sea una fraccion propiamente dicha, para que sea verdadero el teorema; porque de lo contrario la segunda fraccion seria menor que la primera, pues que se tendria entónces $ab+bm<ab+am$.

7. Reflexionando sobre los medios de resolucion de las cuestiones precedentes, se advertirá que el empleo de los signos algebráicos debe dar lugar á reglas comunes á muchas cuestiones. Así es, por ejemplo, que en la segunda y en la tercera hemos sido conducidos á efectuar la multiplicacion de una suma $a+b$ por un número a, de una suma $a+b$ por b, de un número a por una suma $b+m$. De donde resulta que estableciendo preceptos generales para hallar los resultados de las operaciones que se han de tener que efectuar sobre las cantidades algebráicas, se tendrán medios fijos de resolver con los símbolos algebráicos todas las cuestiones relativas á los números.

Esta parte del álgebra tiene por título: *Manera de efectuar las operaciones de la aritmética con las cantidades algebráicas ó literales;* esto es, sobre los números representados por signos algebráicos.

Fuerza es confesar que esta parte es un tanto árida y acaso enojosa para los principiantes; pero es absolutamente indispensable poseerla á fondo si se desea avanzar rápidamente en el campo exacto cuanto fecundo del álgebra.

CAPÍTULO PRIMERO.

§ I. DE LAS OPERACIONES ALGEBRÁICAS.

DEFINICIONES PRELIMINARES.

8. Toda cantidad escrita en lenguaje algebráico, es decir, con los signos del álgebra, se llama *cantidad algebráica,* y algunas veces *cantidad literal:* esta es mas bien la *espresion algebráica de la cantidad.*

Así, $3a$ es la espresion algebráica del triple del número a; $5a^2$ es la espresion algebráica del quíntuplo del cuadrado de a; $7a^3b^2$ es la espresion algebráica de siete veces el producto del cubo de a multiplicado por el cuadrado de b.

$3a-5b$ es la espresion algebráica de la diferencia entre el triple de a y el quíntuplo de b.

$2a^2-3ab+4b^2$ es la espresion algebráica del doble del cuadrado de a, disminuido del triple producto de a por b, y aumentado del cuádruplo del cuadrado de b.

Se llama *monomio,* ó cantidad de un solo término, ó simplemente *término,* una cantidad algebráica que no se halla reunida á ninguna otra por el signo de la adicion ó de la sustraccion; y *polinomio* ó cantidad de muchos términos á una espresion algebráica compuesta de muchas partes separadas unas de otras por los signos + ó —. De modo que $3a$, $5a^2$, $7a^3$, b^2 son monomios; y $3a-5b$, $2a^2-3ab+4b^2$, son polinomios. La primera de estas dos espresiones se llama *binomio* por hallarse compuesta de dos términos; la segunda *trinomio,* por constar de tres.....

9. El *valor numérico* de una espresion algebráica es el número que se obtendria, si dando valores particulares á las letras que entran en ella, se efectuasen todas las operaciones de la aritmética de que es susceptible esta espresion. Este valor numérico depende evidentemente de los valores particulares atribuidos á las letras, y debe generalmente variar con ellas. Así $2a^3$ tiene por valor numérico 54, cuando se hace $a=3$; porque el cubo de 3 es 27, y dos veces 27 da 54. El valor numérico de esta misma espresion es 250, cuando se hace $a=5$; porque el cubo de 5 es 125, y dos veces 125 da 250.

Digo generalmente, porque en algunos casos permanece *constante* el valor numérico de una espresion algebráica, aun cuando se hagan variar los valores de las letras que entran en ella. De manera que en la espresion $a-b$, no cambiará la espresion en tanto que se den á a y á b valores que crezcan cada uno en una misma cantidad.

Sea por ejemplo, $a=7$, $b=4$; resulta $a-b=3$.

Supongamos ahora $a=12$ ó $7+5$, y $b=9$ ó $4+5$; resulta $a-b=12-9=3$, etc.

El *valor numérico* de un polinomio no cambia cuando se invierte el órden de los términos, con tal que se tenga cuidado de conservar todos sus signos respectivos. Así los polinomios $4a^2-3a^2b+5ac^2$, $5ac^2-3a^2b+4a^3$, $4a^3+5ac^2-3a^2b$, tienen el mismo valor numérico. Esta es una consecuencia evidente de la naturaleza de la adicion y de la sustraccion aritmética. Pero esta observacion nos será de grande utilidad en lo sucesivo.

