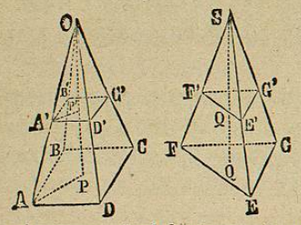
Luego los troncos AC′ y EG′, diferencias entre las pirámides totales y las respectivas deficientes, son equivalentes.

Fig. 232.



El volúmen de EG′ es igual al producto de su altura por la suma de las bases mayor, menor y media proporcional entre ellas; luego el de AC′ será del mismo modo igual al producto de su altura, que es la misma que la del tronco de tetraedro, por la suma de sus bases, equivalentes á la del mismo, y una media proporcional entre ellas, igual evidentemente á la media proporcional entre las del tronco del tetraedro.

Corol. 2.º *Dos troncos de pirámide, de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.*

Ejemplo. **Qué volúmen tiene un tronco de pirámide, cuya base mayor son 10,20 metros cuadrados, la menor 6,50 id. y la altura 4,1 metros?**

La media proporcional entre las bases será (Alg. **180**)

$$m=\sqrt{10{,}20\times 6{,}50}=8{,}14 \text{ metros cuadrados;}$$

y por consiguiente el volúmen de tronco es

$$V=\frac{1}{3}\times 4{,}1\times(10{,}20+6{,}50+8{,}14)=33{,}948 \text{ met. cúb.}$$

305. Los volúmenes de los cinco poliedros regulares se hallan: el del *tetraedro* regular, como el de un tetraedro cualquiera (**302**); el del *cubo*, como se ha dicho (**299**, corol. 2.º): el del *octaedro* suponiéndole descompuesto en dos pirámides, cuya base comun es un cuadrado que tiene por lado una arista, y cuya altura es la mitad de la distancia entre dos vértices opuestos; el del *dodecaedro*, considerándole formado de 12 pirámides pentagonales, que tienen por base una cara del poliedro y por altura la apotema (**272**, corol. 2.º) ó sea la mitad de la distancia entre dos caras opuestas; y el del *icosaedro*, suponiéndole descompuesto en 20 pirámides regulares é iguales, de una manera análoga á la anterior.

ARTÍCULO PRIMERO.

Determinacion de los volúmenes de los cuerpos de revolucion.

306. Teorema 1.º *El volúmen de un cilindro cualquiera es igual al producto de su base por su altura* (**269**, y **301** corolario 1.º).

Observacion. Si el cilindro fuese circular, llamando r el rádio y a la altura, la fórmula de su volúmen sería

$$C=\pi r^2 a.$$

Ejemplo. **¿Cuál es el volúmen de un cilindro circular, cuyo radio es 30 centímetros y 52 su altura?**

$C=3{,}14159\times 30^2\times 52=14703$ centím. cúb. próximamente.

307. Teorema 2.º *El volúmen de un cono cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura* (**267** y **302** corolario 1.º).

Observacion. Si el cono es circular, llamando r el rádio y a la altura, la fórmula de su volúmen es

$$C=\frac{1}{3}\pi r^2 a.$$

308. Teorema 3.º *El volúmen de un tronco de cono es igual al tercio del producto de su altura por la suma de las bases mayor, menor y una media proporcional entre ellas.*

Todo cono truncado se puede considerar como una pirámide truncada de infinito número de caras; luego su volúmen será igual al tercio del producto, etc. (**304**, corol. 1.º).

Observacion. Si el tronco de cono fuese circular, llamando r, r' los rádios y a su altura, la fórmula de su volúmen sería

$$T=\frac{1}{3}(\pi r^2+\pi r'^2+\sqrt{\pi r^2\times\pi r'^2})\times a=\frac{1}{3}\pi(r^2+r'^2+rr')\times a,$$

$$T=\frac{1}{3}\pi a(r^2+r'^2+rr').$$

309. Teorema 4.º *El volúmen de la esfera es igual al tercio del producto de su área por el rádio.*

En efecto, la superficie de la esfera se puede considerar como

una superficie poliédrica de infinito número de caras; si suponemos unidos los vértices de estas caras con el centro de la esfera, esta quedará dividida en un número infinito de pirámides, cuya altura es el rádio de la misma esfera: el volúmen de cada pirámide es el tercio del producto de su base por su altura; luego el de la esfera será igual al tercio del producto de su área, que es la suma de las bases infinitamente pequeñas de las pirámides, por el rádio, altura comun de estas.

