3.º Hallar la arista x de un cubo de duplo volúmen que otro cuya arista es a.

Los volúmenes de estos cubos serán (**299**, corol. 2.º) x^3 y a^3; luego segun las condiciones del problema, $x^3=2a^3$, de donde $x=\sqrt[3]{2a^3}=a\sqrt[3]{2}$.

Observacion. Las aristas de estos cubos son inconmensurables (*).

(*) Ya se ve que el problema de la *duplicacion del cubo* no puede resolverse exactamente por el cálculo. Tampoco se consigue esto por construcciones gráfica en que sólo entren arcos de círculo y líneas rectas. *Lacroix* le resuelve por la interseccion de ramas de parábolas. (V. *Traité de Trigonométrie*, pág. 259.)

FIN DE LA GEOMETRÍA.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

CAPÍTULO PRIMERO.

De las líneas trigonométricas.

PRELIMINARES.

1. Las construcciones gráficas empleadas en la resolucion de los problemas geométricos, no son tan exactas como en muchos casos sería de desear; porque la exactitud está siempre limitada por la imperfeccion de los instrumentos, y tambien por la mayor ó menor destreza del que ha de manejarlos.

Por esta razon, aunque ya hemos visto cómo en Geometría se *resuelve* un triángulo rectilíneo, esto es, *cómo se hallan tres de sus seis elementos, conocidos otros tres que le determinen* (*), volveremos ahora á insistir en la resolucion del mismo problema general, que es del mayor interés, empleando en vez de las construcciones gráficas el cálculo, el cual permite obtener los elementos incógnitos con toda la aproximacion que en cada caso puede ser necesaria. Tal es el objeto de la *Trigonometría rectilínea*.

Es, pues, la Trigonometría rectilínea *la ciencia que enseña á resolver los triángulos rectilíneos por medio del cálculo.*

Este resultado se conseguiria por medio de una simple pro-

(*) V. Geometría, números **86, 87, 88** y **89**.

porcion, si los ángulos de los triángulos fuesen proporcionales con sus lados opuestos; pero no sucediendo así (Geometría, **95**, corol.), fué necesario inventar *un sistema de rectas, que al mismo tiempo que determinan los arcos, y por consiguiente los ángulos que estos arcos miden, son proporcionales á los lados de los triángulos á que dichos ángulos pertenecen.* De este sistema de líneas, l'amadas *líneas trigonométricas,* nos vamos á ocupar al present

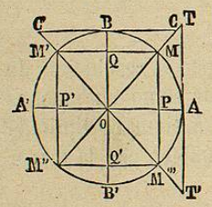
ARTÍCULO PRIMERO.

Valor absoluto de las lineas trigonométricas.

2. *Llámase* SENO *de un arco la perpendicular bajada desde uno de sus extremos al rádio ó diámetro que pasa por el otro extremo.*

El seno del arco AM (fig. 1.ª) es MP, el de AB es BO, el de ABM′ es M′P′, el de la semicircunferencia ABA′ es *cero,* el del arco ABA′M″ es M″P′, etc.

Fig. 1.ª



COROL. 1.º *El seno de un arco* cero *es* cero, *el de un cuadrante el rádio, el de la semicircunferencia tambien es* cero, *etc*

OBSERVACION. El menor valor absoluto del seno es *cero;* y el mayor el rádio.

COROL 2.º *El seno de un arco* AM *es la mitad de la cuerda* MM‴ *del arco duplo.*

Porque $PM=\frac{1}{2}MM'''$ y $MAM'''=2AM$ (Geom. **41**.

3. *Se llama* TANGENTE *trigonométrica de un arco la parte de la tangente geométrica, levantada en uno de sus extremos é interceptada entre el punto de contacto y la prolongacion del rádio ó diámetro, que pasa por el otro extremo.*

La tangente del arco AM es AT, la del arco AB *infinita,* la de ABM′ es AT′, la de la semicircunferencia ABA′ *cero,* la del arco ABA′M″ es AT, etc.

