CAPÍTULO III.

De los volúmenes de los cuerpos geométricos.

ARTÍCULO PRIMERO.

Equivalencia de los poliedros.

289. *Se dice que dos cuerpos geométricos son* EQUIVALENTES *cuando tienen igual magnitud aunque tengan distinta figura* (**3**).

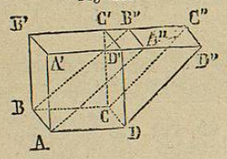
290. TEOREMA 1.º *Dos paralelipípedos, que tienen una misma base é igual altura, son equivalentes.*

Pueden ocurrir dos casos : 1.º que las bases superiores estén entre unas mismas paralelas ; 2.º que no lo estén.

1.º Sean los paralelipípedos AC′ y AC″ (fig. 223), cuyas bases superiores están entre las paralelas A′D″ y B′C″.

Los prismas triangulares AA′A″BB′B″ y DD′D″CC′C″ tienen las caras BA′ = CD′ (**255**) : A′B′B″A″ = D′C′C″D″ por componerse de la parte comun D′C′B″A″ y de los paralelógramos A′C′ y A″C″, iguales entre sí, por serlo cada uno de ellos con la base comun AC : y el triángulo AA′A″ = DD′D″ (**72**, 1.º); luego los prismas triangulares tienen un ángulo triedro (A′ y D′) formado por tres caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas, luego son iguales (**253**).

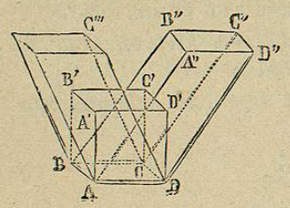
Fig. 223.



Si del poliedro total se resta el primero de dichos prismas, queda el paralelipípedo AC″, si se resta el segundo queda el paralelipípedo AC′ ; luego estos paralelipípedos son equivalentes.

2.º Sean los dos paralelipípedos AC′ y AC″ (fig. 224). Como estos paralelipípedos tienen (por hipótesis) igual altura, sus bases superiores estarán en un mismo plano paralelo á la base comun : luego si se prolongan las caras BA′ y CD′ del primero, y las AD y BC″ del segundo, sus intersecciones formarán un tercer paralelipípedo AC‴ (**254**), que será equivalente á cada uno de los dados AC′ y AC″,

Fig. 224.

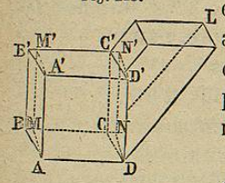


segun la primera parte del teorema ; luego estos son equivalentes entre sí.

291. TEOREMA 2.º *Todo paralelipípedo se puede convertir en otro rectángulo equivalente, de la misma altura y base equivalente á la del primero.*

Sea el paralelipípedo AL (fig. 225) oblícuo, y su base ABCD un paralelógramo oblicuángulo ; levantando en los vértices A, B, C y D de la base las aristas AA′, BB′ etc., perpendiculares á dicha base é iguales á la altura del paralelipípedo dado, se formará el paralelipípedo recto AC′ equivalente al propuesto (**290**).

Fig. 225.



En los extremos de los lados AD y A′D′ de las bases del paralelipípedo AC′, levántense las perpendiculares AM, DN y A′M′, D′N′ : trácense las rectas MM′ y NN′ ; y quedará formado un tercer paralelipípedo AN′ rectangular, de igual altura que AL, y cuya base AMND es equivalente á la ABCD del mismo.

Ahora puede suponerse que los paralelipípedos AC′ y AN′ tienen por base la cara comun AA′D′D y por altura la perpendicular AM; luego tienen la misma base y altura, luego son equivalentes (**290**) : pero AC′ es equivalente á AL, luego AN′ tambien lo será. Luego el paralelipípedo AL se puede convertir en otro AN′ equivalente, rectángulo, de igual altura y base equivalente.

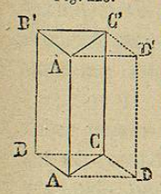
292. TEOREMA 3.º *Todo prisma triangular es la mitad de un paralelipípedo de igual altura y dupla base.*

Distinguiremos dos casos : 1.º que el prisma triangular sea recto : 2.º que sea oblícuo.

1.º Sea el prisma triangular ABCA′B′C′ (fig. 226) recto.