Observacion. Llamando r el rádio de la esfera, la fórmula de su volúmen será

$$E=\frac{1}{3}\times 4\pi r^2\times r=\frac{4}{3}\pi r^3$$

Ejemplo. **¿Cuál es el volúmen de la tierra, suponiéndola esférica y de un rádio de 1142 leguas?**

$$\text{V. de T.}=\frac{4}{3}\times 3{,}14159\ldots\times 1142^3=6238596735 \text{ leg. cúb. proxim.}$$

310. *Llámase* sector esférico *la parte de esfera engendrada por un sector cualquiera del semicírculo generador de la misma esfera.*

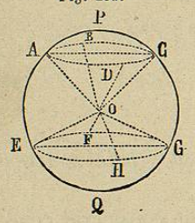
Corol. *El volúmen de un sector esférico es igual al tercio del producto del área de la zona, correspondiente al sector, por el rádio.*

311. *Se llama* segmento esférico *la parte de esfera comprendida por una zona y el plano ó planos que determinan la base ó bases de esta.*

El plano ó planos que le forman, se llaman base *ó* bases *del segmento.*

Corol. El volúmen de un segmento PABCD (fig. 233) de una base y menor que la semiesfera, es igual al volúmen del sector OAPC ménos el del cono OABCD: el del segmento QABCD, de una base tambien y mayor que la semiesfera, es igual al del sector OAQC mas el del cono OABCD; y el del segmento ABCDEFGH de dos bases, es igual á la diferencia de los segmentos PEFGH y PABCD de una base.

Fig. 233.



312. Para determinar el volúmen de cuerpos no comprendidos en lo que precede de este artículo y del anterior, se dividen exacta ó aproximadamente en otros cuyos volúmenes se sabe hallar: se suman estos volúmenes, y la suma será exacta ó aproximadamente el volúmen pedido.

ARTÍCULO IV.

Comparacion de los volúmenes de los cuerpos semejantes.

313. Teorema 1.º *Los volúmenes de dos tetraedros semejantes son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

Sean los tetraedros OABC y O'A'B'C' (fig. 234): sus volúmenes serán (**302**)

$$\frac{1}{3}\times ABC\times OP \quad \text{y} \quad \frac{1}{3}\times A'B'C'\times O'P';$$

de donde

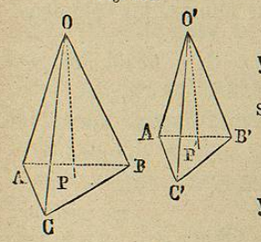
$$\frac{\frac{1}{3}\times ABC\times OP}{\frac{1}{3}\times A'B'C'\times O'P'}=\frac{ABC\times OP}{A'B'C'\times O'P'};$$

y sustituyendo en la razon compuesta $\frac{ABC\times OP}{A'B'C'\times O'P'}$ en vez de la razon componente $\frac{ABC}{A'B'C'}$, su igual (**264**, corol.) $\frac{OP^2}{O'P'^2}$ se tiene (Alg. **175**, corol.)

$$\frac{\frac{1}{3}\times ABC\times OP}{\frac{1}{3}\times A'B'C'\times O'P'}=\frac{OP^3}{O'P'} \qquad [a].$$

Por otra parte, de

Fig. 234.



$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{OP^2}{O'P'^2}$$

y de (**161**) $\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{AC^2}{A'C'^2}$,

se deduce (Alg. **183**)

$$\frac{OP^2}{O'P'^2}=\frac{AC^2}{A'C'^2}$$

y tambien (Alg. **182**, 4.ª)

$$\frac{OP^3}{O'P'^3}=\frac{AC^3}{A'C'^3},$$

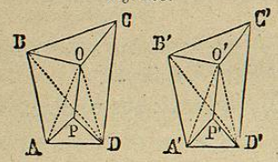
de cuya proporcion y de la [*a*] resulta al fin

$$\frac{\frac{1}{3}ABC\times OP}{\frac{1}{3}A'B'C'\times O'P'}=\frac{AC^3}{A'C'^3}$$

314. Teorema 2.º *Los volúmenes de dos poliedros semejantes* OPABCD *y* O'P'A'B'C'D' (fig. 235) *son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

Estos poliedros se pueden dividir en igual número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos (**265**, rec.) OABD y O'A'B'D', OAPD y O'A'P'D', etc., luego (**313**)

Fig. 235.



$$\frac{OABD}{O'A'B'D'}=\frac{AB^3}{A'B'^3}\text{ y }\frac{OAPD}{O'A'P'D'}=\frac{AD^3}{A'D'^3},\ldots$$

