Números. Páginas.

318—321 § II. Investigacion de las raíces conmensurables de las ecuaciones numéricas. . . . . 435—441
322—324 Regla de esclusion. . . . . 441—445
325—326 Divisores conmensurables de segundo grado. . . . . 445—447

§ III. Investigacion de las raíces incomensurables.

328—330 Método de Lagrange. . . . . 448—456
331—333 Conversion en fraccion continua de un número irracional cualquiera. . . . . 456—460
334—345 Método de Newton. . . . . 460—474
346—355 Teoría de M. Sturm. — Su aplicacion á la investigacion de las raíces incomensurables. . . . . 474—488
356—370 § IV. Segunda parte de la eliminacion. . . . . 488—511

CAPÍTULO IX.

Complemento de la teoría de las ecuaciones.

371—376 § I. Investigacion de las raíces imaginarias. . . . . 512—520
377—379 § II. Resolucion completa de la ecuacion de dos términos. . . 521—523
380—381 Resolucion de la ecuacion $y^m-1=0$. . . . . 523—528
382—383 Relaciones entre las raíces de $y^m-1=0$. . . . . 528—531
384—386 Resolucion de la ecuacion $y^m+1=0$. . . . . 531—534
387— Ecuacion trinomia, $x^{2m}+px^m+q=0$. . . . . 534—535
388—392 § III. Resolucion de las ecuaciones generales de grado superior al segundo. — Ecuaciones del tercer grado. . . . . 535—543
393—394 Ecuacion de cuarto grado. . . . . 543—547
Resolucion de las ecuaciones de tercero ó cuarto grado por las funciones simétricas. . . . . 547—
395— Ecuacion de segundo grado. . . . . 548—549
396— Ecuacion de tercer grado. . . . . 549—554
397—398 Ecuacion de cuarto grado. . . . . 554—559

CAPÍTULO X.

Complemento de la teoría de las series.

399—403 § I. De las series recurrentes. . . . . 560—566
404—411 Descomposicion de una fraccion racional en fracciones simples. 566—577
412—418 § II. De las series de números figurados y de las que dependen de ellas. . . . . 577—585
419—421 § III. Cambio de las series ó método inverso de ellas. . . . 585—589
422—430 § IV. De las series trigonométricas y circulares. — Desarrollo del *sen. x.* y del *cos. x.* . . . . . 589—598

# ALGEBRA.

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

## INTRODUCCION.

**1.** El álgebra es la parte de las matemáticas en que se emplean signos propios para abreviar y generalizar los razonamientos de que es susceptible la resolucion de las cuestiones relativas á los números.

Distínguense dos especies principales de cuestiones :

El *teorema*, que tiene por objeto demostrar la existencia de cierta propiedades de que gozan números conocidos y dados; y el *problema*, que se dirige á determinar ciertos números, fundándose en el conocimiento de otros que tienen con aquellos relaciones indicadas por el enunciado.

1°. Los elementos principales de que se hace uso en álgebra para llegar á este doble resultado, son :

Las letras del alfabeto, que sirven para designar los números sobre los que debe razonarse. Su uso es necesario, ya para abreviar los razonamientos, ya para generalizarlos, pues que por el empleo de estas letras se conoce mucho mejor que tal ó tal propiedad pertenece á muchos números á la vez; ó bien cuando se trata de un problema en que la *manera* de satisfacer á su enunciado es independiente de todo valor particular atribuido á los números comprendidos en este mismo enunciado.

2°. El signo $+$, de que nos servimos para marcar la adicion de dos ó mas números y que se enuncia *mas*.

Así, $25+36$ se enuncia 25 *mas* 36, ó 25 *aumentado* de 36. Del mismo modo, $a+b$ se enuncia *a mas b*, ó el número designado por *a* aumentado del n[illegible] mas [illegible]ro designado por *b*.

[illegible] que n[illegible] la-
mientos [illegible] mostrar le

3°. El signo —, que se enuncia *ménos*, y de que se hace parcar la sustraccion de dos números el uno del otro.

Así, 45—24 se enuncia 45 *ménos* 24, ó 45 disminuido de 24, ó tambien el *esceso de* 45 *sobre* 24.

