'\times\text{A}''\text{B}'', \quad \text{BCB}'\text{C}'=\text{BB}'\times\text{B}''\text{C}'', \text{ etc.};$$

luego el área de la superficie lateral del prisma, como las aristas son iguales (**250**, corol. 1.°), será

$$\text{AA}'(\text{A}''\text{B}''+\text{B}''\text{C}''+\text{C}''\text{D}''+\text{D}''\text{E}''+\text{E}''\text{A}''),$$

ó, llamando a la arista y p el perímetro de dicha seccion,

$$\text{Ar. lat. de prisma}=ap.$$

Corol. *El área de la superficie lateral de un prisma recto es igual al producto de su arista por el perímetro de la basse.*

Porque en este prisma la base es una seccion perpendicular á la arista.

ARTÍCULO II.

Áreas de los cuerpos de revolucion.

277. Teorema 1.° *El área de la superficie curva de un cono recto y circular es igual á la mitad del producto del lado por la circunferencia de la base.*

El cono recto y circular se puede considerar como una pirámide regular de infinito número de caras, cuyas apotemas y aristas son iguales y están representadas por los lados (**267**, obs.) : el área de la superficie lateral de la pirámide regular es igual á la mitad del producto de la apotema por el perímetro de la base (**274**) ; luego el área de la superficie curva del cono será tambien la mitad del producto del lado por la circunferencia de la base.

Siendo, pues, OPAB (fig. 219) un cono recto y circular, se tendrá

$$\text{Ar. de sup. cur. de OPAB} = \frac{1}{2}\text{OA} \times 2\pi\text{PA} = \pi\text{PA} \times \text{OA} \quad [1],$$

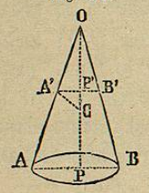
ó, llamando r el rádio de la base y l el lado,

$$\text{Ar. de sup. cur. de cono rec. y cir.} = \pi r l. \quad [2].$$

OBSERVACIONES.

1.ª Si por el punto A', medio del lado AO, se traza una seccion paralela á la base, cuyo diámetro sea A'B', de la semejanza de los triángulos OAP y OA'P, resulta

Fig. 219.



$$\frac{\text{OA}'}{\text{OA}} = \frac{\text{P}'\text{A}'}{\text{PA}} :$$

pero $\text{OA}' = \frac{1}{2}\text{OA}$; luego

$$\text{P}'\text{A}' = \frac{1}{2}\text{PA} \quad \text{ó} \quad \text{PA} = 2\text{P}'\text{A}',$$

cuyo valor sustituido en la fórmula [1], nos da

$$\text{Ar. de sup cur. de OPAB} = 2\pi\text{P}'\text{A}' \times \text{OA}.$$

Luego *el área de la superficie curva de un cono recto y circular es tambien igual al producto del lado por la circunferencia de una seccion, hecha por el punto medio del lado y paralela á la base.*

2.ª Si por el punto A' (fig. 219), medio del lado, se traza la A'C perpendicular á este, los triángulos AOP y A'P'C serán semejantes (**100**) ;

luego $$\frac{\text{AO}}{\text{A}'\text{C}} = \frac{\text{OP}}{\text{A}'\text{P}'};$$ de donde

$$\text{AO} \times \text{A}'\text{P}' = \text{A}'\text{C} \times \text{OP},$$

cuyo valor sustituido en la fórmula de la observacion anterior, da

$$\text{Ar. de sup. cur de OPAB} = 2\pi\text{A}'\text{C} \times \text{OP}.$$

Luego *el área de la superficie curva de un como recto y circular es tambien igual al producto del eje por la circunferencia, cuyo rádio es la perpendicular levantada en el punto medio del lado é interceptada entre este punto y el eje.*

278. Para determinar el área de la superficie curva de un cono cualquiera, se desarrolla dicha superficie sobre un plano (**225**, 2.º), y luego se halla el área de la figura plana resultante (**259**).

279. Teorema 2.º *El área de la superficie curva de un tronco de cono recto y circular es igual al producto de su lado por la semisuma de las circunferencias de las bases.*

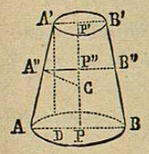
Considerándose el cono recto y circular como una pirámide de infinito número de caras (**267**, obs.), el tronco de cono recto y circular se puede considerar tambien como el tronco de una pirámide regular, cuyo número de caras es infinito : el área de la superficie de la pirámide truncada es igual al producto de la apotema por la semisuma de los perímetros de las bases (**275**) ; luego la del tronco de cono recto y circular será tambien igual al producto de su lado por la semisuma de las circunferencias de las bases.