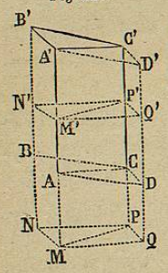
Complétese el paralelipípedo BD′. Los prismas triangulares ABCA′B′C′ y ACDA′C′D′ son rectos, tienen iguales las bases ABC y ACD (**79**, corolario 1.º) é igual altura ; luego son iguales (**253**, corol.); luego cada uno de ellos es la mitad del paralelipípedo BD′; luego el prisma triangular ABCA′B′C′ es la mitad del paralelipípedo BD′ de igual altura y dupla base.

Fig. 226.



2.º Sea el prisma triangular oblícuo ABCA'B'C' (fig. 227).

Fig. 227.



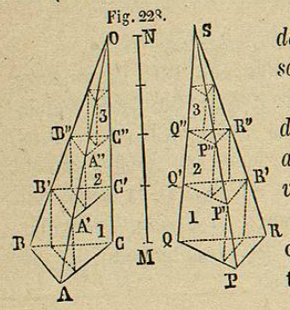
Complétese el paralelipípedo BD, y trácese el plano M'N'P'Q' perpendicular á sus aristas: prolónguense estas hácia la parte inferior de modo que M'M=N'N=P'P=Q'Q=AA': únanse los extremos de las aristas contiguas á la misma cara, y se tendrá el paralelipípedo recto MNPQM'N'P'Q' (**250**, corol. 2.º): trácense las diagonales MP y M'P', y resultarán los dos prismas triangulares rectos

MNPM'N'P' y MPQM'P'Q',

de los que cada uno es la mitad del paralelipípedo recto (1.ª parte del teor.), y que por consiguiente son iguales entre sí.

Superponiendo el poliedro MNPABC al M'N'P'A'B'C', de modo que la base MNP coincida con su igual M'N'P', la arista MA caerá sobre M'A' ((**172**); y como estas aristas son iguales (porque restando de AA' y MM', iguales por construccion, la parte AM' comun, quedan los resíduos MA=M'A') el vértice A coincide con A': lo mismo se demuestra que B coincide con B' y C con C'; luego dichos poliedros son iguales. Luego agregando á cada uno de estos poliedros la parte ABCM'N'P', los prismas triangulares ABCA'B'C' y MNPM'N'P' son equivalentes: del mismo modo se demuestra que ACDA'C'D' y MPQM'P'Q' son equivalentes: pero los prismas triangulares rectos MNPM'N'P' y MPQM'P'Q' son iguales entre sí; luego los oblícuos ABCA'B'C' y ACDA'CD' son equivalentes; luego uno de ellos ABCA'B'C' será equivalente á la mitad del paralelipípedo ABCDA'B'C'D' de igual altura y dupla base (**146**).

Fig. 228.



Corol. *Los prismas triangulares de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.*

293. Teorema 4.º *Dos tetraedros* OABC *y* SPQR (fig. 228) *de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.*

Supongamos para mayor sencillez, colocadas las bases de los tetraedros en un mismo plano, y

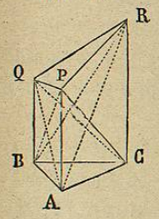
dividida su altura comun MN en un número cualquiera de partes iguales. Si por los puntos de division se trazan planos paralelos á las bases, los tetraedros quedarán divididos en troncos de igual altura, y cuyas bases A'B'C y P'Q'R', A''B''C' y P''Q''R'', etc., son equivalentes (**247**, corol. 2.º). Construyendo en cada tronco un prisma triangular (tomando por base la superior del tronco), los 1 y 1, 2 y 2, etc., son equivalentes (**292**, corolario), luego la suma de los prismas inscriptos en uno de los tetraedros es igual á la de los inscriptos en el otro. Dividiendo la altura en duplo, cuádruplo, etc. número de partes, y ejecutando iguales construcciones, la suma de los prismas inscriptos en el primer tetraedro permanecerá igual á la de igual número de los inscriptos en el segundo: y como por otra parte la extension de los prismas inscriptos se aproxima indefinidamente á la de los tetraedros OABC y SPQR, estos serán equivalentes [**51**, (*) teorema].

294. *Llámase* prisma truncado *la parte de un prisma comprendida entre una de sus bases y un plano que le corta oblícuamente á esta.*

295. Teorema 5.º *Todo prisma triangular truncado* ABCPQR (fig. 229) *es equivalente á tres tetraedros* PABC, QABC *y* RABC, *que tienen por bases una base* ABC *del prisma, y cuyos vértices son los vértices* P, Q, R, *de la otra base del mismo.*

Haciendo pasar un plano por el vértice P y por la arista BC, y otro por el mismo punto P y por la diagonal BR de la cara BQRC, queda el prisma truncado dividido en los tetraedros

Fig 229.