$a—b$ se enuncia *a ménos b*, ó *a disminuido de b*.

4°. El signo de la multiplicacion, que es $\times$, ó un punto que se coloca entre las dos cantidades.

Así, $36\times25$, ó 36. 25. se enuncia 36 *multiplicado por* 25, ó *el producto de* 36 *por* 25.

Cuando los números cuya multiplicacion se quiere indicar están designados por letras, conviene mas escribirlos unos al lado de los otros sin interposicion de signo.

De modo que $ab$ significa lo mismo que $a\times b$ ó $a.\ b$; y $abc$ es lo mismo que $a\times b\times c$, ó $a.\ b.\ c$.

Debe sin embargo advertirse que la notacion $ab$ ó $abc$, que es mas simple que la $a\times b$ ó $a\times b\times c$, no puede emplearse sino cuando los números se hallan designados por letras; porque si se quisiere representar, por ejemplo, el producto de 5 por 6, y se escribiese para abreviar 56, se confundiria esta notacion con el número *cincuenta y seis* escrito en el sistema decimal. Esta observacion es de mucha importancia para los principiantes.

5°. El signo de la division, que consiste en dos puntos (:) que se colocan entre el dividendo y el divisor, ó bien en un guion —, encima y debajo del que se colocan respectivamente el dividendo y el divisor.

Así, $24:6$, ó $\frac{24}{6}$ se enuncia 24 *dividido por* 6, ó el *cociente de* 24 *por* 6.

$\frac{a}{b}$ ó $a:b$ se enuncia *a dividido por b*. Se dice tambien *a entre b*.

La anotacion $\frac{a}{b}$ es la mas usada.

6°. El coeficiente, signo que se emplea para indicar la adicion de muchos números iguales. Así en vez de escribir $a+a+a+a+a$ que representa la adicion de 5 números iguales á $a$, se escribe 5 $a$. Del mismo modo, 11 $a$ espresa la adicion de 11 números iguales á $a$; $12ab$, la adicion de 12 números iguales al producto de $a$ por $b$.

*El coeficiente es pues un número particular escrito á la izquierda otro número espresado por una ó muchas letras, y marca las*



*veces que se debe tomar la letra ó el producto que representan las letras.*

7°. El *esponente*, signo de que nos servimos cuando un número designado por una letra debe entrar varias veces como factor en un producto. Así en vez de escribir $a\times a\times a\times a\times a$ ó $a.\ a.\ a.\ a.\ a.$ se escribe mas sencillamente $a^5$ que se pronuncia *a cinco*; ó mejor *a elevado á la 5ª potencia*.

Se llama *potencia* el resultado de la multiplicacion de varios números iguales, y *grado* de la potencia la *cantidad* de los números iguales multiplicados entre sí.

El *esponente* es el signo de este grado. Se escribe á la derecha y hácia la parte superior de una letra, y marca las veces que la cantidad espresada por esta letra debe entrar como factor en un producto.

Para hacer mas palpable la importancia que tienen en álgebra el esponente y coeficiente, supongamos que se quiera espresar un producto compuesto de 4 factores iguales á $a$, de 3 factores iguales á $b$, y 2 factores iguales á $c$; se escribirá $a^4\ b^3\ c^2$ en vez de $aaaabbbcc$.

Se desea ademas espresar que este último resultado debe tomarse 7 veces, ó debe ser multiplicado por 7, se escribirá $7a^4\ b^3\ c^2$. Esto da una idea del *laconismo* del lenguaje algebráico.

8°. El signo $\sqrt{}$ que precede á un número, cuando se quiere indicar que hay que estraer de este número una raíz de cierto grado.

Así $\sqrt[3]{a}$ se enuncia *raiz tercera* ó *cúbica de a*....., $\sqrt[4]{b}$ se enuncia *cuarta raiz de b*.

Llámase *raiz* 2.ª, 3.ª, 4.ª.... de un número, un segundo número que elevado á la 2.ª 3.ª 4.ª potencia, reproduce el primer número.

Nosotros no haremos uso del signo $\sqrt{}$ sino desde el capítulo tercero en adelante.

