AHDCB....., y H será el extremo del arco $a-b$; luego la cuerda AH de este arco será igual á la del arco CD.

2.º Si los puntos C y D están en un mismo lado del diámetro AA', es evidente que $CE=\pm(\text{sen}\,a-\text{sen}\,b)$, tomando el signo $+$ cuando esté C superior á D y el $-$ cuando inferior; si están á lado diferente del diámetro, CE es una suma $CP+DQ$, pero entónces uno de ellos es positivo y otro negativo; luego tambien se verifica en este caso que $CE=\pm(\text{sen}\,a-\text{sen}\,b)$.

3.º Del mismo modo se demuestra que la igualdad $CD=\pm(\cos b-\cos a)$, evidente cuando los puntos C y D están en un mismo lado del diámetro BB', se verifica de igual modo cuando se hallan á diferente lado de dicho diámetro, tomando el signo $+$ cuando C esté á la izquierda de D.

Luego las fórmulas deducidas son generales (*).

Consecuencias de las fórmulas anteriores.

17. Haciendo $a=b$ en las fórmulas [3] y [4] del número anterior, se tiene

$$\cos 2a=\cos^2 a-\text{sen}^2 a,$$
$$\text{sen}\,2a=2\text{sen}\,a\cos a;$$

y suponiendo en estas $2a=A$, de donde $a=\frac{1}{2}A$, resulta

$$\cos A=\cos^2\tfrac{1}{2}A-\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A \quad [1],$$
$$\text{sen}\,A=2\text{sen}\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A \quad [2].$$

Tambien se tiene (**12**, obs.)

$$1=\cos^2\tfrac{1}{2}A+\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A,$$

de cuya ecuacion y de la [1] se deduce (Alg. **93**)

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{1+\cos A}{2} \quad \text{y} \quad \text{sen}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{1-\cos A}{2}$$

de donde $\quad 2\cos^2\tfrac{1}{2}A=1+\cos A \quad [3]$

y $\quad 2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A=1-\cos A \quad [4].$

(*) Esta elegante demostracion está tomada de la *Trigonometría de MM. Rouche y Lacour*, que á su vez la han tomado de *Mr. Sarrus*.

18. La suma de las fórmulas [4] y [2] del núm. **15** nos da

$$\text{sen}\,(a+b)+\text{sen}\,(a-b)=2\,\text{sen}\,a\cos b$$

y la diferencia

$$\text{sen}\,(a+b)-\text{sen}\,(a-b)=2\cos a\,\text{sen}\,b:$$

dividiendo ordenadamente estas igualdades y observando que (**12**, obs.) $\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}=\text{tg}\,x$, resulta

$$\frac{\text{sen}\,(a+b)+\text{sen}(a-b)}{\text{sen}\,(a+b)-\text{sen}(a-b)}=\frac{2\text{sen}\,a\cos b}{2\cos a\,\text{sen}\,b}=\frac{\text{sen}\,a}{\cos a}:\frac{\text{sen}\,b}{\cos b}=\frac{\text{tg}\,a}{\text{tg}\,b}:$$

suponiendo en esta ecuacion $a+b=A$ y $a-b=B$,

de donde $a=\frac{1}{2}(A+B)$ y $b=\frac{1}{2}(A-B)$, se tiene al fin

$$\frac{\text{sen}\,A+\text{sen}\,B}{\text{sen}\,A-\text{sen}\,B}=\frac{\text{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)} \quad [1].$$

CAPÍTULO II.

De las tablas trigonométricas.

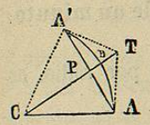
ARTICULO PRIMERO.

Determinacion de *sen* 1' en valores del radio.

19. Teorema 1.º *Todo arco positivo y menor que un cuadrante es mayor que su seno y menor que su tangente.*

Sea el arco AB (fig. 4.ª). Trácense los rádios OA y OB, el seno AP y la tangente AT; dóblese la figura AOT hácia la parte superior, sirviendo de eje OT, y en la figura total resultante AOA'T se tendrá (Geom. **5** y **138**)

Fig. 4.ª



$$AA'<ABA'<ATA',$$

ó partiendo por 2 y llamando x el arco AB,

$$\text{sen}\,x<x<\text{tg}\,x.$$

20. Teorema 2.º *La diferencia entre un arco del primer*

cuadrante y su seno es menor que la cuarta parte del cubo del arco.