Estas proporciones tienen las últimas razones iguales (**261**, corol., y Alg. **182**, 4.ª), luego

$$\frac{OABD}{O'A'B'D'}=\frac{OAPD}{O'A'P'D'}=\ldots\ldots=\frac{AB^3}{A'B'^3};$$

de donde (Alg. **186**)

$$\frac{OABD+OAPD+\ldots.}{O'A'B'D'+O'A'P'D'+\ldots.}=\frac{AB^3}{A'B'^3},$$

ó, llamando V y V' los volúmenes de estos poliedros,

$$\frac{V}{V'}=\frac{AB^3}{A'B'^3}.$$

315. Teorema 3.º *Los volúmenes de dos conos semejantes* (**286**) *son proporcionales á los cubos de sus rádios.*

Llamando r, r' sus rádios, y a, a' sus alturas, los volúmenes de estos conos serán (**307**)

$$\frac{1}{3}\pi r^2 a \quad\text{y}\quad \frac{1}{3}\pi r'^2 a';$$

de donde

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 a}{\frac{1}{3}\pi r'^2 a'}=\frac{r^2 a}{r'^2 a'},$$

y sustituyendo en la razon compuesta $\frac{r^2 a}{r'^2 a'}$, en vez de la razon componente $\frac{a}{a'}$ su igual por hipótesis $\frac{r}{r'}$ resulta (Alg., **175**, corol.)

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 a}{\frac{1}{3}\pi r'^2 a'}=\frac{r^3}{r'^3}.$$

Observacion. De una manera análoga se demuestra que los volúmenes de dos cilindros semejantes son proporcionales á los cubos de sus rádios.

316. Teorema 4.º *Los volúmenes de dos esferas son proporcionales á los cubos de sus rádios.*

Llamando r y r' sus rádios, los volúmenes de estas esferas serán (**309**, obs.)

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \quad\text{y}\quad \frac{4}{3}\pi r'^3;$$

de donde

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r'^3}=\frac{r^3}{r'^3}.$$

PROBLEMAS NUMÉRICOS.

317. 1.º ¿Cuál será el rádio de una esfera, cuyo volúmen es 1,000 metros cúbicos?

La fórmula del volúmen de la esfera es (**309**, obs.)

$$E=\frac{4}{3}\pi r^3;\quad\text{de donde}\quad r=\sqrt[3]{\frac{3\times E}{4\pi}};$$

y por consiguiente en el presente caso

$$r=\sqrt[3]{\frac{3\times 1000}{4\times 3{,}14159\ldots..}}=6{,}2035\ldots.\text{ metros.}$$

2.º ¿Cuánto pesa un tubo de hierro fundido, de 3 metros de largo y 5 centímetros de grueso, teniendo el rádio mayor 40 centímetros, y pesando un centímetro cúbico del mismo hierro 7,207 gramos?

El volúmen del tubo es (**306**)

$3{,}14159(40^2-35^2)\times 300=353428{,}875$ centím. cúb.,

y el peso será

$353428{,}875\times 7{,}207=2547161{,}902$ gram. $=2547{,}162$ kilógr.

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

3.º Hallar la arista x de un cubo de duplo volúmen que otro cuya arista es a.

Los volúmenes de estos cubos serán (**299**, corol. 2.º) x^3 y a^3; luego segun las condiciones del problema, $x^3=2a^3$, de donde $x=\sqrt[3]{2a^3}=a\sqrt[3]{2}$.

Observacion. Las aristas de estos cubos son inconmensurables (*).

(*) Ya se ve que el problema de la *duplicacion del cubo* no puede resolverse exactamente por el cálculo. Tampoco se consigue esto por construcciones gráfica en que sólo entren arcos de círculo y líneas rectas. *Lacroix* le resuelve por la interseccion de ramas de parábolas. (V. *Traité de Trigonométrie*, pág. 259.)

FIN DE LA GEOMETRÍA.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

CAPÍTULO PRIMERO.

De las líneas trigonométricas.

PRELIMINARES.

1. Las construcciones gráficas empleadas en la resolucion de los problemas geométricos, no son tan exactas como en muchos casos sería de desear; porque la exactitud está siempre limitada por la imperfeccion de los instrumentos, y tambien por la mayor ó menor destreza del que ha de manejarlos.

Por esta razon, aunque ya hemos visto cómo en Geometría se *resuelve* un triángulo rectilíneo, esto es, *cómo se hallan tres de sus seis elementos, conocidos otros tres que le determinen* (*), volveremos ahora á insistir en la resolucion del mismo problema general, que es del mayor interés, empleando en vez de las construcciones gráficas el cálculo, el cual permite obtener los elementos incógnitos con toda la aproximacion que en cada caso puede ser necesaria. Tal es el objeto de la *Trigonometría rectilínea*.

Es, pues, la Trigonometría rectilínea *la ciencia que enseña á resolver los triángulos rectilíneos por medio del cálculo.*

Este resultado se conseguiria por medio de una simple pro-

(*) V. Geometría, números **86, 87, 88** y **89**.