es decir que *el cuadrado de la suma de dos cantidades se compone del cuadrado de la primera cantidad, mas el cuadrado de la segunda, mas el doble producto de la primera por la segunda.*

Así si se tiene que formar el cuadrado de $5a^3+8a^2b$; se tiene, segun lo dicho, $(5a^3+8a^2b)^2=25a^6+80a^5b+64a^4b^2$.

2º. Supongamos que haya que formar el cuadrado de una diferencia $a-b$.

Se tiene $$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2;$$

es decir que *el cuadrado de la diferencia de dos cantidades se compone del cuadrado de la primera, mas el cuadrado de la segunda, ménos el doble producto de la primera por la segunda.*

Así $$(7a^2b^2-12ab^3)^2=49a^4b^4-168a^3b^5+144a^2b^6.$$

3º. Supongamos que se haya propuesto multiplicar $a+b$ por $a-b$.

Se tiene $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Luego *la suma de dos cantidades, multiplicada por su diferencia, da por producto la diferencia de sus cuadrados.* (Este es el teorema demostrado en el número 5.)

De este modo $(8a^3+7ab^2)(8a^3-7ab^2=)\ 64a^6-49a^2b^4$ combinando estos diferentes resultados se pueden hallar los productos de ciertos polinomios mas pronto que por el procedimiento ordinario. Supongamos, por ejemplo, que haya que multiplicar $5a^2-4ab+3b^2$ por $5a^2-4ab-3b^2$; si se observa que la primera de estas dos espresiones es la suma de dos cantidades $5a^2-4ab$ y $3b^2$, que la segunda es la diferencia de estas mismas dos cantidades, se encuentra inmediatamente por producto,

$$(5a^2-4ab)^2-(3b^2)^2=25a^4-40a^3b+16a^2b^2-9b^4.$$

20. Reflexionando acerca de los resultados de multiplicacion que se acaban de obtener, se ve que la composicion, ó el modo como se forman con ayuda del multiplicando y multiplicador, es totalmente independiente de los valores particulares que se pueden atribuir á las letras a y b que entran en ambos factores.

COMO PRINCIPIO : *la manara de formarse un producto algebráico con ayuda de sus dos factores, se llama la* LEY *de este producto; y esta ley permanece siempre la misma, cualesquiera que sean los valores atribuidos á las letras que entran en ambos factores.*

21. En fin, dado un polinomio, se puede algunas veces hecha su inspeccion, descomponerlo en factores, lo cual puede ser muy útil.

Sea el polinomio $25a^5-30a^3b+15a^2b^2$: es evidente que los factores

5 y a^2 entran en cada uno de sus términos. De modo que puede ponerse el polinomio bajo la forma $5a^2(5a^3-6ab+3b^2)$. Igualmente, $64a^4b^5-25a^2b^8$ se trasforma en

$$(8a^2b^3+5ab^4)(8a^2b^3-5ab^4).$$

En efecto, como $64a^4b^6$ y $25a^2b^8$ son *los cuadrados* de $8a^2b^3$ y $5ab^4$, se sigue que la espresion propuesta es la diferencia de dos cuadrados, y que es descomponible (núm. 19) en la suma de las raíces de estos cuadrados, multiplicada por la diferencia de las mismas raíces.

De la division algebráica.

22. La division algebráica, como la division aritmética, tiene por objeto, *dado un producto y uno de sus factores, hallar el segundo factor.*

Consideremos primeramente el caso de dos monomios. Supongamos que haya que dividir $72a^5$ por $8a^3$, lo que se indica así $\frac{72a^5}{8a^3}$.