9°. El signo por medio del cual se espresa que dos cantidades son iguales. Este signo es $=$, y se enuncia *es igual á* ó *igual á*.

Así para escribir con brevedad que el esceso de 36 sobre 25 es igual á 11, se escribe $36-25=11$.

Es decir, 36 *ménos* 25 *es igual á* 11.

10°. El signo de desigualdad $>$ de que nos servimos para escribir que una cantidad es mayor ó menor que otra.

Así, $a>b$ significa *a mayor que b* ó *superior á b*; $a<b$ significa *a menor que b* ó *inferior á b*; es decir que la abertura del signo debe mirar hácia el lado de la mayor cantidad.

Se ve, pues, por lo espuesto que puede considerarse el álgebra como una especie de lengua compuesta de signos, con cuya ayuda se sigue con mas facilidad el encadenamiento de las ideas en los razonamientos que nos vemos obligados á hacer, bien sea para demostrar la

existencia de una propiedad, bien para encontrar la solucion de un problema.

Se concebirá aun mejor la utilidad de los signos algebráicos con las cuestiones siguientes :

PRIMERA CUESTION.

3. *La suma de dos números es* 67 ; *su diferencia* 19 : *¿qué dos números son estos?*

Modo de resolverlo.

Procuraremos ante todo establecer, con ayuda de los signos en que acabamos de convenir, una relacion entre los números dados y los desconocidos del enunciado.

Si fuese conocido el menor de los dos números buscados, se obtendria el mayor añadiendo 19 al menor. Sentado esto, designemos á este por $x$; el mayor puede entónces designarse por $x+19$, y su suma $x+x+19$, ó $2x+19$. Pero segun el enunciado esta suma debe ser 67; de modo que se tiene la igualdad ó la *enunciacion*.... $2x+19=67$.

De modo que $2x$ aumentado de 19 da 67 por resultado, luego $2x$ solo es igual á 67 ménos 19, ó $2x=67-19$, ó efectuando la sustraccion, $2x=48$.

Luego en fin, $x$ es igual á la mitad de 48, es decir,

$$x=\frac{48}{2}=24.$$

Como el número menor es 24, el mayor $x+19$ es $24+19$, ó 43.

En efecto, se tiene $43+24=67$, y $43-24=19$.

Hé aquí el cuadro de los cálculos algebráicos.

Sea $x$..... el número menor,

$x+19$ será el mayor.

Ecua... $2\times x+19=67$, de donde $2x=67-19=48$; luego $x=\frac{48}{2}=24$

y por consiguiente, $x+19=24+19=43$.

En efecto, $43+24=67$, $43-24=19$.



Otra resolucion.

Sea $x$ el número mayor.

$x-19$ será el número menor.

Ecua. $2x-19=67$, de donde $2x=67+19=86$; luego $x=\frac{86}{2}=43$,

y por consiguiente, $x-19=43-19=24$.

Aquí se ve de qué manera, con el auxilio de los signos algebráicos, se llegan á comprender en un cuadro muy reducido los razonamientos que nos vemos obligados á hacer para resolver un problema; razonamientos que escritos en lenguaje ordinario exigirian muchas veces una ó mas páginas.

RESOLUCION GENERAL DE ESTE PROBLEMA.

4. *La suma de dos números es* a, *su diferencia* b. *Se pide encontrar los dos números.*

Sea $x$..... el número menor,

$x+b$ designa entónces el mayor.

Ecua. $2x+b=a$, de donde, $2x=a-b$; luego $x=\frac{a-b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$,

y por consiguiente, $x+b=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+b=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$.

Como la forma de estos dos resultados es independiente de todo valor particular atribuido á las letras $a$ y $b$, se sigue que *conociendo la suma de dos números y su diferencia, se obtendrá el número mayor añadiendo la semi-suma á la semi-diferencia*, y *el menor, descontando de la semi-suma la semi-diferencia.*

Así sea la suma dada 237, y la diferencia 99;

el mayor es $\frac{237}{2}+\frac{99}{2}$, ó $\frac{237+99}{2}=\frac{336}{2}=168$.

y el menor $\frac{237}{2}-\frac{99}{2}$, ó $\frac{138}{2}=69$.

