potencia es preferible al primero, bajo dos aspectos: 1º. porque si hay muchos términos en el dividendo y divisor cuesta trabajo colocarlos en la misma línea horizontal; 2º. porque como el coeficiente de cada potencia debe tambien estar *ordenado* relativamente á una segunda letra, es fuerza, si el primer término es sustractivo, hacer esperimentar á los términos una modificacion que puede inducir á error cuando se emplea el primer medio. Sea por ejemplo, la espresion $-15b^2a^2+7bca^2-8c^2a^2$; su modificacion consiste en poner esta espresion en la forma

$$-(15b^2-7bc+8c^2)a^2 \ldots\ldots \text{(núm. 15)};$$

en vez de que por el segundo se la escribe así:

$$\begin{array}{r|l} -15b^2 & a^2; \\ +\ 7bc & \\ -\ 8c^2 & \end{array}$$

y de esta manera hay la ventaja de conservar á cada término el signo de que estaba afectado.)

Del mismo modo, $-19abc+3ab^2$ se escribirá

$$\begin{array}{r|l} +\ 3b^2 & a. \\ -19bc & \end{array}$$

Sentado esto, hé aquí cómo se efectuará la operacion:

$$\begin{array}{lr|r|l|l} & 10a^5+11b & a^2+3b^2 & a-5b^2c+15bc^2 & 5a^2+3ba-5bc \\ & -15c & -19bc & & \overline{2a+b-3c} \\ \hline 1^a.\ \text{resta}\ldots\ldots & +\ 5b & a^2+3b^2 & a-5b^2c+15bc^2 & \\ & -15c & -9bc & & \\ \hline 2^a.\ \text{resta}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 & & \end{array}$$

Dividiendo ante todo $10a^5$ por $5a^2$, se tiene $2a$ por cociente. Multiplicando el divisor por $2a$ y restando el producto se obtiene una primera resta: dividiendo la parte afectada de a^2 en esta resta por $5a^2$, se obtiene por cociente $b-3c$. Multiplicando sucesivamente cada parte del divisor por $b-3c$, y sustrayendo cada producto, se encuentra por resultado 0. Luego $2a+b-3c$ es el cociente pedido.

Para darnos cuenta de una manera general del caso precedente, que es el mas complicado de la division, designemos al dividendo por $Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E$, y el divisor por $A'a^2+B'a+C'$.

(Es costumbre en álgebra, cuando en una cuestion deben entrar gran número de cantidades designar muchas de ellas con letras diferentes; y para no repetir tampoco estas letras designar las demas por las mis-

mas letras, pero acentuadas. Los acentos $'\ldots''\ldots''$ se pronuncian *primo*, *segundo, tercero.*)

En estos dos polinomios cada uno de los coeficientes A, B, C, D, E, A′, B′, C′, designa el conjunto de muchos términos. Así Aa^4 representa toda la parte del dividendo afectada de a^4, y así de los demas. Sentado esto, como el mas alto esponente de a es 4 en el dividendo y 2 en el divisor, debe tambien ser igual á 2 en el cociente, que es entónces de la forma $A''a^2+B''a+C''$. Para determinar la parte de este cociente afectada de la mas alta potencia se observa que el producto de las dos partes $A'a^2$ y $A''a^2$, no puede esperimentar ninguna reduccion con las otras partes del producto total, y por consiguiente debe ser igual á la parte Aa^4 del dividendo, afectada de la potencia mas alta. Luego recíprocamente, si se divide Aa^4 por $A'a^2$ debe obtenerse la parte $A''a^2$ del cociente; lo que equivale á dividir A por A′, pues que a^4 dividido por a^2 da a^2. Si A y A′ son tambien polinomios compuestos de una ó muchas letras, se opera sobre ellos como ántes dijimos, lo que exige que se ordenen ante todo los dos polinomios relativamente á una de las letras que entran en ellos. Y hé aquí porqué decíamos mas arriba que al escribir los términos afectados de una misma potencia en una columna debe tenerse cuidado de ordenarlos con relacion á una segunda letra; tambien se los deberia ordenar con relacion á una tercera si varios términos de una columna encerrasen un mismo esponente de la segunda letra.

Obtenida la parte $A''a^2$, se multiplica cada una de las partes del divisor por $A''a^2$ y se van restando uno despues del otro los productos parciales que se obtienen, lo que da una primera resta sobre la cual se opera como sobre el dividendo propuesto.

Hé aquí dos nuevos ejemplos del caso que nos ocupa.