Siendo, pues, AB' (fig. 220) un tronco de cono recto y circular, se tendrá

$$\text{Ar. de sup. cur. de AB}' = \text{AA}' \times \frac{1}{2}(2\pi\text{PA} + 2\pi\text{P}'\text{A}') = \text{AA}' \times 2\pi\frac{\text{PA}+\text{P}'\text{A}'}{2}.$$

OBSERVACIONES.

Fig. 220.



1.ª Si por el punto A", medio de AA', se traza una seccion paralela á las bases cuyo diámetro es A"B", en el trapecio APA'P', resulta (**152**, obs.)

$$\frac{\text{PA}+\text{P}'\text{A}'}{2} = \text{P}''\text{A}'',$$

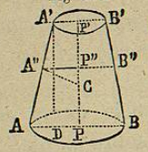
cuyo valor sustituido en la fórmula precedente, da

$$\text{Ar. de sup. cur. de AB}' = 2\pi\text{P}''\text{A}'' \times \text{AA}'.$$

Luego *el área de la superficie curva de un tronco de cono recto y circular tambien es igual al producto de su lado por la*

circunferencia de una seccion hecha por el punto medio del lado y paralela á las bases.

Fig. 220.



2.ª Si por los puntos A' y A'' se trazan las perpendiculares A'D y A''C á la base y al lado AA', los triángulos AA'D y A''P''C serán semejantes (**100**), luego

$$\frac{DA'}{P''A''}=\frac{AA'}{CA''};$$

de donde, y supuesto que DA=PP',

$$P''A''\times AA'=CA''\times PP',$$

cuyo valor sustituido en la fórmula de la precedente observacion, da

Ar. de sup. curva de AB'=2πA''C×PP'.

Luego *el área de la superficie curva de un tronco de cono recto y circular, es tambien igual al producto de su eje por una circunferencia, cuyo rádio es la perpendicular levantada en el punto medio del lado é interceptada entre este punto y el eje.*

280. Para determinar el área de la superficie curva de un tronco de cono cualquiera se desarrolla dicha superficie sobre un plano (**225**, obs. 2.ª), y luego se halla el área de la figura resultante (**159**).

281. Teorema 3.º *El área de la superficie curva de un cilindro cualquiera es igual al producto del lado por el perímetro de una seccion perpendicular á dicho lado.*

A todo cilindro se le puede considerar como un prisma de infinito número de caras (**269**); el área de la superficie lateral del prisma es igual al producto de la arista por el perímetro de la seccion perpendicular á la misma arista (**276**); luego la del cilindro será igual al producto del lado por el perímetro de la seccion perpendicular á este lado (*).

Corol. *El área de la superficie curva del cilindro recto y circular es igual al producto de la circunferencia de la base por el lado.*

Porque en este cilindro la base es una seccion perpendicular al lado.

(*) Como no sabemos rectificar mas curvas que la circunferencia, en el presente caso puede arrollarse un hilo perpendicular á los lados del cilindro, y la medida de su extension nos dará la longitud del perímetro de la seccion pedida.

Llamando r el rádio de la base y l el lado, se tiene

Ar. de sup. cur. de cil. rec. y cir.=$2\pi rl$.

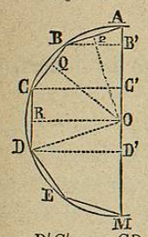
EJEMPLO. ¿Cuál es el área de la superficie curva de un cilindro recto y circular, cuyo radio de la base es 6 metros y el lado 10?

La circunferencia de la base es $c=2\pi r=37{,}69908$, y por consiguiente el área buscada será

37,69908×10=376,9908 metros cuadrados.

282. Teorema 4.º *El área de la superficie descrita por la base* ABCD (fig. 221) *de un sector poligonal* ABCDO, *que gira al rededor de uno de sus rádios* AO, *es igual al producto de una circunferencia, cuyo rádio es la apotema* OP *por la proyeccion* AD' *de la base sobre el eje.*

Fig. 221



El lado AB describe la superficie curva de un cono recto y circular cuyo eje es AB' : CB la de un tronco de cono recto y circular cuyo eje es B'C', y CD la de un cilindro que tiene por eje C'D'; luego

Ar. de sup. desc. por AB=2πOP×AB' (**277**, obs. 2.ª),

Ar. de sup. desc. por BC=2πOQ×B'C' (**279**, obs. 2.ª),

Ar. de sup. desc. por CD=2πDD'×CD (**281**, corol.).

Sumando estas igualdades, advirtiendo que CD=C'D', y que DD'=OP y OP=OQ=OR (**126**, corol. 1.º), resulta

Ar. de sup. des. por ABCD=2πOP×AD'.

283. *Se llama* zona *esférica la parte de superficie de la esfera, descrita por un arco cualquiera de la semicircunferencia generatriz de la superficie esférica.*

Las circunferencias descritas por los extremos del arco generador de la zona se llaman bases *de esta, y* altura *la proyeccion de dicho arco sobre el eje.*

Si uno de los extremos del arco generador coincide con el eje, la zona tiene una base sola.