10. De los diferentes términos que componen un polinomio dado, los unos van precedidos del signo $+$, y los otros del signo $-$. Los primeros reciben el nombre de *términos aditivos*, y los otros el de *términos sustractivos*. Llámanse tambien aquellos, *términos positivos*, y estos *términos negativos;* denominaciones bastante impropias que ha consagrado sin embargo el uso.

El primer término de un polinomio no va casi nunca precedido de signo alguno; pero se considera como precedido del signo $+$.

11. Llámase *dimension* de un término á cada uno de los factores literales que lo componen, y *grado* el número de estos factores ó dimensiones. El coeficiente no se cuenta como dimension. Así que, $5a$ se llama término de una dimension ó del primer grado, ó *lineal*, $5ab$ de dos dimensiones, ó del segundo grado; $7a^3bc^2$, por ser lo mismo que $7aaabcc$, se llama de seis dimensiones ó del sesto grado.

En general el *grado* ó el *número de las dimensiones de un término se estima por la suma de los esponentes de las letras que entran en este término*. Observaremos en este particular que segun la definicion misma del esponente (núm. 2) la letra que carece de él se considera que tiene 1 por tal. De modo que el grado del término $8a^2bcd^3$ es $2+1+1+3$, ó 7.

Se dice de un polinomio que es *homogéneo* cuando todos sus términos son de un mismo grado: $3a-2b+c$, $3a^2-4ab+b^2$, $5a^2c-4c^3+2c^2d$ son polinomios homogéneos; $8a^3-4ab+c$ no es homogéneo.

REDUCCION DE LOS TÉRMINOS SEMEJANTES.

12. Llámanse *términos semejantes* á los compuestos de las mismas letras afectadas de los mismos esponentes.

Así $7ab$ y $3ab$, $4a^2b^2$ y $5a^3b^2$, son términos semejantes. No lo son $3a^2b$ y $7ab^2$; porque aunque compuestos de las mismas letras, no afectan unos mismos esponentes á unas mismas letras.

Sucede á veces que un polinomio encierra en su espresion muchos términos semejantes, y entónces es susceptible de simplificacion.

Sea el polinomio $4a^2b-3a^2c+9ac^2-2a^2b+7a^2c-6b^3$: se puede (núm. 9) escribir así: $4a^2b-2a^2b+7a^2c-3a^2c+9ac^2-6b^3$; de modo que $4a^2b-2a^2b$ se reduce evidentemente á $2a^2b$; $7a^2c-3a^2c$ á $4a^2c$; luego el polinomio mismo se convierte en $2a^2b+4a^2c+9ac^2-6b^2$.

Ténganse en un polinomio cualquiera los términos

$$+2a^2bc,\ -4a^3bc^2,\ +6a^3bc^2.\ -8a^3bc^2,\ +11a^3bc^2.$$

Desde luego la suma de los términos aditivos $+2a^3bc^2+6a^3bc^2+11a^3bc^2$ es igual á $+19a^3bc^2$; la suma de los términos sustractivos $-4a^3bc^2-8a^3bc^2$ es igual á $-12a^3bc^2$. Luego el conjunto de los cinco términos propuestos se reduce á $+19a^3bc^2-12a^3bc^2$, ó á $+7a^3bc^2$.

Puede suceder que la suma de los términos sustractivos sea mayor que la de los términos aditivos. En este caso se sustrae el coeficiente negativo, y se pone al resultado el signo $-$. Así que se tenga, por ejemplo, $+5a^2b$ para la suma de los términos positivos, y $-8a^2b$ para la de los términos negativos; como $-8a^2b$ se convierte en $-5a^2b-3a^2b$, se sigue que $+5a^2b-8a^2b$ equivale á $+5a^2b-5a^2b-3a^2b$, ó á $-3a^2b$.

De lo que puede concluirse esta regla: *Para la reduccion de los términos semejantes, fórmese un solo término aditivo de todos los semejantes precedidos del signo $+$: lo que se hace sumando los coeficientes de estos términos y dando la suma por coeficiente á la parte literal comun. Fórmese por el mismo medio un solo término sustractivo de todos los precedidos del signo $-$: réstese en seguida la suma menor de la mayor, y dése al resultado el signo de esta.*

(Es muy esencial observar que la reduccion debe solo ser sobre los coeficientes, y jamas sobre los esponentes.)