Se pide una tercera cantidad monomia que multiplicada por la segunda, reproduzca la primera. Ahora bien; segun las reglas establecidas para la multiplicacion de los monomios, la cantidad buscada debe ser tal que su coeficiente, multiplicado por 8 dé por producto 72, y que el esponente de la letra a en esta cantidad, sumado con 3, esponente de la letra a en el divisor, dé por suma 5, esponente del dividendo. De modo que se obtendrá esta cantidad dividiendo 72 por 8 y sustrayendo del esponente 5, el esponente 3, lo que da $\frac{72a^5}{8a^3}=9a^2$; y en efecto, se tiene

$$8a^3\times 9a^2=72a^5.$$

Se tiene segun las mismas observaciones,

$\frac{35a^3b^2c}{7ab}=5a^2bc$; y en efecto, $7ab\times 5a^2bc=35a^3b^2c$; por donde se ve que para dividir dos monomios, uno por otro, es preciso, 1º. *dividir los dos coeficientes uno por otro*; 2º. *para las letras comunes al dividendo y divisor escribir cada una de ellas á continuacion del coeficiente, afectándolas de un esponente igual al esceso del esponente del dividendo sobre el del divisor*; 3º. *escribir á continuacion y con sus esponentes respectivos, las letras que entran en el dividendo sin entrar en el divisor.*

Se hallará segun esta regla,

$$\frac{48a^5b^5c^2d}{12ab^2c} = 4a^5bcd, \quad \frac{150a^5b^8cd^5}{30a^5b^5d^2} = 5a^2b^5cd.$$

(Véase el número 24 para el caso en que los esponentes de una misma letra son iguales en el dividendo y en el divisor.)

23. Resulta de la regla precedente que la division de los monomios es imposible, *primero*, si los coeficientes no son divisibles uno por otro; *segundo*, si ciertos esponentes son mas grandes en el divisor que en el dividendo; *tercero*, si el divisor encierra una ó muchas letras que no se encuentran en el dividendo. Cuando se encuentran una ó mas de estas tres circunstancias el cociente permanece bajo la forma de un *monomio fraccionario*, es decir, de una espresion en que entra necesariamente el signo algebráico de la division, aunque puede simplificarse muchas veces.

Sea por ejemplo $12a^4b^2cd$ que hay que dividir por $8a^2bc^2$.

No puede hallarse aquí por cociente un *monomio entero*, es decir, un monomio desembarazado del signo de la division, porque 12 no es divisibile exactamente por 8, y ademas el esponente de c es menor en el dividendo que en el divisor. De modo que se presentará el cociente pedido bajo la forma $\frac{12a^4b^2cd}{8a^2bc^2}$; pero se puede simplificar esta espresion, observando que como los factores 4, a^2, b y c son comunes á los dos términos de esta fraccion, no hay inconveniente en suprimirlos; obteniéndose por resultado, $\frac{3a^2bd}{2c}$.

En general para simplificar un monomio fraccionario, es preciso, 1°. *Suprimir el mayor divisor comun en ambos coeficientes*; 2°. *restar el menor de los dos esponentes de una misma letra, del mayor, y escribir la letra afectada de esta diferencia de esponentes en los términos de la fraccion en que el esponente era mayor*; 3°. *escribir las letras no comunes con sus esponentes respectivos en los términos de la fraccion en que entran estas letras.*

Se hallará por esta regla,

$$\frac{48a^5b^5cd^5}{36a^2b^5c^2de} = \frac{4ad^2}{3bce}, \quad \frac{37ab^5c^5d}{6a^5bc^4d^2} = \frac{37b^3c}{6a^2d}, \quad \frac{7a^2b}{14a^5b^2} = \frac{1}{2ab}.$$

En el último ejemplo como todos los factores del dividendo se encuentran el el divisor, el numerador se reduce á la UNIDAD, porque la operacion se reduce á dividir ambos términos de la fraccion por el numerador.

24. Sucede frecuentemente que los esponentes de ciertas letras son los mismos en el dividendo que en el divisor.

Supongamos que haya que dividir $24a^5b^2$ por $8a^2b^2$; como la letra b está afectada del mismo esponente, el cociente no debe contenerla, y se tiene $\frac{24a^5b^2}{8a^2b^2}=3a$. Pero se observa que este resultado $3a$ puede ponerse bajo una forma propia para conservar huellas de la letra b que ha desaparecido por efecto de la reduccion.