La zona de una sola base se llama tambien *casquete* esférico.

La superficie descrita por el arco BCD es una zona: sus bases son las circunferencias que tienen por rádios las rectas B'B y D'D, y B'D' es su altura. Si el arco generador fuese ABC, la única base sería la circunferencia, cuyo rádio es CC' y AC' la altura.

284. Teorema 5.º *El área de una zona esférica es igual al producto de su altura por una circunferencia máxima.*

Considerando el arco generador como la base de un sector poligonal regular de infinito número de lados, el área de la superficie descrita por esta base será igual (**282**) al producto de su proyeccion sobre el diámetro, ó sea á la altura de la zona, por la circunferencia cuyo rádio es la apotema de dicho sector, ó sea por una circunferencia máxima.

Llamando, pues, Z el área de la zona, a su altura y r el rádio de la esfera, se tendrá

$$Z=2\pi ra.$$

Corol. *El área de la esfera es igual al producto del diámetro por una circunferencia máxima.*

Porque Ar. de zona desc. por arc. $AD=2\pi r\times AD'$,

Ar. de zona desc. por arc. $DM=2\pi r\times D'M$; luego

Ar. de sup. desc. por $ADM=2\pi r(AD'+D'M)=2\pi r\times AM$,

ó llamando d el diámetro y E la superficie esférica

$$\text{Ar, de } E=2\pi rd,$$

ó, sustituyendo en vez de d su valor $2r$,

$$\text{Ar. de } E=4\pi r^2.$$

Observacion. Siendo πr^2 el área de un círculo máximo, resulta que el *área de la superficie esférica es cuádrupla de la del círculo máximo.*

EJEMPLO. Suponiendo que la tierra sea esférica, y que su rádio sea 1142 leguas, ¿cuál será el área de su superficie?

Ar. de sup. $T.=4\times3{,}14159....\times1142^2=16\ 388\ 608$ leguas cuadradas próximamente.

ARTÍCULO III.

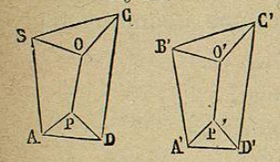
Comparacion de las áreas de los cuerpos geométricos semejantes.

285. Teorema 1.º *Las áreas de las superficies de los poliedros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus aristas homólogas.*

Sean OPABCD y O'P'A'B'C'D' (fig. 222) los poliedros semejantes, y se tendrá (**161**)

$$\frac{ABOP}{A'B'O'P'}=\frac{AB^2}{A'B'^2},\quad \frac{BOC}{B'O'C'}=\frac{OC^2}{O'C'^2},....$$

Fig. 222.



Estas proporciones tienen las últimas razones iguales (**261**, corolario, y Algebra **182**, 4.ª), luego $\frac{ABOP}{A'B'O'P'}=\frac{BOC}{B'O'C'}=...=\frac{AB^2}{A'B'^2}$, de donde (Alg. **186**)

$$\frac{ABOP+BOC+...}{A'B'O'P'+B'O'C'+...}=\frac{AB^2}{A'B'^2},$$

ó llamando A y A' las áreas de las superficies de estos poliedros,

$$\frac{A}{A'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}.$$

286. *Dos conos rectos y circulares son semejantes cuando son engendrados por triángulos semejantes, que giran al rededor de catetos homólogos.*

287. Teorema 2.º *Las áreas de las superficies curvas de dos conos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los rádios de las bases.*

Llamando r, r' los rádios y l, l' los lados de estos dos conos, las áreas de sus superficies curvas serán (**277**)

$$\pi rl \text{ y } \pi r'l' :$$

de donde $$\frac{\pi rl}{\pi r'l'}=\frac{rl}{r'l'},$$

y sustituyendo en la razon compuesta $\frac{rl}{r'l'}$ en vez de la razon componente $\frac{l}{l'}$ su igual por hipótesis $\frac{r}{r'}$ (Alg., **175**, corol.),

resulta $$\frac{\pi rl}{\pi r'l'}=\frac{r^2}{r'^2}.$$

Observacion. De una manera análoga se definen los cilindros semejantes, y se demuestra tambien que las áreas de sus superficies curvas son proporcionales á los cuadrados de sus rádios.

288. Teorema 3.º *Las áreas de dos superficies esféricas son proporcionales á los cuadrados de sus rádios.*

Llamando r y r' los rádios de estas superficies esféricas, sus áreas respectivas serán (**284**, corol.)

$$4\pi r^2 \text{ y } 4\pi r'^2;$$

de donde $$\frac{4\pi r^2}{4\pi r'^2}=\frac{r^2}{r'^2}.$$