PABC, PBCR, PBQR.

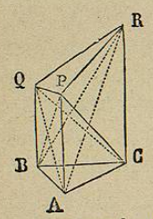
El primero de estos tetraedros cumple con las condiciones del teorema.

El segundo PBCR y el ABRC tienen la base comun BRC, y sus vértices en los puntos P y A equidistantes de esta base; luego son equivalentes (**293**): pero el ABRC, tomando por vértice R, es el RABC; luego el segundo tetraedro cumple tambien con las condiciones del teorema.

El tercer tetraedro PBQR es equivalente al ABQC, porque tienen iguales alturas, y las bases BQC y BQR son equivalentes (**146**, corol.): pero el ABQC, tomando por vértice el punto

Q, es QABC; luego el tercer tetraedro cumple del mismo modo las condiciones del teorema.

Fig. 229.



Luego el prisma truncado ABCPQR es equivalente á los tres tetraedros PABC, RABC y QABC, que tienen la misma base ABC que el prisma y cuyos vértices se hallan en los vértices P, Q, R de la otra base.

Corol. *Todo tetraedro es la tercera parte de un prisma de igual base y altura.*

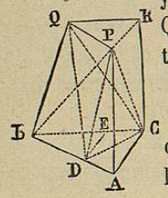
Porque el teorema anterior es cierto, cualquiera que sea la posicion de las bases, y en el prisma los tres tetraedros á que equivale, tienen la misma base que él y la misma altura, puesto que todos los puntos de una de las bases equidistan de su paralela (**206**, corol.); luego los tres tetraedros son equivalentes (**293**); luego cada uno de ellos es la tercera parte de un prisma de igual base y altura.

296. Teorema 6.° *Todo tetraedro truncado* ABCPQR (figura 230) *es equivalente á tres tetraedros* PABC, CPQR *y* QBDC, *que tienen la misma altura que el tronco, y cuyas bases son la base mayor del mismo tronco, la menor y la* BDC, *media proporcional entre ellas.*

Haciendo pasar un plano por el vértice P y por la arista BC, y otro por el mismo punto P y por la diagonal QC de la cara BQRC, se tiene el tronco del tetraedro dividido en los tres tetraedros

PABC, PQRC, PQBC.

Fig. 230.



El primero de estos tetraedros y el segundo, que se puede expresar por CPQR, cumplen con las condiciones del teorema.

Trazando la PD paralela á QB, y uniendo D con C y con Q, el tercer tetraedro PQBC y el QBDC tienen comun la base QBC y los vértices P y D en la recta PD, paralela á esta cara (**183**); luego tienen igual base y altura, luego son equivalentes.

Sólo, pues, resta demostrar que el triángulo BDC es una media proporcional entre la base mayor ABC y la menor PQR.

Al efecto trácese la recta DE, paralela á AC, y el triángulo BED es igual al PQR (**72**, 3.°). Los triángulos BDC y BDE, cuyas bases BC y BE están en línea recta y cuyos vértices están en

el punto D, tienen la misma altura, luego son proporcionales á sus bases (**151**, corol.); luego

$$\frac{BDC}{BDE}=\frac{BC}{BE}:$$

por igual razon los triángulos BCD y BCA nos dan

$$\frac{ABC}{BDC}=\frac{BA}{BD}: \text{ pero } (\mathbf{97})\ \frac{BC}{BE}=\frac{BA}{BD};$$

luego las dos primeras proporciones tienen una razon igual; luego (Alg., **230**)

$$\frac{ABC}{BDC}=\frac{BDC}{BDE}:$$

y como BDE=PQR, resulta al fin

$$\frac{ABC}{BDC}=\frac{BDC}{PQR}.$$

ARTÍCULO II.

Determinacion de los volúmenes de los poliedros.

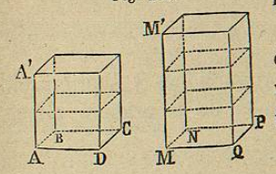
297. *Se llama* volúmen *de un cuerpo la medida de su magnitud* (**2**).