Efectivamente, si se aplica, *por convencion*, á la espresion $\frac{b^2}{b^2}$ la regla de los esponentes (núm. 22), saldrá $\frac{b^2}{b^2}=b^0$. Este nuevo símbolo b^0 indica (núm. 2) que la letra entra 0 veces como factor en el cociente, ó lo que es lo mismo, que no debe entrar en él; pero indica al mismo tiempo que entraba en el dividendo y divisor, y que ha desaparecido por la operacion. Este símbolo tiene la ventaja de conservar la señal de un número que hacia parte de la cuestion que se intentaba resolver, sin cambiar por ello en nada el resultado; porque, puesto que b^0 proviene de $\frac{b^2}{b^2}$, que por otra parte es igual á 1, se sigue que $3ab^0$ equivale á $3a\times1$ ó $3a$. Igualmente

$$\frac{15a^2b^5c^2}{3a^2bc^2} = 5a^0b^2c^0=5b^2.$$

Como importa mucho tener nociones exactas sobre el orígen y la significacion de los símbolos empleados en álgebra, nos proponemos hacer ver que *en general toda cantidad afectada del esponente* 0, *equivale á* 1, *es decir que se tiene* $a^0=1$.

En efecto, esta espresion proviene, como hemos dicho, de estar a afectada del mismo esponente en el dividendo y en el divisor de una division indicada. De modo que se tiene $a^0=\frac{a^m}{a^m}$ (en que m designa para mas generalizar el número entero que sirve de esponente á a). Pero el cociente de toda cantidad dividida por sí misma es 1; luego $\frac{a^m}{a^m}=1$; luego tambien se tiene $a^0=1$.

Lo repetimos, el símbolo a^0 no se emplea por convenio sino para conservar en el cálculo la traza de una letra que entraba en el enunciado de una cuestion, pero que debe desaparecer por efecto de una division; y es necesario muchas veces conservar esta traza.

DIVISION DE DOS POLINOMIOS.

25. Supongamos que haya que dividir $51a^2b^2+10a^4-48a^3b-15b^4+4ab^3$, por $4ab-5a^2+3b^2$.

Para seguir con mas facilidad los cálculos, se les puede disponer de esta manera:

$$\begin{array}{l|l}
51a^2b^2+10a^4-48a^3b-15b^4+4ab^3 & 4ab-5a^2+3b^2 \\
\quad +8a^3b-10a^4+6a^2b^2 & \hline -2a^2+8ab-5b^2 \\
\hline
57a^2b^2-40a^3b-15b^4+4ab^3 & \\
+32a^2b^2+40a^3b-24ab^3 & \\
\hline
25a^2b^2-15b^4-20ab^3 & \\
+20ab^3-25a^2b^2+15b^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

El objeto á que se dirige esta operacion, como dijimos ya (número 22) es el *de hallar un tercer polinomio que multiplicado por el segundo reproduzca al primero.*

Resulta de esta definicion y de la regla establecida (número 17) para la multiplicacion de los polinomios, que el dividendo es el conjunto, *por adicion y previa reduccion*, de los productos parciales de cada uno de los términos del divisor, multiplicados por cada uno de los del cociente que se busca. Sentado esto, si se pudiese descubrir en el dividendo un término que proviniese, *sin reduccion*, de la multiplicacion de uno de los términos del divisor por uno de los del cociente, entónces dividiendo estos dos términos del dividendo y del divisor, uno por otro, estaríamos seguros de obtener un término del cociente que se busca.