Se encontrará, segun esta regla, que

$$6a^2b-8a^2b-9a^2b+15a^2b-a^2b \text{ se reduce á } +3a^2b,$$
$$7abc^2-abc^2-7abc^2-8abc^2+4abc^2 \text{ se reduce á } -5abc^2.$$

La reduccion de los términos semejantes es una especie de operacion.

enteramente peculiar al álgebra, que se encuentra en la *adicion*, en la *sustraccion*, *la multiplicacion* y la *division algebráicas*, operaciones que pasamos á desarrollar.

Observacion. Como estas reglas deben presentar al entendimiento de los discípulos la misma idea que las operaciones análogas de la aritmética, no repetiremos las definiciones, que suponemos bien conocidas de cuantos hayan estudiado esta con algun esmero. Es fácil conocer, sin embargo, que los procedimientos no pueden ser los mismos, siendo los símbolos diferentes. Estas operaciones se reducen unas veces á simples indicaciones, otras hay realmente ocasion de efectuarlas, y entónces se necesitan reglas correspondientes á los símbolos que se emplean.

De la adicion algebráica.

13. Supongamos que haya que reunir las espresiones $3a$, $5b$, $2c$; se tiene por resultado de esta adicion, $3a+5b+2c$, espresion que ya no puede simplificarse mas.

Supongamos tambien que haya que reunir los monomios $4a^2b^3$, $2a^2b^3$, $7a^2b^3$; el resultado es $4a^2b^3+2a^2b^3+7a^2b^3$, ó reduciendo (núm. 12) $13a^2b^3$.

Propongámonos ahora reunir los polinomios

$$3a^2-4ab,\ 2a^2-3ab+b^2,\ 2ab-5b^2.$$

Para formar un solo polinomio que esprese la suma de estos, observemos que añadir al número representado por $3a^2-4ab$, el número espresado por $2a^2-3ab+b^2$, es añadirle la diferencia entre el número de unidades espresado por $2a^2+b^2$, y el número de unidades espresado por $3ab$, operacion que se haria fácilmente atribuyendo valores particulares á a y b; pero como no se podria ejecutar en el estado actual de las cantidades, se observa que es lo mismo sumar desde luego $2a^2+b^2$ con $3a^2-4ab$, y disminuir en seguida $3ab$; lo cual da $3a^2-4ab+2a^2+b^2-3ab$, ó cambiando el órden de los términos (núm. 3).....$3a^2-4ab+2a^2-3ab+b^2$. Igualmente para sumar $2ab-5b^2$ con esta última espresion, basta escribir $3a^2-4ab+2a^2-3ab+b^2+2ab-5b^2$ con lo que no se trata ya actualmente sino de hacer (número 12) la reduccion de los términos semejantes, y sale finalmente $5a^2-5ab-4b^2$ para el resultado pedido.

Como podrian aplicarse razonamientos análogos á otros polinomios tenemos derecho á concluir la siguiente regla general para la adicion de dos ó mas polinomios: *Escríbanse los polinomios propuestos unos detras de otros conservando á los términos que los componen sus signos respectivos, y hágase la reduccion de los términos semejantes, si los hay.*

Hé aquí algunos ejemplos.

1°.
$$\begin{array}{r} 3a^2-4ab-2b^2 \\ +5a^2+2ab-b^2 \\ +3ab-2b^2-3c^2 \\ \hline 8a^2+ab-5b^2-3c^2\ ; \end{array}$$

2°.
$$\begin{array}{r} 7a^2b-3abc-8b^2c-9c^3+cd \\ +8abc-5a^2b+3c^3-4b^2c+cd^2 \\ +4a^2b-8c^3+9b^2c-3d^3 \\ \hline 6a^2b+5abc-3b^2c-14c^3+2cd^2-3d^3. \end{array}$$

En la práctica *se colocan ordinariamente las cantidades propuestas unas debajo de las otras, como se ve en estos dos ejemplos; se hace la reduccion de los términos semejantes*, y *se escriben con sus signos respectivos los resultados de la reduccion.* Así en el primer ejemplo, considerando el término $3a^2$, como este término es semejante al $5a^2$ que se halla en la segunda línea, se escribe $8a^2$ para el resultado de la reduccion de estos dos términos, que se tiene cuidado de tachar ligeramente. Pasando en seguida al término $-4ab$, se le reduce con los términos $+2ab$ y $3ab$, lo que da $+ab$, que se escribe á la derecha de $8a^2$ y se tachan los nuevos términos que se acaban de reducir. Se continúa de este modo la operacion hasta que todos los términos queden tachados y reducidos.