(Hemos tenido cuidado de añadir las divisiones parciales que necesita la operacion principal.)

$$\begin{array}{l|r|r|l|l|r|l|l} 1^o\ldots\ldots & 12b^2 & a^3+23b^2 & a^2+10b^4 & a & 3b & a+2b^2 & \\ & -29bc & -31b^2c & -\ 6b^2c^3 & & -5c & & \\ & +15c^2 & -\ 9bc^2 & & & \hline & 4b & a^2+5b^2 & a \\ & & +15c^3 & & & & -3c & -3c^2 & \\ \hline & & +15b^3 & a^2+10b^4 & a & & & & \\ & & -25b^2c & -\ 6b^2c^2 & & & & & \\ & & -\ 9bc^2 & & & & & & \\ & & +15c^3 & & & & & & \\ \hline & & 0 & & & & & & \end{array}$$

Primera division parcial.

$$\begin{array}{r|l} 12b^2-29bc+15c^2 & 3b-5c \\ \hline -9bc+15c^2 & 4b-3c \\ \hline 0 & \end{array}$$

Segunda division parcial.

$$\begin{array}{r|l} 15b^3-25b^2c-9bc^2+15c^3 & 3b-5c \\ \hline -9bc^2+15c^3 & 5b^2-3c^2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} 2^{\circ}.\ 6b & a^4-7b^2 & a^3-3b^3 & a^2+4b^3 & a+b^2-2b \\ -10 & +23b & +22b^2 & -9b^2 & \\ & -20 & -31b & +5b & \\ & & +5 & -5 & \\ \hline & -9b^2 & a^3 & & \\ & +27b & & & \\ & -20 & & & \\ \hline & & +12b^2 & a^2 & \\ & & -23b & & \\ & & +5 & & \\ \hline & & & +3b & a+b^2-2b \\ & & & -5 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r} 3b & a+b^2-2b & \\ -5 & & \\ \hline 2a^3-3b & a^2+4b & a+1 \\ +4 & -1 & \end{array}$$

Primera division parcial.

$$\begin{array}{r|l} 6b-10 & 3b-5 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Segunda division parcial.

$$\begin{array}{r|l} -9b^2+27b-20 & 3b-5 \\ \hline +12b-20 & -3b+4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Tercera division parcial.

$$\begin{array}{r|l} 12b^2-23b+5 & 3b-5 \\ \hline -3b+5 & 4b-1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Cuarta division parcial.

$$\begin{array}{r|l} 3b-5 & 3b-5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

30. Existe otro caso muy importante en la division algebráica, y es *cuando el polinomio dividendo contiene una ó muchas letras que no cuando el divisor.*

Se podrian ordenar los dos polinomios relativamente á una de las letras comunes, y hacer la division como de costumbre. Pero hay un medio mucho mas simple para obtener el cociente.

Supongamos, por ejemplo, que contiene el dividendo diversas potencias de la letra a, y que esta letra no entra en el divisor (se dice entónces que este es *independiente* de a). Ordenando el dividendo con relacion á a se le puede poner bajo la forma $Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E$. En que se supone Aa^4 el mas alto esponente de a en este polinomio; A, B, C, D, E, son monomios ó polinomios que no encierran á a. Sea ademas M el polinomio divisor independiente de a.

Sentado esto, como el divisor multiplicado por el cociente debe reproducir al dividendo, y el divisor M no contiene á a, es claro que el cociente debe ser un polinomio afectado de las mismas potencias de la letra a, que las que se hallan en el dividendo. De modo que este cociente es necesariamente de la forma

$$A'a^4+B'a^3+C'a^2+D'a+E'.$$

Si suponemos pues que se ha encontrado este cociente, y que se ha multiplicado sucesivamente el divisor entero por cada una de las partes $A'a^4$, $B'a^3$, $C'a^2$.... los productos serán $A'Ma^4$, $B'Ma^3$, $C'Ma^2$... y como no pueden esperimentar entre sí reduccion alguna, pues que la letra ordinatriz se halla afectada de un esponente diferente, deben ser respectivamente iguales á los términos Aa^4, Ba^3, Ca^2..... del dividendo.