En efecto, $168+69=237$, $168-69=99$.

Se concibe en vista de la anterior cuestion la utilidad de las letras para representar los datos de un problema. Como no se puede mas que indicar sobre estas letras las operaciones de la aritmética, el resultado á que se llega conserva la huella de las operaciones que es necesario efectuar con las cantidades conocidas para obtener los valores de las cantidades que se buscan.

Las espresiones $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$ y $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, á que se ha llegado en el problema precedente se llaman en álgebra FÓRMULAS, por cuanto puede decirse que comprenden las *soluciones* de todas las cuestiones de la misma naturaleza, en cuyo enunciado se hacen únicamente variar los valores numéricos de los datos.

Se llaman en general SOLUCIONES de un problema los números susceptibles de verificar su enunciado.

SEGUNDA CUESTION. — TEOREMA.

**5.** *La suma de dos números multiplicada por su diferencia da por producto la diferencia de los cuadrados ó de las segundas potencias de estos dos números.*

Así sean estos 12 y 9; su suma es 21, y su diferencia 3. Se reconoce que el producto $21\times3$ ó 63, es igual á 144 que es el cuadrado de 12, disminuido de 81 que es el cuadrado de 9.

Pero para poner en evidencia esta propiedad, sean los que se quiera los dos números, representémoslos por las letrás $a$ y $b$. La suma se escribirá por $a+b$, y la diferencia por $a-b$.

Para formar el producto de estas dos espresiones se supondrá desde luego que haya que multiplicar la suma $a+b$ por $a$ y será el producto $a\times a+b\times a$, ó mas sencillamente, $a^2+ab$: porque es preciso tomar cada una de las dos partes de que se compone $a+b$, tantas veces como unidades hay en $a$, y sumar los dos productos. Pero no es por $a$ solo por el que debia multiplicarse, sino por $a$ disminuido de $b$; de suerte que el producto $a^2+ab$ tiene demas el producto de $a+b$ por $b$, es decir $ab+b^2$. Es preciso, pues, descartar $ab+b^2$ del producto precedente $a^2+ab$, lo que se indicará algebráicamente de esta manera: $a^2+ab-ab-b^2$. Ahora como los dos productos $+ab$, $-ab$, se destruyen recíprocamente, sale en fin $a^2-b^2$ para el producto pedido.

Como este resultado $a^2-b^2$ se obtiene independientemente de tod valor particular atribuido á $a$ y $b$, se sigue que el teorema enunciado es verdadero para dos números cualesquiera.



TERCERA CUESTION. — TEOREMA.

**6.** *Si á los dos términos de una fraccion propiamente dicha, ó de un número menor que la unidad, se añade un mismo número entero, la nueva fraccion que resulta es mayor que la primera.*

Sea $\frac{5}{12}$ la fraccion propuesta; añadiendo 3 á cada uno de estos dos términos, se obtiene $\frac{8}{15}$. Estas dos fracciones, reducidas á un mismo denominador, se convierten en $\frac{75}{180}$, $\frac{96}{180}$; de modo que la 2ª. fraccion es evidentemente mayor que la primera.

Para reconocer si el teorema enunciado es verdadero, cualquiera que sea la fraccion propuesta, designémosla por $\frac{a}{b}$ suponiendo $a<b$.

Sea $m$ el número añadido á los dos términos de esta fraccion; resultará..... $\frac{a+m}{b+m}$.

Para comparar las dos fracciones es preciso reducirlas á un mismo denominador: basta para ello multiplicar ambos términos $a$ y $b$ de la primera fraccion por $b+m$, y los dos términos de la segunda por $b$. Pero multiplicar $a$ por $b+m$ es lo mismo que tomar $a$ tantas veces como unidades hay en $b$, mas tantas como unidades hay en $m$, lo que da $ab+am$. Se probaria del mismo modo que el producto de $b$ por $b+m$ es $b^2+bm$, lo que da $\frac{ab+am}{b^2+bm}$ para la primera fraccion. Así tambien, si se multiplican los dos términos de la segunda $\frac{a+m}{b+m}$ por $b$, como hemos visto (núm. 5) se convierte en $\frac{ab+bm}{b^2+bm}$.