Ahora bien: segun la tercera observacion del número 18, el término $10a^4$ afectado del esponente mas alto de la letra a proviene sin reduccion de la multiplicacion de los dos términos del divisor y del cociente, afectados respectivamente del esponente mas alto de la misma letra. Luego dividiendo el término $10a^4$ por el término $-5a^2$ del divisor estaremos ciertos de obtener un término del cociente que se busca. Pero aquí se presenta una dificultad, cual es la de determinar el signo de que

debe estar afectado el término del cociente. Para no vacilar en lo sucesivo en esta materia, vamos á establecer una regla que será *la de los signos de la division.*

Como en la multiplicacion el producto de dos términos de un mismo signo es afectado del signo +, y el de dos términos de signos contrarios del signo —, se puede concluir: 1º. que si el término del dividendo tiene el signo +, y el del divisor el signo +, el término del cociente debe tener el signo +; 2º. que si el término del dividendo tiene el signo + y el del divisor el signo —, el término del cociente debe tener el signo —, porque solo el signo —, combinado por multiplicacion con el signo — del divisor puede reproducir el signo + del dividendo; 3º. que si el término del dividendo tiene el signo —, y el del divisor el signo +, el cociente debe tener el signo —; 4º. en fin, que si el dividendo tiene el signo — y el divisor el signo —, el cociente debe tener el signo +.

Se ve, pues, que esto en resúmen quiere decir:

Si los dos términos del dividendo y divisor son de un mismo signo, el cociente debe estar afectado del signo +; y si están afectados de signos contrarios, el cociente debe estarlo del signo —. Se dice tambien por abreviacion,

+ dividido por +, y — dividido por —, dan +;
— dividido por +, y + dividido por —, dan —.

Volvamos á nuestro asunto.

En el ejemplo propuesto como $10a^4$ y $-5a^2$ están afectados de signos contrarios, su cociente debe tener el signo —; ademas, $10a^4$ dividido por $5a^2$ da $2a^2$ (número 22); luego $-2a^2$ es un término del cociente que se busca. Despues de haberlo escrito debajo del divisor, se multiplica cada uno de los términos del divisor por este término, y se sustrae el producto $-8a^3b+10a^4-6a^2b^2$, del dividendo, lo que se hace escribiendo este producto con signos contrarios debajo del dividendo, y operando la reduccion. De este modo sale por resultado de la primera operacion parcial,

$$57a^2b^2-40a^3b-15b^4+4ab^3.$$

Este resultado se compone de los productos parciales de cada uno de los términos del divisor por cada uno de los términos que falta determinar en el cociente. Se le puede pues mirar como un nuevo dividendo, y razonar acerca de él como sobre el dividendo propuesto; de este modo nos vemos conducidos á tomar en este resultado el término $-40a^3b$, afectado del esponente mas alto de a, y á dividirlo por

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
MONTERREY, MEXICO

el mismo término $-5a^2$ del divisor. Ahora bien; segun los precedentes principios $-40a^3b$ dividido por $-5a^2$ da por cociente, $+8ab$, nuevo término que se escribe á la derecha del primero. Multiplicando cada uno de los términos del divisor por este término, y escribiendo los productos con signos contrarios, debajo del segundo dividendo, y haciendo en seguida la reduccion, se encuentra por resultado de la segunda operacion,

$$25a^2b^2-15b^4-20ab^3.$$

Dividiendo ademas $25a^2b^2$ por $-5a^2$, se tiene por cociente $-5b^2$, que forma el tercer término del cociente. Multiplicando el divisor por este término, y escribiendo los términos del producto con signos contrarios, debajo del tercer dividendo, y haciendo despues la reduccion, se obtiene por resultado, 0. Luego $-2a^2+8ab-5b^2$, ú $8ab-2a-5b^2$, es el cociente pedido; lo que puede comprobarse multiplicando el divisor por este polinomio : efectuando el producto debe ser igual al dividendo.

Reflexionando sobre los razonamientos anteriores se ve que en cada operacion parcial nos vemos obligados á buscar el término del dividendo afectado del esponente mas alto de una de las letras, y á dividirlo por el término del divisor afectado del mas alto esponente de la misma letra: se evitaria este trabajo si se tuviese cuidado de *escribir* A PRIORI *los términos del dividendo y divisor, de manera que los esponentes de una misma letra fuesen decreciendo de izquierda á derecha.* Esto es lo que se llama ORDENAR el dividendo y divisor relativamente á una misma letra. Por medio de esta preparacion el primer término de la izquierda del dividendo, y el primero de la izquierda del divisor son siempre los dos términos que es preciso dividir uno por otro para tener uno de los del cociente; y lo mismo sucede en todas las operaciones siguientes, porque los cocientes parciales y los productos del divisor por estos cocientes salen *ordenados* continuamente.