Así se tiene

$$A'M=A, \text{ de donde } A'=A:M,$$
$$B'M=B, \text{ de donde } B'=B:M,$$
$$C'M=C, \text{ de donde } C'=C:M,$$

y así sucesivamente; de donde se deduce esta proposicion general :

Para que un polinomio ordenado relativamente á cierta letra, sea exactamente divisible por un polinomio INDEPENDIENTE *de esta letra es preciso que cada uno de los coeficientes de las diversas potencias del primer polinomio sea exactamente divisible por el segundo. Los coeficientes de las diversas potencias de la letra en el cociente no son otra cosa mas que los cocientes sucesivos de la division de los coeficientes del polinomio dividendo por el polinomio divisor.*

Supongamos que haya que dividir el polinomio

$$3a^2b^5-3abc^5-2b^5c^2+b^5-3a^2bc^2+3ab^5c-a^2c^5+bc^4+a^2b^2c$$

por $$b^2-c^2$$

El dividendo ordenado relativamente á a puede ponerse bajo la forma $(3b^5+b^2c-3bc^2-c^5)a^2+(3b^5c-3bc^5)a+b^5-2b^5c^2+bc^4$, efectuando las tres divisiones parciales marcadas por

$$\frac{3b^5+b^2c-3bc^2-c^5}{b^2-c^2},\ \frac{3b^5c-3bc^5}{b^2-c^2},\ \frac{b^5-2b^5c^2+bc^4}{b^2-c^2},$$

se halla por cocientes $3b+c$, $3bc$, b^5-bc^2; de modo que se tiene por cociente total $(3b+c)\,a^2+3bca+b^5-bc^2$.

Los dos últimos cocientes $3bc$ y b^5-bc^2 pueden obtenerse mas fácilmente que por el procedimiento ordinario si se observa : 1°. que $3b^5c-3bc^5$ equivale (núm. 21) á $3bc\,(b^2-c^2)$; 2°. que $b^5-2b^5c^2+bc^4$ equivale á $b\,(b^4-2b^2c^2+c^4)$, ó $b\,(b^2-c^2)^2$ (núm. 19).

Observaremos en el particular que si existen reglas generales para efectuar todas las operaciones, estas pueden casi siempre simplificarse; no debiéndose nunca dejar de emplear estas simplificaciones cuando se presenta coyuntura; porque no se hace con ello mas que conformarse aun mas con el espíritu del lenguaje algebráico.

31. Entre los diferentes ejemplos de division algebráica hay uno notable por sus aplicaciones y tan frecuente en la resolucion de las cuestiones, que los algebristas han hecho de él una especie de *teorema*. Vimos ya (números 5 y 19) que $(a+b)(a-b)$ da por producto a^2-b^2;

luego, recíprocamente, a^2-b^2 dividido por $a-b$, da $a+b$ por cociente.

Dividiendo igualmente a^3-b^3 por $a-b$, se encuentra un cociente exacto é igual á a^2+ab+b^2.

Del mismo modo, a^4-b^4 dividido por $a-b$, da por cociente $a^3+a^2b+ab^2+b^3$.

Resultados que se pueden obtener siguiendo el procedimiento ordinario de la division; y la analogía nos induce á concluir que por grande que sea el esponente que afecta á las dos letras a y b, se hace tambien la division exactamente; pero la analogía no equivale á una certidumbre rigurosa. Para alcanzar esta certidumbre designemos por m el esponente y ensayemos la division de a^m-b^m por $a-b$.

$$\text{1ª. resta} \ldots\ldots \quad \frac{a^m-b^m}{+a^{m-1}b-b^m}\ \Big|\ \frac{a-b}{a^{m-1}}$$

ó bien $$b(a^{m-1}-b^{m-1}).$$

Dividiendo ante todo a^m por a, se obtiene por cociente a^{m-1}, segun la regla de los esponentes (número 22). Como el producto de $a-b$ por a^{m-1} se sustrae del dividendo, se tiene por primera resta $a^{m-1}b-b^m$, espresion que puede ponerse bajo la forma $b\,(a^{m-1}-b^{m-1})$. Por donde se ve que si se supone $a^{m-1}-b^{m-1}$ divisible exactamente por $a-b$, sucede lo mismo con a^m-b^m; lo que quiere decir que si la diferencia de las potencias semejantes *de cierto grado* de dos cantidades es divisible exactamente por la diferencia de estas mismas cantidades, la diferencia de las potencias de un grado mayor en una unidad es tambien divisible.