COROL. 1.º *La tangente del arco* cero *es* cero, *la del cuadrante* infinita, *la de la semicircunferencia tambien* cero, *etc.*

OBSERVACION. El menor valor absoluto de la tangente es *cero,* y el mayor el *infinito.*

COROL. 2.º *La tangente del arco de 45° es igual al rádio.*

Porque si el arco AM es de 45°, el ángulo AOT, que mide, será de 45°; luego el ángulo ATO tambien será de 45° (Geometría, **71**, corol. 4.º); luego AT=AO (Geom., **75**, rec., corol. 1.º).

4. *Llamaremos arcos* COMPLEMENTARIOS *aquellos que sumados algebráicamente forman un cuadrante, y* SUPLEMENTARIOS *los que forman dos.*

El complemento del arco AM es MB, el de AB es cero, el de ABM′ es — BM′, el de ABA′ es — BA′, el de ABA′M″ es — BA′M″, etc. El suplemento de AM es MBA′, el de la semicircunferencia cero, el de ABA′M″ es — A′M″, etc.

OBSERVACION. Los complementos de los arcos que nacen en A y se cuentan en el sentido AM, tienen su orígen en B, y los suplementos de iguales condiciones en A′.

5. *Se llama* COSENO (*) *de un arco el seno de su arco complementario.*

El coseno del arco AM es MQ, el de AB es cero, el de ABM′ es M′Q, el de la semicircunferencia es el rádio A′O, el de ABM′A′M″ es M″Q′, etc.

OBSERVACION. Como QM=OP, M′Q=OP′, M″Q′ = OP′, etc., por lados opuestos de paralelógramos, resulta que

El coseno de un arco es la parte del rádio interceptada entre el pié del seno y el centro.

6. *Llámase* COTANGENTE *de un arco la tangente de su arco complementario.*

La cotangente del arco AM es BC, la de AMB es cero, la de ABM′ es BC′, la de la semicircunferencia es infinita, la de ABA′M″ es BC, etc.

De lo expuesto en este número y precedentes se deduce que

1.º A todo arco se refieren cuatro líneas trigonométricas, dos *propias,* que son el seno y la tangente, y dos del arco

(*) La palabra *coseno* está formada de *complementi sinus,* esto es, seno del complemento. De igual modo *cotangente* se forma de *complementi tangens,* tangente del complemento.

complementario, llamadas por esta razon *colíneas*, que son el coseno y la cotangente (*).

2.° *Las líneas* PROPIAS *de un arco son las* COLÍNEAS *del complemento, y las* COLÍNEAS *de un arco son las líneas* PROPIAS *del complementario.* Así, llamando el arco x, como su complemento es 90^0-x (**4**), se tiene

$$\text{sen } x=\cos(90^0-x), \qquad \text{tg } x=\cot(90^0-x) \text{ (**)}.$$
$$\cos x=\text{sen }(90^0-x). \qquad \cot x=\text{tg }(90^0-x).$$

3.° Cuando un arco crece desde cero hasta el cuadrante, crecen sus líneas propias y menguan sus colíneas; lo contrario sucede cuando el arco crece desde el cuadrante hasta la semicircunferencia.

ARTÍCULO II.

Valores relativos de las lineas trigonométricas.

7. Se ha visto (Alg., **11**) que si las cantidades que tienen un modo de ser determinado se consideran como *positivas*, las que tienen un modo de ser contrario á ellas son *negativas*. Haciendo, pues, aplicacion de esto al caso presente, y considerando como positivos los arcos que tienen su orígen en A y se prolongan en el sentido AMB..., y como positivas tambien las líneas trigonométricas del arco positivo AM, menor que el cuadrante, resulta que

1.° Los arcos que tienen su orígen en A y se prolongan en el sentido AM'''B'... son *negativos*.

2.° Los senos y las tangentes que, como M'''P, M''P' y AT' se encuentran en la parte inferior del diámetro AA' son negativos; y tambien lo serán los cosenos y cotangentes que, como BC' y OP', se hallan á la izquierda del diámetro BB'.

COROL. *Las líneas trigonométricas de los arcos comprendidos en el 1.er cuadrante son positivas; las de los que terminan en el 2.° son negativas, excepto el seno; de las correspondientes á arcos que terminan en el 3.er cuadrante son negativas el seno y el*

(*) Se suelen considerar otras cuatro mas, que son el *senoverso*, la *secante*, el *cosenoverso* y la *cosecante*.