Hé aquí el cuadro de los cálculos del ejemplo precedente, despues de ordenados ambos polinomios :

$$\begin{array}{r|l}
10a^4-48a^3b+51a^2b^2+4ab^3-15b^4 & -5a^2+4ab+3b^2 \\
\cline{2-2}
-10a^4+\ 8a^3b+\ 6a^2b^2 & -2a^2+8ab-5b^2 \\
\cline{1-1}
-40a^3b+57a^2b^2+\ 4ab^3-15b^4 & \\
+40a^3b-32a^2b^2-24ab^3 & \\
\cline{1-1}
+25a^2b^2-20ab^3-15b^4 & \\
-25a^2b^2+20ab^3+15b^4 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

26. De aquí puede concluirse la regla siguiente para dividir dos polinomios uno por otro : *despues de haber ordenado el dividendo y el divisor relativamente á una misma letra, divídase el primer término de la izquierda del dividendo por el primer término de la izquierda del divisor, y se obtendrá asi el primer término del cociente; multipliquese el divisor por este término, y sustráigase el producto del dividendo propuesto. Dividase en seguida el primer término de la resta por el primero del divisor, y se obtendrá el segundo término del cociente; multipliquese el divisor por este segundo término, y réstese el producto del resultado de la primera operacion; continúense de este modo las operaciones hasta que se obtenga por último resultado,* 0 : *en cuyo caso* SE LLAMA EXACTA LA DIVISION.

Cuando el primer término del dividendo ordenado no es exactamente divisible (número 23) por el primero del divisor ordenado tambien, es señal de que la division total es imposible, es decir, de que no hay polinomio entero alguno que multiplicado por el divisor, pueda reproducir al dividendo. Se reconoce en general *que una division es imposible, cuando el primer término de uno de los dividendos parciales no es divisible por el primer término del divisor.*

27. Observaremos de paso que aunque hay alguna analogía entre la division aritmética y la algebráica, en cuanto al modo de disponerse y efectuarse los cálculos, existe entre ellas la diferencia esencial de que en la division aritmética las cifras del cociente se obtienen por tanteo, miéntras que en la algebráica el cociente que se obtiene dividiendo el primer término de un dividendo parcial por el primero del divisor es siempre uno de los términos del cociente que se busca. Si no puede efectuarse esta division parcial debe inmediatamente concluirse que es imposible la division total. Bajo este aspecto la division algebráica es mas sencilla que la aritmética.

Por otro lado, no hay tampoco inconveniente en empezar la operacion por la derecha, en vez de empezarla por la izquierda, porque entónces se operaria sobre los términos afectados de los esponentes mas pequeños de la letra respecto á la cual se ha ordenado. En la division aritmética no se puede encontrar el cociente sino empezando por la izquierda.

En fin, es tal la independencia de las operaciones parciales de que es susceptible el procedimiento, que despues de haber sustraido del dividendo total el producto del divisor por el primer término hallado en el cociente, *sustraccion que es indispensable*, se puede en la segunda operacion dividir uno por otro ambos términos del nuevo dividendo y divisor afectados del mas alto esponente de una letra diferente de la que se habia considerado al principio; obteniéndose aun uno de los términos del cociente, que quedan por determinar. Si se conserva la misma letra

es porque no hay razon para cambiarla, y porque como están ya ordenados los dos polinomios relativamente á la primera letra, resulta que los primeros términos de la izquierda en el dividendo y divisor son propios para dar un término del cociente, miéntras que si se mudase de letra seria preciso buscar de nuevo los términos afectados del mayor esponente de esta letra.

Segundo ejemplo.