En la determinacion de los volúmenes *tomaremos siempre por unidad un cubo cuya arista sea la unidad de longitud.*

298. Teorema 1.° *Dos paralelipípedos rectángulos* A'C *y* M'P (fig. 231) *de iguales bases* ABCD *y* MNPQ, *son proporcional á sus alturas* AA' *y* MM.

Distinguiremos dos casos: 1.° que las alturas sean conmensurables; 2.° que no lo sean.

Fig. 231.



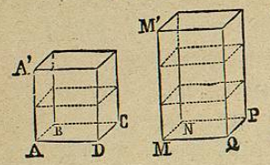
1.° Supongamos que la comun medida de las alturas se puede colocar 2 veces sobre AA' y 3 sobre MM', y se tendrá

$$\frac{AA'}{MM'}=\frac{2}{3}.$$

Si por los puntos de division se trazan planos paralelos á las bases, los paralelipípedos propuestos quedarán divididos el primero en 2 paralelipípedos parciales, y el segundo en 3, todos iguales entre sí (**253**, corol.); luego

$$\frac{A'C}{M'P}=\frac{2}{3}.$$

Fig. 231.



De esta proporcion y de la anterior se deduce

$$\frac{A'C}{M'P}=\frac{AA'}{MM'}$$

2.º Este caso se demuestra como su análogo del núm. **148**.

Observacion. Las aristas AA', AB, AD, que forman un ángulo triedro A de un paralelipípedo rectángulo A'C, son sus tres dimensiones; y como por otra parte el producto AB×AD representa la cara ABCD á que pertenecen las dimensiones ó factores AB y AD (**149**, corol. 1.º), resulta que el teorema anterior puede tambien expresarse de este modo :

Dos paralelipípedos rectángulos, que tienen dos dimensiones iguales, son proporcionales á la tercera dimension.

Corol. *Dos paralelipípedos rectángulos, que tienen igual altura, son proporcionales á sus bases* (*), *ó dos paralelipípedos rectángulos, que tienen una dimension igual, son proporcionales á los productos de las otras dos.*

Porque llamando

P, a, b, c el volúmen y las tres dimensiones de uno de los paralelipípedos,

P', a, b', c' el volúmen y las tres dimensiones del otro, y P'', a, b, c', el volúmen y las tres dimensiones de un tercer paralelipípedo, que, como se ve, tenga dos dimensiones iguales á otras dos del primero, y dos iguales tambien á otras dos del segundo, se tendrá

$$\frac{P}{P''}=\frac{c}{c'} \quad \text{y} \quad \frac{P''}{P'}=\frac{b}{b'};$$

de donde multiplicando estas dos proporciones y suprimiendo el factor P'', comun á los dos términos de la primera razon, resulta

$$\frac{P}{P'}=\frac{b\times c}{b'\times c'}.$$

299. Teorema 2.º *Dos paralelipípedos rectángulos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas, ó á los productos de sus tres dimensiones.*

(*) Esto es, á las áreas de las superficies de sus bases. Otro tanto debe entenderse siempre que una base ó seccion se haya de comparar con otra ó multiplicarse por la longitud de una línea.

Llámese, de una manera análoga al corol. anterior,

P, a, b, c el volúmen y las tres dimensiones de uno de los paralelepípedos,

P', a', b', c' el volúmen y las tres dimensiones del otro y

P'', a', b, c el volúmen y las tres dimensiones de un tercer paralelipípedo, que tenga, como se ve, dos dimensiones iguales á otras dos del primero, y una igual á otra del segundo, y se tendrá (**298**, obs.)

$$\frac{P}{P''}=\frac{a}{a'}$$

y tambien (**298**, corol.) $\frac{P''}{P'}=\frac{b\times c}{b'\times c'}$; de donde

$$\frac{P}{P'}=\frac{a\times b\times c}{a'\times b'\times c'}.$$

Corol. 1.º Si suponemos que P' es la unidad de medida del paralelipípedo P, el primer quebrado representa el volúmen de este paralelipípedo (**2**) : mas en tal caso $a'=b'=c'=1$ (**297**); luego en dichas hipótesis se tiene

$$P=a\times b\times c.$$

Luego *el volúmen de un paralelipípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura, ó al producto de sus tres dimensiones.*

Así, el volúmen de un paralelipípedo rectángulo, cuyas dimensiones son 4,6 metros, 3,24 id. y 6 id., será

$$P=4{,}6\times3{,}24\times6=89{,}424 \text{ metros cúbicos}$$

Corol. 2.º *El volúmen de un cubo es igual á la tercera potencia de su arista.*

Porque el cubo es un paralelipípedo rectángulo, cuyas aristas son todas iguales (**257**).