Una marca que se hace sobre los términos sirve para impedir la omision de alguno en el resultado; los términos no tachados están aun por reducir.

De la sustraccion algebráica.

14. Supongamos que haya que restar $4b$ de $5a$; el resultado algebráico es $5a-4b$. Del mismo modo, la diferencia entre $7a^5b$ y $4a^5b$ es $7a^5b-4a^5b$, ó $3a^5b$.

Supongamos ahora que haya que restar $2b-3c$ de $4a$; se puede desde luego presentar el resultado de esta manera, $4a-(2b-3c)$, escribiendo la cantidad que se ha de sustraer entre dos paréntesis y á continuacion de la primera cantidad con el signo —. Pero muchas veces exigen las cuestiones que se forme un solo polinomio de esta espresion, *y en esto consiste principalmente la regla de la sustraccion algebráica.*

Para llegar á este objeto, obsérvese que si a, b, c se hubiesen dado numéricamente, se haria la sustraccion indicada en $2b-3c$, y despues se disminuiria el resultado obtenido de $4a$; pero como esta sustraccion no puede efectuarse en el estado actual de las cantidades, se empieza por sustraer $2b$ de $4a$, lo que da $4a-2b$; pero quitando $2b$ unidades, se ha sustraido un número crecido en mas con $3c$ uni-

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
Biblioteca Valverde y Tellez

dades; y es preciso rectificar el resultado añadiéndole $3c$. Así se tiene $4a-2b+3c$ por resultado de la sustraccion propuesta.

Sea ahora $5a^2-4ab+3bc-b^2$ el que haya que sustraer de $8a^2-2ab$; esta operacion puede indicarse de esta suerte:

$$8a^2-2ab-(5a^2-4ab+3bc-b^2).$$

Pero para reducir esta espresion á un solo polinomio, observemos que quitar $5a^2-4ab+3bc-b^2$ se reduce á sustraer la diferencia entre la suma $5a^2+3bc$ de los términos aditivos, y la suma $4ab+b^2$ de los sustractivos. Se puede desde luego restar $5a^2+3bc$, lo que da $8a^2-2ab-5a^2-3bc$; y como este resultado es necesariamente menor en $4ab+b^2$, es preciso sumar esta última cantidad, y sale

$$8a^2-2ab-5a^2-3bc+4ab+b^2,$$

ó

$$8a^2-2ab-5a^2+4ab-3bc+b^2$$

restableciendo el órden de los términos; ó bien en fin, reduciendo,

$$3a^2+2ab-3bc+b^2.$$

De donde puede concluirse esta regla general:

Para sustraer dos polinomios el uno del otro, escríbase á continuacion del polinomio del que se ha de sustraer el otro, cambiando los signos de este, y hágase la reduccion del polinomio resultante, si la hay.

Se hallaria por esta regla,

$$1^\circ \quad \left.\begin{array}{l} 5a^3-4a^2b+3b^3c \\ -(3a^2b-2a^3-8b^3c) \end{array}\right\} =7a^3-7a^2b+11b^3c.$$

$$2^\circ. \quad \left.\begin{array}{l} 4ab-cd-2b^2+3a^2 \\ -(5ab-4cd+3b^2+3a^2) \end{array}\right\} =-ab+3cd-5b^2.$$

15. Se puede tambien segun esta misma regla, hacer sufrir á ciertos polinomios algunas transformaciones.

Por ejemplo	$6a^2-3ab+2b^2-2bc,$
se reduce á	$6a^2-(3ab-2b^2+2bc).$
Tambien	$7a^3-8a^2b-4b^2c+6b^3,$
se reduce á	$7a^3-(8a^2b+4b^2c-6b^3),$
ó bien á	$7a^3-8a^2b-(4b^2c-6b^3).$

Estas transformaciones que consisten en descomponer un polinomio en dos partes separadas una de otra con el signo —, son muy útiles en álgebra.