Los dos numeradores, $ab+am$, $ab+bm$, tienen una parte comun $ab$; y la parte $bm$ del segundo numerador es mayor que la $am$ del primero, pues que se ha supuesto $b>a$. Luego tambien la segunda fraccion es mayor que la primera; que era lo que convenia demostrar.

Se ve ademas por el razonamiento precedente, que es preciso que $a$

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
MONTERREY, MEXICO

sea una fraccion propiamente dicha, para que sea verdadero el teorema; porque de lo contrario la segunda fraccion seria menor que la primera, pues que se tendria entónces $ab+bm<ab+am$.

**7.** Reflexionando sobre los medios de resolucion de las cuestiones precedentes, se advertirá que el empleo de los signos algebráicos debe dar lugar á reglas comunes á muchas cuestiones. Así es, por ejemplo, que en la segunda y en la tercera hemos sido conducidos á efectuar la multiplicacion de una suma $a+b$ por un número $a$, de una suma $a+b$ por $b$, de un número $a$ por una suma $b+m$. De donde resulta que estableciendo preceptos generales para hallar los resultados de las operaciones que se han de tener que efectuar sobre las cantidades algebráicas, se tendrán medios fijos de resolver con los símbolos algebráicos todas las cuestiones relativas á los números.

Esta parte del álgebra tiene por título: *Manera de efectuar las operaciones de la aritmética con las cantidades algebráicas ó literales;* esto es, sobre los números representados por signos algebráicos.

Fuerza es confesar que esta parte es un tanto árida y acaso enojosa para los principiantes; pero es absolutamente indispensable poseerla á fondo si se desea avanzar rápidamente en el campo exacto cuanto fecundo del álgebra.



# CAPÍTULO PRIMERO.

## § I. DE LAS OPERACIONES ALGEBRÁICAS.

### DEFINICIONES PRELIMINARES.

**8.** Toda cantidad escrita en lenguaje algebráico, es decir, con los signos del álgebra, se llama *cantidad algebráica,* y algunas veces *cantidad literal:* esta es mas bien la *espresion algebráica de la cantidad.*

Así, $3a$ es la espresion algebráica del triple del número $a$; $5a^2$ es la espresion algebráica del quíntuplo del cuadrado de $a$; $7a^3b^2$ es la espresion algebráica de siete veces el producto del cubo de $a$ multiplicado por el cuadrado de $b$.

$3a-5b$ es la espresion algebráica de la diferencia entre el triple de $a$ y el quíntuplo de $b$.

$2a^2-3ab+4b^2$ es la espresion algebráica del doble del cuadrado de $a$, disminuido del triple producto de $a$ por $b$, y aumentado del cuádruplo del cuadrado de $b$.

Se llama *monomio,* ó cantidad de un solo término, ó simplemente *término,* una cantidad algebráica que no se halla reunida á ninguna otra por el signo de la adicion ó de la sustraccion; y *polinomio* ó cantidad de muchos términos á una espresion algebráica compuesta de muchas partes separadas unas de otras por los signos + ó —. De modo que $3a$, $5a^2$, $7a^3$, $b^2$ son monomios; y $3a-5b$, $2a^2-3ab+4b^2$, son polinomios. La primera de estas dos espresiones se llama *binomio* por hallarse compuesta de dos términos; la segunda *trinomio,* por constar de tres.....

**9.** El *valor numérico* de una espresion algebráica es el número que se obtendria, si dando valores particulares á las letras que entran en ella, se efectuasen todas las operaciones de la aritmética de que es susceptible esta espresion. Este valor numérico depende evidentemente de los valores particulares atribuidos á las letras, y debe generalmente variar con ellas. Así $2a^3$ tiene por valor numérico 54, cuando se hace $a=3$; porque el cubo de 3 es 27, y dos veces 27 da 54. El valor numérico de esta misma espresion es 250, cuando se hace $a=5$; porque el cubo de 5 es 125, y dos veces 125 da 250.