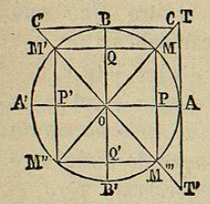
(**) Los nombres seno, tangente, coseno y cotangente, se escriben abreviadamente de este modo : sen, tg, cos, cot.

coseno, y positivas la tangente y cotangente; las de los que terminan en el 4.° son negativas, excepto el coseno.

8. TEOREMA 1.° *Las líneas trigonométricas de un arco negativo* —AM''' *son iguales en valor absoluto á las de otro positivo* +AM, *de la misma longitud que el primero pero tienen signo contrario exceptuando el coseno, que es en todo igual para los dos arcos.*

Los senos MP y M'''P son iguales en longitud (**2**, corol. 2.°); pero positivo el primero y negativo el segundo (**7**, 2.°).

Fig. 1.ª



Los triángulos AOT y AOT' tienen AO comun, los ángulos en A rectos, y el AOT=AOT', porque tienen por medidas los arcos AM y AM''', iguales en valor absoluto por hipótesis; luego dichos triángulos son iguales; luego las tangentes AT y AT' tambien lo serán en longitud; mas la primera es positiva y la segunda negativa (**7**, 2.°).

El coseno OP es comun á los dos arcos y positivo para ambos.

Los triángulos BOC y BOC' tienen OB comun, los ángulos en B rectos : y como AM es igual en longitud á AM''' y este lo es con A'M', los arcos AM y A'M' son iguales en longitud; luego sus complementos BM y BM' tambien lo serán, luego el ángulo BOC=BOC'. Luego dichos triángulos son iguales, luego las cotangentes BC y BC' son de igual longitud; mas la primera es positiva y la segunda negativa (**7**, 2.°).

Llamando x un arco cualquiera, este teorema se expresa algebráicamente así :

$$\text{sen }(-x)=-\text{sen } x, \qquad \text{tg }(-x)=-\text{tg } x,$$
$$\cos(-x)=+\cos x, \qquad \cot(-x)=-\cot x,$$

COROL. $\text{sen }(90^0+x)=[\mathbf{6}, 2.^0]\cos(-x)=\cos x,$
$\cos(90^0+x)=[\mathbf{6}, 2.^0]\text{ sen }(-x)=-\text{sen } x.$

9. TEOREMA 2.° *Las líneas trigonométricas de dos arcos* AM *y* ABA'M'', *que tienen un extremo* A *comun y los otros dos* M *y* M'' *en un mismo diámetro, son iguales; pero el seno y coseno llevan signo contrario en los dos arcos.*

AT es la tangente de estos dos arcos y BC la cotangente. La igualdad de los triángulos OPM y OP'M'' nos da PM=P'M'' y

OP=OP′ : pero PM es de signo contrario á P′M″ y OP á OP′ (**7**, 2.º) ; luego el teorema es cierto para dichos arcos.

Si los arcos fuesen ABM′ y ABA′B′M‴, la tangente AT′ y la cotangente BC′ serían comunes á los dos, y la igualdad de los triángulos OP′M′ y OPM‴ nos daria los senos y cosenos respectivamente iguales y de signo contrario.

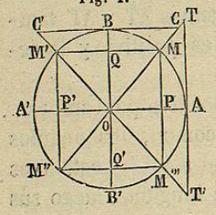
Lo mismo se verifica en otros dos arcos cualesquiera de iguales condiciones, aunque uno sea positivo y otro negativo como ABM′ y AM‴, ó los dos negativos, como AM‴ y AB′A′M′.