Multiplicacion algebráica.

16. Consideraremos como demostrado un principio generalmente admitido en todos los tratados de aritmética, cual es el de que el producto de dos ó mas números permanece el mismo en cualquier órden que se los multiplique.

Sentado esto, consideremos primeramente el caso en que se tiene que multiplicar un monomio por otro; sea $7a^3b^2$ el que haya de multiplicarse por $4a^2b$.

La espresion de este producto puede escribirse así: $7a^3b^2\times4a^2b$. Pero se la puede simplificar, observando que con sujecion al principio precedente y la significacion de los símbolos algebráicos (número 2), se reduce á $7\times4\times aaaaabbb$. Pero como los coeficientes son números particulares, nada impide formar de ellos uno solo multiplicándolos entre sí: lo que da 28 por coeficiente del producto. En cuanto á las letras, el producto $aaaaa$ equivale á a^5 (7°. número 2), y el producto bbb á b^3; y se obtiene por resultado final, $28a^5b^5$.

Sea ademas $12a^2b^4c^2$ el que haya de multiplicarse por $8a^3b^2d^2$; este producto se reduce á $12\times8\times aaaaabbbbbbcc\,dd$, ó $96\,a^5b^6c^2d^2$.—Por donde se ve que, para multiplicar dos monomios uno por otro, es preciso . 1°. *multiplicar los dos coeficientes entre sí:* 2°. *escribir á continuacion de este producto todas las letras que entran á la vez en el multiplicando y multiplicador, afectando cada letra de un esponente igual á la suma de los dos esponentes de que se halla afectada esta misma letra en ambos factores.* 3°. *Si una letra solo entra en uno de los factores escribirla en el producto con el esponente de que se halla afectada en este factor.*

La regla relativa á los coeficientes no ofrece dificultad alguna.

Pero para darse cuenta de la regla de los esponentes, es preciso observar que en general un número a debe hallarse tantas veces por factor en el producto, como lo es en el multiplicando y multiplicador. De modo (núm. 2) que los esponentes de las letras marcan el número de veces que entran como factores; luego la suma de los dos esponentes de una misma letra marca las veces que debe ser factor en el producto pedido.

Se encontrará por la regla precedente, que

$$8a^2bc^2\times7abcd^2=56a^3b^2c^3d^2$$
$$21a^3b^2cd\times8abc^0=168a^4b^3c^4d,$$
$$4abc\times7df=28abcdf.$$

16. Pasemos á la multiplicacion de los polinomios.

Sean primeramente dos polinomios $a+b+c$ y $d+b$, compuestos de términos todos aditivos; se puede presentar el producto bajo la forma $(a+b+c)\ (d+b)$. Pero muchas veces hay precision de formar un solo polinomio de este producto indicado, y *en esto consiste la multiplicacion de dos polinomios.*

Es pues evidente que multiplicar la suma $a+b+c$ por $d+f$, se reduce á tomar $a+b+c$ tantas veces como unidades hay en d mas tantas veces como unidades hay en f, y sumar los dos productos. Pero multiplicar $a+b+c$ por d es tomar d veces cada una de las partes del multiplicando, y reunir los productos parciales, lo cual da $ad+bd+cd$. Del mismo modo, multiplicar $a+b+c$ por f es tomar f veces cada una de las partes del multiplicando, y reunir los productos parciales. Luego en fin $(a+b+c)\ (d+f)=ad+bd+cd+af+bf+cf$.

Así que *para multiplicar dos polinomios compuestos de términos completamente aditivos, es preciso multiplicar separadamente cada uno de los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, y sumar todos los productos.*

Si los términos están afectados de coeficientes y de esponentes, se siguen las reglas prescritas (núm. 16) para la multiplicacion de los monomios. Por ejemplo $(3a^2+4ab+b^2)\ (2a+5b)$ da por producto

$$6a^3+8a^2b+2ab^2+15a^2b+20ab^2+5b^3,$$

ó reduciendo

$$6a^3+23a^2b+22ab^2+5b^3.$$

Para darnos cuenta del caso mas general, empecemos por observar que si el multiplicando encierra términos aditivos y sustractivos, este factor espresa una diferencia entre el número de unidades, marcado por la suma de los términos aditivos y el número de unidades marcado por la suma de los términos sustractivos. Igual razonamiento respecto al multiplicador. De donde se sigue que la multiplicacion de dos polinomios cualesquiera se reduce á la multiplicacion de dos binomios tales como $a-b$, $c-d$ (en que a designa la suma de los términos aditivos, y $-b$ la de los sustractivos del multiplicando); lo mismo sucede respecto al multiplicador $c-d$: veamos, pues, cómo se puede efectuar la multiplicacion espresada por $(a-b)\ (c-d)$.