Ahora bien $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ da un cociente exacto é igual á $a+b$; luego $\frac{a^3-b^3}{a-b}$ da cociente exacto é igual á

$$a^2+b\,\frac{(a^2-b^2)}{a-b}$$

ó $$a^2+b\,(a+b), \text{ ó tambien } a^2+ab+b^2.$$

Igualmente, $\frac{(a^4-b^4)}{a-b}$ da un cociente exacto é igual á

$$a^3+b\,\frac{(a^3-b^3)}{a-b}, \text{ ó } a^3+b\,(a^2+ab+b^2), \text{ ó } a^3+a^2b+ab^2+b^3;$$

y en general, $\frac{a^m-b^m}{a-b}$ da un cociente exacto é igual á

$$a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}.$$

NOTA. Este cociente sigue *una ley* fácil de retener:

1°. El esponente de la letra a es igual á $m-1$ en el primer término, y disminuye en seguida en una unidad de un término á otro, hasta el último, en que es *nulo*.

2°. El esponente de b es *nulo* en el primer término, y aumenta en una unidad de un término á otro, hasta el último en que es igual á $m-1$.

3°. El grado de cada término es igual á $m-1$.

4°. El número total de los términos de este cociente es igual á m.

Puede comprobarse *á posteriori* la exactitud de la proposicion, efectuando la multiplicacion indicada así:

$$(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2 \ldots\ldots ab^{m-2}+b^{m-1})\,(a-b).$$

Se reconoce que los productos parciales a^m y $-b^m$ son los únicos que no se destruyen en la reduccion. Por ejemplo, multiplicando $a^{m-2}b$ por a se encuentra por producto $a^{m-1}b$; pero si se multiplica a^{m-1} por $-b$, sale por producto $-a^{m-1}b$, término que destruye al precedente. Lo mismo sucede con los otros términos.

Aconsejamos á los principiantes que reflexionen acerca del medio de demostrar anterior, que se emplea en álgebra con mucha frecuencia.

32. Establecimos ya (números 23 y 26) los caractéres principales por los que se reconoce que no es exacta una division de cantidades monomias ó polinomias; lo cual significa que no existe ninguna tercera cantidad algebráica entera que multiplicada por la segunda reproduzca la primera.

Añadiremos por lo que toca á los polinomios que muchas veces por sola su inspeccion se conoce que no pueden ser divisibles uno por otro. Cuando estos polinomios encierran dos ó mas letras, es preciso, ántes de ordenar con relacion á una de ellas en particular, echar una ojeada á los dos términos del dividendo y del divisor, afectados respectivamente del mas alto esponente de cada letra. Si para una de estas letras no son divisibles uno por otro los términos del mas alto esponente, puede concluirse que es imposible la division total. Debe repetirse esta observacion en cada una de las operaciones de que es susceptible el procedimiento.

Supongamos por ejemplo que haya que dividir,

$$12a^3-5a^2b+7ab^2-11b^3 \text{ por } 4a^2-8ab+3b^2.$$

Si se atiende á la letra a parece posible la division; pero si se

atiende á la letra b es imposible, pues que $-11b^3$ no es divisible por $3b^2$.

Terminaremos con las consideraciones siguientes:

1°. Un polinomio no puede ser nunca divisible por otro polinomio que encierre una letra que no se encuentra en el dividendo; porque es imposible que una tercera cantidad entera, multiplicada por una segunda dependiente de una letra, dé un producto independiente de esta letra.

2°. Un monomio nunca es divisible por un polinomio, porque (número 18) todo polinomio multiplicado por otro da al producto por lo ménos dos términos que no se reducen.

3°. Un polinomio no puede ser divisible por un monomio sino en tanto que este divida exactamente á cada uno de los términos del dividendo; obteniéndose el cociente con poner en evidencia el factor comun á todos los términos.

---

§ II. DE LAS FRACCIONES ALGEBRÁICAS Ó LITERALES

DEL MAYOR DIVISOR COMUN.

33. Las fracciones algebráicas deben ofrecer al entendimiento la misma acepcion que las aritméticas, tales como $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{12}$... es decir que es preciso concebir que se ha dividido la unidad en tantas partes iguales como unidades hay en el denominador. Desde este momento la adicion, la sustraccion, la multiplicacion y la division deben efectuarse segun las reglas establecidas en aritmética para el cálculo de las fracciones. Sin embargo, debemos conformarnos en las aplicaciones de estas reglas, con los procedimientos indicados anteriormente para el cálculo de las cantidades algebráicas enteras, monomias ó polinomias. Seria pues inútil detenernos en este punto; no nos faltarán en lo sucesivo ocasiones de familiarizarnos con estas reglas.

La reduccion de las fracciones algebráicas á su mas simple espresion merece no obstante algunos desarrollos particulares.

Cuando no puede efectuarse exactamente una division de cantidades monomias, se indica con ayuda del signo conocido, en cuyo caso se presenta el cociente bajo la forma de una fraccion que hemos