Llamando, pues, x un arco cualquiera, el otro arco será 180^0+x : y este teorema se expresa algebráicamente así :

$$\text{sen}\,(180^0+x)=-\text{sen}\,x, \qquad \text{tg}\,(180^0+x)=+\text{tg}\,x,$$
$$\cos\,(180^0+x)=-\cos x, \qquad \cot\,(180^0+x)=+\cot x.$$

Corol. 1.º *Las líneas trigonométricas de un arco no varían de valor absoluto, aunque de dicho arco se reste una semicircunferencia; pero el seno y el coseno llevan signo contrario en los dos arcos.*

Fig. 1.ª



Corol. 2.º *Las líneas trigonométricas de dos arcos suplementarios son iguales en valor absoluto, pero de signo contrario; excepto el seno, que es igual en todo para los dos arcos.*

Porque mudando el signo á la x en las fórmulas del teorema, y teniendo presente que cuando el arco cambia de signo todas sus líneas trigonométricas varian de signo tambien, excepto el coseno (**8**), resulta

$$\text{sen}\,(180^0-x)=+\text{sen}\,x, \qquad \text{tg}\,(180^0-x)=-\text{tg}\,x,$$
$$\cos\,(180^0-x)=-\cos x, \qquad \cot\,(180^0-x)=-\cot x.$$

10. Teorema 3.º *Las líneas trigonométricas de los arcos que se diferencian en una, dos, tres, etc., circunferencias, son iguales.*

Haciendo que estos arcos tengan un mismo orígen, coincidirán sus extremos, y por lo tanto tienen evidentemente iguales líneas trigonométricas.

Corol. 1.º *Las líneas trigonométricas de un arco no varían aunque se le agreguen ó resten de él una ó mas circunferencias.*

Corol. 2.º *Una línea trigonométrica dada corresponde á infinitos arcos.*

11. Teorema 4.º *Todo arco ± x se puede reducir á otro contenido en el primer cuadrante, y cuyas líneas trigonométricas sean respectivamente iguales en valor absoluto á las del arco dado.*

En efecto, si el arco dado es negativo se convierte en positivo, con lo que el valor absoluto de sus líneas trigonométricas no varía (**8**). Réstense del arco $+x$ todas las circunferencias que contenga, y el resto $+x'$ tendrá iguales líneas trigonométricas que $+x$ (**10**, corol. 1.). Si $+x'$ fuese mayor que una semicircunferencia, réstese ésta de él, y el resto $+x''$ tendrá sus líneas trigonométricas de igual valor absoluto que $+x'$ (**9**, corol. 1.º), y por consiguiente que $+x$. Si $+x''$ fuese mayor que un cuadrante, tómese su suplemento $180^0-x''$, ó lo que es igual, réstese de 180^0, y las líneas trigonométricas de este resto $+x'''$ serán iguales en valor absoluto á las de $+x''$ (**9**, corol. 2.º) y por consiguiente à las de $+x'$ y á las de $+x$. Luego las líneas trigonométricas del arco $+x'''$, menor que un cuadrante, son iguales en valor obsoluto á las del arco primitivo $\pm x$.

Observacion. El signo de cada línea trigonométrica se deduce fácilmente de los principios expuestos en los cuatro números precedentes.

EJEMPLOS.

1.º sen 3568^0=sen$(360^0\times11+328^0)$=[**10**, corol. 1.º]
sen 328^0=[**9**, corol. 1.º—sen (328^0-180^0)=—sen 148^0=[**9**, corol. 2.º]
—sen (180^0-148^0)=— sen 32^0.

2.º tg (-3833^0)=[**8**]—tg 3833^0=—tg $(360^0\times10+233^0)$=[**10**, corol. 1.º]
— tg 233^0= [**9**, corol. 1.º]— tg (233^0-180^0) =— tg 53^0.

ARTICULO III.

Relacion entre las líneas trigonométricas de un mismo arco.

12. Sea el arco AM, menor que un cuadrante, sus líneas trigonométricas serán : MP el seno, OP el coseno, AT la tangente y BC la cotangente.

El triángulo rectángulo OMP nos da (Geom. **111**, 1.º)

$$PM^2+PO^2=OM^2$$

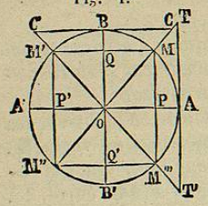
ó, llamando x este arco y r el rádio,

$$\text{sen}^2x+\cos^2x=r^2.$$

De la semejanza de OPM y OAT, resulta

$$\frac{OP}{MP}=\frac{OA}{AT} \quad ó \quad \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}=\frac{r}{\text{tg}x};$$

Fig. 1.ª



de donde $\quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x \times r}{\cos x}$.