Multiplicar $a-b$ por $c-d$ se reduce evidentemente á tomar $a-b$ tantas veces como unidades hay en c ménos tantas veces como unidades hay en d, ó bien á multiplicar $a-b$ por c, y á sustraer del producto el de $a-b$ por d. Pero multiplicar $a-b$ por c se reduce á multiplicar c por $a-b$ (en virtud del principio enunciado número 16); lo que da evidentemente $ca-cb$, ó $ac-bc$. Del mismo modo, el producto de $a-b$ por

d es $ad-bd$; y como este último producto, segun acabamos de ver, debe sustraerse del precedente $ac-bc$, es preciso (núm. 14) cambiar los signos de $ad-bd$, y escribirlo á continuacion de $ac-bc$, lo que da en fin

$$(a-b)\ (c-d)=ac-bc-ad+bd.$$

Por poco que se reflexione sobre el modo como se ha formado este producto, se verá que, *en toda multiplicacion, si se consideran todos los términos aditivos del multiplicador, es preciso multiplicar cada uno de los términos del multiplicando, tanto aditivos como sustractivos,* por estos *términos, y afectar los productos parciales de signos semejantes á aquellos de que están afectados los términos del multiplicando; y considerando los sustractivos del multiplicador, multiplicar tambien cada uno de los términos del multiplicando, asi aditivos como sustractivos por estos términos; pero afectar los productos parciales de signos contrarios á aquellos de que están afectados los términos del multiplicando. En cuanto á la multiplicacion parcial de un término del multiplicando por uno del multiplicador, se siguen las reglas establecidas para los monomios* (núm. 16).

Sean por ejemplo los dos polinomios

$$4a^5-5a^2b-8ab^2+2b^3,$$

y

$$2a^2-3ab-4b^2,$$

$$\begin{array}{l}
8a^5-10a^4b-16a^3b^2+6a^2b^3 \\
-12a^4b+15a^3b^2+24a^2b^3-6ab^4 \\
-16a^3b^2+20a^2b^3+32ab^4-8b^5 \\
\hline
8a^5-22a^4b-17a^3b^2+48a^2b^3+26ab^4-8b^5.
\end{array}$$

Dispuestos los polinomios uno encima de otro, se multiplica cada uno de los términos del primero por el término $2a^2$ del segundo, lo que da $8a^5-10a^4b-16a^3b^2+4a^2b^3$, polinomio cuyos signos son los mismos que los del multiplicando. Pasando en seguida al término $3ab$ del multiplicador, como está afectado del signo $-$, se multiplica cada uno de los términos del multiplicando por este término, teniendo cuidado de afectar cada producto de un signo contrario al del término correspondiente del multiplicando, lo que da $-12a^4b+15a^3b^2+24a^2b^3-6ab^4$, producto que se escribe debajo del primero.

Se hace la misma operacion respecto al termino $4b^2$, que es tambien sustractivo, lo que da $-16ab^3b^2+20a^2b^3+32ab^4-8b^5$.

Se hace en seguida la reduccion de los términos semejantes, y se obtiene por fin la espresion mas simple del producto,

$$8a^5-22a^4b-17a^3b^2+48a^2b^3+26ab^4+8b^5.$$

La regla de los signos, que es la mas importante que hay que tener presente en la multiplicacion de dos polinomios, puede enunciarse así:

Siempre que los dos términos del multiplicando y multiplicador están afectados del mismo signo, el producto correspondiente se halla afectado del signo +; y cuando los dos términos están afectados de signos contrarios, el producto lo está del signo —.

Se dice tambien en lenguaje algebráico, que + multiplicado por +, ó — multiplicado por —, da +, y que — multiplicado por +, ó + multiplicado por —, da —. Pero este último enunciado, que no ofrece en sí mismo sentido alguno racional (pues que no se sabe qué es lo que significa multiplicar entre sí símbolos, no de cantidades sino de operaciones aritméticas), este último enunciado, decimos, debe mirarse únicamente como una abreviacion del precedente.