Sea x el arco menor que el cuadrante, y se tendrá (**19**)

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x>\frac{1}{2}x \quad \text{ó} \quad (\textbf{12}, \text{obs.})\ \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}>\frac{1}{2}x;$$

de donde
$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}x>\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x;$$

y multiplicando esta desigualdad por $2\cos\frac{1}{2}x$, resulta

$$2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x>x\cos^2\frac{1}{2}x:$$

mas
$$2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x=\operatorname{sen}x\ (\textbf{17}),$$

$$\cos^2\frac{1}{2}x=1-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}x\ (\textbf{14});$$

luego
$$\operatorname{sen}x>x\left(1-\operatorname{sen}^2\quad\right).$$

Sustituyendo en vez de $sen\frac{1}{2}x$ el arco$\frac{1}{2}x$, que es mayor que el seno (**19**), el sustraendo del segundo miembro aumenta; luego el resto, ó sea el segundo miembro, disminuye; luego con mayor razon se tiene

$$\operatorname{sen}x>x\left(1-\frac{1}{4}x^2\right) \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}x>x-\frac{1}{4}x^3,$$

ó
$$x-\frac{1}{4}x^3<\operatorname{sen}x;$$

y sumando con los dos miembros de esta última desigualdad $\frac{1}{4}x^3-\operatorname{sen}x$, resulta al fin

$$x-\operatorname{sen}x<\frac{1}{4}x^3.$$

21. Problema. **Calcular el valor del seno de un minuto, suponiendo el rádio igual á la unidad.**

La longitud de la circunferencia, que tiene 1 por rádio, es (Geom. **137**, corol. 2.º) $c=2\pi$; de donde

$\frac{1}{2}c=\pi$ ó $180^\circ=\pi$; luego la longitud del arco de 1′ será

$$\text{arco de } 1=\frac{\pi}{180^\circ\times 60}=\frac{3{,}14159.....}{10800}=0{,}000\ 290\ 888\ 208\ 6....$$

La longitud de este arco es, pues, menor que 0,0003; luego si se supone

$$\operatorname{sen}1'=\text{arco } 1'$$

el error cometido es menor (**20**) que

$$\frac{1}{4}\left(0{,}0003\right)^3<0{,}000\ 000\ 000\ 007:$$

y como este error sólo afecta la cifra decimal del órden duodécimo, resulta que el valor del seno con once cifras decimales es

$$\text{seno } 1'=0{,}000\,290\,888\,20.$$

ARTÍCULO II.

Formacion de las tablas.

22. Las tablas trigonométricas *naturales* contienen al lado de cada arco desde O hasta 90°, contados de minuto en minuto ó de 10 en 10 segundos, los valores de las líneas trigonométricas correspondientes. No es necesario que se extiendan á mayor número de grados, porque ya se ha dicho (**11**) que todo arco puede reducirse á otro contenido en el primer cuadrante, y cuyas líneas trigonométricas sean respectivamente iguales en valor absoluto á las del arco primitivo, pudiendo tambien en cada caso determinarse el signo correspondiente (**11**, obs.). Así

$$\operatorname{sen}145^\circ=\operatorname{sen}35^\circ,\quad \operatorname{tg}98^\circ=-\operatorname{tg}82^\circ, \text{etc.}$$

Debe advertirse igualmente que basta calcular las líneas trigonométricas de los arcos comprendidos desde O á 45° inclusive; pues las líneas *propias* y *colíneas* de los arcos mayores que 45° y menores que 90°, son las *colíneas* y líneas *propias* de sus arcos complementarios, necesariamente menores que 45° (**6**, 2.º). Así

$$\operatorname{sen}60^\circ=\cos 30^\circ,\quad \cos 72^\circ=\operatorname{sen}18^\circ, \text{etc.}$$

Supondremos que en las tablas, de cuya formacion se trata, los arcos crecen de minuto en minuto; de manera que segun lo expuesto, el problema que nos proponemos resolver se reduce á la determinacion de las líneas trigonométricas de los arcos de 1′, 2′, 3′, etc., hasta 45°.

Veamos cómo puede esto conseguirse.