Los triángulos OPM y OBC tambien son semejantes, porque ademas de tener los ángulos en P y en B rectos, tienen MOP=OCB por alternos entre paralelas; luego

$$\frac{OP}{MP} = \frac{BC}{OB} \text{ ó } \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cot x}{r};$$

de donde $\quad \cot x = \frac{\cos x \times r}{\operatorname{sen} x}$.

Observacion. Haciendo $r=1$ en las fórmulas anteriores, se convierten respectivamente en

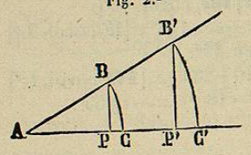
$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad [1],$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad [2],$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad [3].$$

Recíprocamente, si se quisiese restablecer el rádio en alguna fórmula trigonométrica, de donde hubiese desaparecido por haberle hecho igual á la unidad, se observará que describiendo desde el vértice A (fig. 2.ª) de un ángulo dos arcos BC y B'C', y trazando sus senos correspondientes BP y B'P', la semejanza de los triángulos ABP y AB'P', nos da $\quad \frac{BP}{AB} = \frac{B'P'}{AB'}$.

Fig. 2.ª



Suponiendo ahora los rádios AB=1, AB'=r, y llamando x el número de grados de los arcos BC y B'C' y z la longitud del seno BP, se tendrá

$$z = \frac{\operatorname{sen} x}{r}:$$

luego en vez de z ó sea *sen* x, se deberá sustituir $\frac{\operatorname{sen} x}{r}$, y como otro tanto puede demostrarse de las demas líneas trigonométricas, resulta que

Para restablecer el rádio en una fórmula trigonométrica,

se sustituye en vez de cada línea la misma partida por el rádio.

Así, restableciendo el rádio en la fórmula [1], se tendria

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{r}\right)^2 + \left(\frac{\cos x}{r}\right)^2 = 1 \text{ ó } \frac{\operatorname{sen}^2 x}{r^2} + \frac{\cos^2 x}{r^2} = 1;$$

y por último $\quad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = r^2$,

que es la fórmula de donde la [1] provino.

13. Las fórmulas obtenidas en el número anterior, en el supuesto de que el arco es menor que un cuadrante, son generales y ciertas por lo tanto para otro arco cualquiera.

Tomemos una de dichas fórmulas, por ejemplo la [2], y vamos á demostrar que, cualquiera que sea el arco x : 1.º los dos miembros de esta ecuacion tienen igual valor absoluto ; 2.º tambien tienen el mismo signo.

1.º Reduciendo el arco x á otro x' contenido en el primer cuadrante (**11**), se tiene para x' (**12**)

$$\operatorname{tg} x' = \frac{\operatorname{sen} x'}{\cos x'};$$

y como las líneas trigonométricas de x' tienen respectivamente igua valor absoluto que las de x, $\operatorname{tg} x$ y $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ son iguales en valor absoluto

2.º sen x y cos x tienen el mismo signo en el 1.er cuadrante, contrario en el 2.º, el mismo en el 3.º, y contrario en el 4.º (**7**, corol.); luego el miembro $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es positivo en el 1er cuadrante, negativo en el 2.º, positivo en el 3.º y negativo en el 4.º; pero esto es lo que sucede a tg x (**7**, corol.); luego $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $\operatorname{tg} x$ tienen el mismo signo, luego

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

cualquiera que sea el valor del arco x.

Lo mismo se demuestra la generalidad de las demas fórmulas.

14. Por medio de las tres ecuaciones

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

que ligan entre sí las cuatro líneas trigonométricas, conocida una de estas se pueden determinar las restantes (Alg., **115**).

Suponiendo conocido sen x, se tendrá

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}, \quad \cot x = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{\operatorname{sen} x}$$

Observacion. Multiplicando la fórmula [2] por la [3], tambien se tiene $\operatorname{tg} x \cot x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 1$; de donde

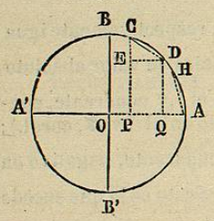
$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cot x} \quad [1].$$

ARTICULO IV.