No es esta la sola circunstancia en que los algebristas para abreviar el dircurso, emplean espresiones incorrectas, que tienen sin embargo la ventaja de fijar mas fácilmente las reglas en la memoria.

Propondremos como ejercicios los ejemplos siguientes:

1er. *ejemplo.*

$$\begin{array}{l} 3a^2-5bd+cf \\ -5a^2+4bd-8cf \\ \hline -15a^4+37a^2bd-29a^2cf-20b^2d^2+44bcdf-8c^2f^2. \end{array}$$

Producto simp.

2º. *ejemplo.*

$$\begin{array}{l} 4a^3b^2-5a^2b^2c+8a^2bc^2-3a^2c^3-7abc^3 \\ 2ab^2-4abc-2bc^2+c^3 \\ \hline 8a^4b^4-10a^3b^4c+28a^3b^3c^2-34a^3b^2c^3 \\ -4a^2b^3c^3-16a^4b^3c+12a^3bc^4+7a^2b^2c^4 \\ +14a^2bc^5+14ab^2c^5-3a^2c^6-7abc^6. \end{array}$$

Producto simplificado.

18. Haremos acerca de la multiplicacion algebráica varias observaciones sumamente importantes.

Primeramente. Si los polinomios que nos proponemos multiplicar uno por otro son homogéneos (núm. 11) (y la mayor parte de las cuestiones que se intenta resolver con el auxilio del álgebra, las de geometría principalmente, conducen á semejantes espresiones) *el producto de estos dos polinomios es tambien homogéneo;* lo que es una consecuencia evidente de las reglas relativas á las letras y á los esponentes en la multiplicacion de las cantidades monomias. Ademas, *el grado de cada término del producto debe ser igual á la suma de los grados de dos términos cualesquiera del multiplicando y del multiplicador.*

De modo que en el primero de los dos ejemplos precedentes, como

todos los términos del multiplicando son del segundo grado, así como los del multiplicador, resulta que todos los del producto lo son del cuarto. En el segundo como el multiplicando es del quinto grado y el multiplicador del tercero, el producto lo es del octavo. Esta observacion sirve en la práctica para reconocer los errores de cálculo respecto á los esponentes. Por ejemplo si se encuentra que uno de los términos de un producto que debe ser homogéneo, la suma de los esponentes es igual á 6, miéntras que es igual á 7 en todos los demas términos, hay error manifiesto en la adicion de los esponentes, y entónces se vuelve á formar la multiplicacion de los dos términos que han dado este producto parcial.

En segundo lugar. Cuando en la multiplicacion de dos polinomios no ofrece el producto reduccion alguna de términos semejantes, *el número total de los términos del producto es igual al producto del número de los términos del multiplicando, multiplicado por el número de los términos del multiplicador;* lo que es una consecuencia de la regla (núm. 17). De suerte que si se tienen 5 términos en el multiplicando, y 4 en el multiplicador, habrá 5×4, ó 20, en el producto. En general, si el multiplicando se compone de m términos y el multiplicador de n términos, el producto contiene $m\times n$.

En tercer lugar. Cuando hay términos semejantes, el número total de los del producto simplificado puede ser mucho ménos grande. Pero se observará que entre los diferentes términos del producto los hay que no pueden reducirse con ningun otro; estos son: 1º. *el término procedente de la multiplicacion del término del multiplicando, afectado del mas alto esponente de cualquiera de las letras, por el término del multiplicador afectado del mas alto esponente de la misma letra:* 2º. *el término procedente de la multiplicacion de los dos términos afectados del esponente mas pequeño de la misma letra.*

En efecto, estos dos productos parciales deben encerrar esta letra con un esponente mas alto ó menor que cada uno de los demas productos parciales: por consiguiente, no pueden ser semejantes á los otros productos. Esta observacion, cuya verdad se deduce de la regla de los esponentes, será de grande utilidad en la division.

19. Para terminar lo que dice relacion á la multiplicacion algebráica, haremos conocer diferentes resultados de multiplicacion, de un uso bastante frecuente en álgebra.

1º. Supongamos que se haya propuesto formar el cuadrado ó la segunda potencia de un binomio $a+b$. Se tiene segun los principios conocidos,

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2;$$