300. Teorema 3.º *El volúmen de un paralelipípedo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Todo paralelipípedo se puede convertir en otro equivalente rectángulo de igual altura y base equivalente (**291**) : el volúmen de este es igual al producto de su base por su altura (**299**, corola-

rio 1.º); luego el de un paralelipípedo cualquiera será tambien igual al producto de la base por la altura.

301. Teorema 4.º *El volúmen de un prisma triangular es igual al producto de su base por su altura.*

Todo prisma triangular es la mitad de un paralelipípedo de igual altura y dupla base (**292**): el volúmen del paralelipípedo es igual al producto de su base por su altura; luego el del prisma será tambien igual al producto de su base por su altura.

Corol. 1.º *El volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Porque trazando diagonales desde dos vértices homólogos de las bases á todos los demas, y haciendo pasar por ellas planos, el prisma quedará dividido en tantos triangulares de igual altura, como triángulos se hayan formado en una de las bases: el volúmen de cada prisma triangular se halla multiplicando la base por la altura; luego el del prisma total será igual á su altura, que es la altura comun de los triangulares, por su base, que es la suma de las bases de los triangulares.

Corol. 2.º *Dos prismas de igual altura y bases equivalentes son equivalentes.*

302. Teorema 5.º *El volúmen de un tetraedro es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Todo tetraedro es la tercera parte de un prisma de igual base y altura (**295**, corol.): el volúmen del prisma es igual al producto de su base por su altura (**301**, corol. 1.º); luego el del tetraedro será igual al tercio del producto de su base por su altura.

Corol. 1.º *El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Se deduce como el corol. 1.º del número anterior.

Corol. 2.º *Dos pirámides de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.*

303. Teorema 6.º *El volúmen de un prisma triangular truncado es igual al tercio del producto de una de sus bases por la suma de las tres perpendiculares bajadas sobre ella desde los vértices de la otra.*

Llamando B una de las bases, a, a', a'' las perpendiculares bajadas sobre ella desde los vértices de la otra, los volúmenes de

los tetraedros á que el prisma equivale (**297**), serán (**302**)

$$\frac{1}{3}B\times a,\quad \frac{1}{3}B\times a',\quad \frac{1}{3}B\times a'',$$

cuya suma, que es evidentemente el volúmen del prisma truncado, será

$$\frac{1}{3}B(a+a'+a'').$$

Corol. 1.º *El volúmen de un prisma triangular truncado y recto con relacion á una de las bases, es igual al tercio del producto de esta base por la suma de las tres aristas.*

Porque en este caso las tres aristas son las alturas respectivas de los tetraedros en que se considera descompuesto.

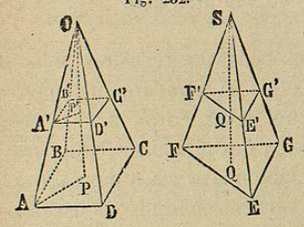
Corol. 2.º *El volúmen de un prisma triangular truncado cualquiera, es tambien igual al tercio del producto de una seccion perpendicular á las aristas por la suma de estas.*

Porque la seccion le divide en dos rectos, de los que esta es la base comun, y la suma de las seis aristas componen las tres del prisma dado.

304. Teorema 7.º *El volúmen de un tetraedro truncado es igual al tercio del producto de su altura por la suma de las bases mayor, menor y una media proporcional entre ellas* (**296** y **302**).

Corol. 1.º *El volúmen de un tronco de pirámide cualquiera AC′ (fig. 232) es igual al tercio del producto de su altura por la suma de las bases mayor, menor y una media proporcional entre ellas.*

Fig. 232.



Porque completando la pirámide OABCD, y construyendo otra triangular SEFG, de igual altura y base equivalente á la de la 1.ª, estas dos pirámides serán equivalentes (**302**, corol. 2.º).

Si se corta la pirámide triangular por un plano paralelo á la base, y que diste del vértice S tanto como la base menor A′B′C′D′ del tronco AC′ dista de O, la seccion E′F′G′ es equivalente á A′B′C′D′ (**247**, corol. 2.º); luego las pirámides deficientes son tambien equivalentes (**302**, corol. 2.º).