23. Dividir $21x^5y^3+25x^2y^5+68xy^4-40y^5-36x^5-18x^4y$
por $5y^2-8x^2-6xy$.

Hé aquí el cuadro de los cálculos, ordenando con relacion á y:

$-40y^5+68xy^4+25x^2y^3+21x^3y^2-18x^4y-56x^5$ | $5y^2-6xy-8x^2$
$+40y^5-48xy^4-64x^2y^3$ | $-8y^3+4xy^2-3x^2y+7x^3$

1ª. resta... $20xy^4-39x^2y^3+21x^3y^2-18x^4y-56x^5$
$-20xy^4+24x^2y^3+32x^3y^2$

2ª. resta..... $-15x^2y^3+53x^3y^2-18x^4y-56x^5$
$+15x^2y^3-18x^3y^2-24x^4y$

3ª. resta..... $-35x^3y^2-42x^4y-56x^5$
$+35x^3y^2+42x^4y+56x^5$

resto final..... 0

Como interesa mucho á los principiantes el familiarizarse con las operaciones algebráicas, y sobre todo calcular con prontitud, vamos á tratar de nuevo el ejemplo último, indicando las simplificaciones que conviene introducir.

Consisten estas, como en aritmética, en sustraer del dividendo cada producto parcial, inmediatamente despues de haberlo formado.

$-40y^5+68xy^4+25x^2y^3+21x^3y^2-18x^4y-56x^5$ | $5y^2-6xy-8x^2$

1ª. r. $+20xy^4-39x^2y^3+21x^3y^2-18x^4y-56x^5$ | $-8y^3+4xy^2-3x^2y+7x^3$

2ª resta..... $-15x^2y^3+53x^3y^2-18x^4y-56x^5$

3ª. resta..... $+35x^3y^2-42x^4y-56x^5$

resto final..... 0

Si se divide desde luego $-40y^5$ por $5y^2$, sale por cociente $-8y^3$.....

Multiplicando $5y^2$ por $-8y^3$, se tiene $-40y^5$, que cambiado de signo, da $+40y^5$; y este término destruye al primero del dividendo.

Igualmente, $-6xy\times-8y^3$ da $+$, y para la sustraccion $-48xy^4$, que reducido con $+68xy^4$, da por resta $+20xy^4$. En fin, $-8x^2\times-8y^3$ da $+$, y para la sustraccion $-64x^2y^3$ que reducido con $+25x^2y^3$, da $-39x^2y^3$. El resultado de la primera operacion es pues $+20xy^4-39x^2y^3$ seguido de los otros términos del dividendo que no han sido reducidos con los productos parciales ya obtenidos.

Se opera sobre el nuevo dividendo como se operó sobre el primitivo y así sucesivamente.

Tercer ejemplo.

Supongamos que haya que dividir $95a-73a^2+56a^4-25-59a^3$
por $-3a^2+5-11a+7a^3$

$56a^4-59a^3-73a^2+95a-25$ | $7a^3-3a^2-11a+5$

1ª. resta..... $-35a^5+15a^2+55a-25$ | $8a-5$

2ª. resta..... 0

29. Puede suceder que uno de los polinomios propuestos ó ambos encierren varios términos afectados de una misma potencia de la letra con relacion á la cual se desea ordenar.

¿Cómo se dispondrán en este caso los polinomios y se efectuará la division?

Supongamos que haya que dividir

$$11a^2b-19abc+10a^3-15a^2c+3ab^2+15bc^2-5b^2c$$

por $5a^2+3ab-5bc$.

Se observa que los dos términos $11a^2b-15a^2c$ pueden ponerse bajo la forma

$$(11b-15c)\,a^2, \text{ ó } \begin{matrix}11b\\-15c\end{matrix}\Big|\,a^2,$$

escribiendo una sola vez la potencia a^2, y colocando á la izquierda, en la misma columna vertical, el conjunto de las cantidades que multiplican esta potencia; este polinomio multiplicador se llama entónces por estension (núm. 2) el coeficiente de a^2.

(Este segundo modo de reunir los términos afectados de una misma