Relacion entre las líneas trigonométricas de dos arcos y las de la suma ó diferencia de los mismos.

15. Problema. **Dados los** *senos* **y** *cosenos* **de dos arcos** a **y** b **determinar el** *coseno* **de la diferencia de dichos arcos.**

Fig. 3.ª



Supongamos que los arcos a y b sean positivos y menores que el cuadrante, por ejemplo, a=AC y b=AD (fig. 3.ª). Trácense desde C y D las perpendiculares CP y DQ sobre el diámetro AA', la DE paralela á este, y la cuerda CD.

El triángulo rectángulo CDE nos da (Geom. **111**, 1.º)

$$CD^2 = CE^2 + ED^2 :$$

pero evidentemente se tiene

$CD = \text{cuerda}\,(a-b)$, $CE = \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b$, $ED = \cos b - \cos a$; luego sustituyendo estos valores en la ecuacion anterior, resulta

$$\text{cuerd}^2\,(a-b) = (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2 + (\cos b - \cos a)^2 =$$

$\operatorname{sen}^2 a - 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b - 2 \cos a \cos b + \cos^2 a$, ó como $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ y $\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b = 1$ (**12**, obs.),

$$\text{cuerd}^2(a-b) = 2 - 2(\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b) \quad [A].$$

Suponiendo en esta ecuacion $b = 0$, se convierte en (**2**, corolario 1.º y 5.º) $\quad \text{cuerd}^2 a = 2 - 2 \cos a$,

y cambiando en esta ecuacion a en $a - b$, resulta

$$\text{cuerd}^2(a-b) = 2 - 2 \cos (a-b);$$

de esta última ecuacion y de la [A], que tiene comun el primer miembro, se deduce

$$2 - 2 \cos (a-b) = 2 - 2 (\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b);$$

y despejando $\cos (a-b)$

$$\cos (a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad [1],$$

cuya ecuacion resuelve el problema propuesto.

Corol. 1.º $\operatorname{sen} (a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$ [2].

Porque cambiando a en $90^0 + a$ en la fórmula [1], se tiene $\cos [90^0 + (a-b)] = \cos (90^0 + a) \cos b + \operatorname{sen} (90^0 + a) \operatorname{sen} b$, ó (**8**, corol.)

$$-\operatorname{sen} (a-b) = -\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,$$

cuya ecuacion, cambiados los signos, da la que se quiere deducir.

Corol. 2.º $\cos (a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ [3],
$\operatorname{sen} (a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$ [4].

Porque cambiando el signo al arco b en las fórmulas [1] y [2], y teniendo presente que *sen b* cambia tambien de signo (**8**), resultan las del corolario.

Observacion. Por medio de las cuatro fórmulas precedentes fácilmente se hallarian otras análogas para $\operatorname{tg}(a \pm b)$ y $\cot(a \pm b)$.

Generalizacion de las fórmulas precedentes.

16. Supongamos ahora que los arcos a y b sean de una magnitud y signo cualquiera. Dándoles un orígen comun A, cualquiera que sea la posicion de los puntos C y D en que caen los otros extremos, se puede repetir la construccion anterior, y siempre quedará formado el triángulo CDE.

Para demostrar, pues, la generalidad de la fórmula [A], y por consiguiente la de las cuatro deducidas de ella, basta probar que en todo caso se verifica

1.º $CD = \text{cuerda}\,(a-b)$,
2.º $CE = \pm (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)$,
3.º $ED = \pm (\cos b - \cos a)$.

1.º El arco a se compone del menor arco positivo AC, que va desde A á C, aumentado de cierto número de circunferencias positivas ó negativas: de igual manera el arco b es igual al menor arco positivo AD mas ó ménos cierto número de circunferencias; luego la diferencia $a-b$ de estos dos arcos es el arco DC=AC—AD mas ó ménos cierto número de circunferencias. Si se toma el punto A como orígen de este arco, será necesario hacerle dar cierto número de vueltas en uno ú otro sentido, tomar despues un arco AH = CD en el sentido

AHDCB....., y H será el extremo del arco $a-b$; luego la cuerda AH de este arco será igual á la del arco CD.