23. Conociendo el valor de sen 1′ (**21**), el de cos 1′ se determina por la fórmula (**14**)

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x},$$

haciendo en ella $x = 1'$ y sustituyendo en vez de sen 1′ el valor hallado para este.

Los valores de los senos y cosenos de 2′ 3′, 4′, ... 45°, se pueden calcular por medio de las fórmulas (**15**, corol. 2.°)

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

haciendo en ellas $a = 1'$ y $b = 1', 2', 3', 5', \ldots\ldots, 44° 59'$.

Los valores de las tangentes y cotangentes pueden hallarse tambien por las fórmulas (**12**, obs.)

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{y} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

sustituyendo en vez de sen x y cos x los valores de los senos y cosenos de 1′, 2′, 3′, ..., 45°, calculados de antemano.

24. Del modo que acabamos de exponer se pueden concebir formadas las tablas trigonométricas *naturales* (*); mas ejecutándose los cálculos por medio de logaritmos con mucha mayor facilidad que por los métodos ordinarios, estas tablas han sido trasformadas en otras, donde al lado de cada arco se hallan los logaritmos de sus respectivas líneas trigonométricas. Las nuevas tablas se conocen con el nombre de tablas trigonométricas *artificiales* ó simplemente de *tablas trigonométricas*, porque son las únicas de que en la práctica se hace uso.

Al ejecutar la trasformacion de que se acaba de hacer mérito, como los senos y cosenos son menores que el rádio, sucediendo otro tanto con las tangentes de los arcos comprendidos entre 0° y 45°, y las contangentes de los comprendidos entre 45° y 90°, los logaritmos de todas estas líneas trigonométricas deberán resultar negativos ó de característica negativa y mantisa positiva, en la suposicion de que el rádio sea igual á la unidad (Álg. **230**, 3.° y **239**) (**).

(*) El método expuesto sirve sólo para que se vea la posibilidad de la construccion de las tablas, á fin de que los principiantes no se arredren al manejar unos libros cuya formacion es para ellos un misterio. Por lo demas existen otros métodos mucho mas expeditos, cuya exposicion no es de este lugar.

(**) Por creer esto un inconveniente (que no lo es cuando se emplean logaritmos de mantisa positiva), las tablas que se citan excepto las del Sr. Vazquez Queipo desde la edicion de 1867, están calculadas suponiendo el rádio igual á *diez mil millones*, esto es, $r = 10^{10}$, en cuya hipótesis L. $r = 10$ y C. L. $r = \overline{10}$ (Alg. **238** 2.ª y **246**). Ya se ve que por evitar esta dificultad imaginaria se incurre en una real, cual es la de figurar en los cálculos el logaritmo del rádio, y tener que restablecer este en las fórmulas cuando haya desaparecido por haberle hecho igual á la unidad; lo que no sucede cuando $r = 1$; puesto que L. $1 = 0$ y C. L. $1 = 0$ (Alg. **230**, 2.° y **245**).

ARTÍCULO III.

Uso de las tablas trigonométricas.

25. Las tablas de los logaritmos de los números van acompañadas casi siempre de las *trigonométricas*: siendo de aquellas las mas conocidas entre nosotros, como ya se indicó en otro lugar, las españolas de Vazquez Queipo y Calvet, y las francesas de Callet y Lalande; otro tanto sucede con las trigonométricas.

Las de Vazquez Queipo y Lalande contienen los lagaritmos de las líneas trigonométricas de los diferentes arcos del cuadrante, contados de minuto en minuto, con seis cifras decimales las primeras y con cinco ó siete las segundas. En las de Callet y Calvet los arcos aumentan de 10 en 10 segundos, y las líneas trigonométricas van expresadas con siete cifras decimales de aproximacion.

Por medio de cualquiera de ellas se resuelve el problema general: « Dado un arco ó ángulo, hallar los logaritmos de las líneas trigonométricas del mismo » y su recíproco. Al efecto van precedidas de su respectiva explicacion, que sería inútil repetir aquí.

Ya hemos indicado la preferencia que para nosotros merecian las de Vazquez Queipo, calculadas en el supuesto de que el *rádio es igual á la unidad*, por cuya razon á ellas nos referiremos en los problemas que hayamos de resolver en lo sucesivo (*).

(*) El que quiera emplear otras tendrá en cuenta la nota precedente.