2.º Si los puntos C y D están en un mismo lado del diámetro AA', es evidente que $CE=\pm(\text{sen}\,a-\text{sen}\,b)$, tomando el signo $+$ cuando esté C superior á D y el $-$ cuando inferior; si están á lado diferente del diámetro, CE es una suma $CP+DQ$, pero entónces uno de ellos es positivo y otro negativo; luego tambien se verifica en este caso que $CE=\pm(\text{sen}\,a-\text{sen}\,b)$.

3.º Del mismo modo se demuestra que la igualdad $CD=\pm(\cos b-\cos a)$, evidente cuando los puntos C y D están en un mismo lado del diámetro BB', se verifica de igual modo cuando se hallan á diferente lado de dicho diámetro, tomando el signo $+$ cuando C esté á la izquierda de D.

Luego las fórmulas deducidas son generales (*).

Consecuencias de las fórmulas anteriores.

17. Haciendo $a=b$ en las fórmulas [3] y [4] del número anterior, se tiene

$$\cos 2a=\cos^2 a-\text{sen}^2 a,$$
$$\text{sen}\,2a=2\text{sen}\,a\cos a;$$

y suponiendo en estas $2a=A$, de donde $a=\frac{1}{2}A$, resulta

$$\cos A=\cos^2\tfrac{1}{2}A-\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A \quad [1],$$
$$\text{sen}\,A=2\text{sen}\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A \quad [2].$$

Tambien se tiene (**12**, obs.)

$$1=\cos^2\tfrac{1}{2}A+\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A,$$

de cuya ecuacion y de la [1] se deduce (Alg. **93**)

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{1+\cos A}{2} \quad \text{y} \quad \text{sen}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{1-\cos A}{2}$$

de donde $\quad 2\cos^2\tfrac{1}{2}A=1+\cos A \quad [3]$

y $\quad 2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A=1-\cos A \quad [4].$

(*) Esta elegante demostracion está tomada de la *Trigonometría de MM. Rouche y Lacour*, que á su vez la han tomado de *Mr. Sarrus*.

18. La suma de las fórmulas [4] y [2] del núm. **15** nos da

$$\text{sen}\,(a+b)+\text{sen}\,(a-b)=2\,\text{sen}\,a\cos b$$

y la diferencia

$$\text{sen}\,(a+b)-\text{sen}\,(a-b)=2\cos a\,\text{sen}\,b:$$

dividiendo ordenadamente estas igualdades y observando que (**12**, obs.) $\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}=\text{tg}\,x$, resulta

$$\frac{\text{sen}\,(a+b)+\text{sen}(a-b)}{\text{sen}\,(a+b)-\text{sen}(a-b)}=\frac{2\text{sen}\,a\cos b}{2\cos a\,\text{sen}\,b}=\frac{\text{sen}\,a}{\cos a}:\frac{\text{sen}\,b}{\cos b}=\frac{\text{tg}\,a}{\text{tg}\,b}:$$

suponiendo en esta ecuacion $a+b=A$ y $a-b=B$,

de donde $a=\frac{1}{2}(A+B)$ y $b=\frac{1}{2}(A-B)$, se tiene al fin

$$\frac{\text{sen}\,A+\text{sen}\,B}{\text{sen}\,A-\text{sen}\,B}=\frac{\text{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)} \quad [1].$$

CAPÍTULO II.

De las tablas trigonométricas.

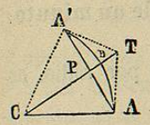
ARTICULO PRIMERO.

Determinacion de *sen* 1' en valores del radio.

19. Teorema 1.º *Todo arco positivo y menor que un cuadrante es mayor que su seno y menor que su tangente.*

Sea el arco AB (fig. 4.ª). Trácense los rádios OA y OB, el seno AP y la tangente AT; dóblese la figura AOT hácia la parte superior, sirviendo de eje OT, y en la figura total resultante AOA'T se tendrá (Geom. **5** y **138**)

Fig. 4.ª



$$AA'<ABA'<ATA',$$

ó partiendo por 2 y llamando x el arco AB,

$$\text{sen}\,x<x<\text{tg}\,x.$$

20. Teorema 2.º *La diferencia entre un arco del primer*