CAPÍTULO II.

DE LOS PROBLEMAS DE PRIMER GRADO.

NOCIONES PRELIMINARES SOBRE LAS ECUACIONES.

42. Solo se consideran ordinariamente en álgebra los problemas cuyos enunciados, algebráicamente traducidos, dan lugar á *ecuaciones*. Reflexionando acerca de la resolucion del problema del número 3, se ve que esta resolucion se compone de dos partes distintas. En la primera se escriben algebráicamente las relaciones que el enunciado de la cuestion establece entre las cantidades conocidas y las desconocidas. De este modo se llega á la espresion de dos cantidades iguales que se llama *ecuacion*. Tal es (núm. 3) la espresion $2x+b=a$. En la segunda parte se deduce de la ecuacion del problema, una serie de otras ecuaciones de las que la última da en fin el valor de la incógnita por medio de las cantidades conocidas: tal es el resultado $x=\frac{a-b}{2}$ á que se llega: esta segunda parte es lo que se llama la *resolucion de la ecuacion*.

Como las reglas que hay que seguir para poner un problema en ecuacion son vagas, empezaremos por ocuparnos de la segunda parte, que se halla sometida á reglas fijas é invariables.

Segun la definicion de una ecuacion, toda ecuacion se compone de dos cantidades separadas una de otra por el signo $=$. La parte de la izquierda se llama *el primer miembro*, y la de la derecha *segundo*.

Se consideran varias especies de igualdades.

1°. La igualdad que existe entre números conocidos y dados *á priori*, pero representados por letras: tales son las igualdades

$$a-b=c-d,\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

que se verificarian inmediatamente si se pusiese en lugar de a, b, c, d los números particulares por los cuales se supone que existen estas igualdades. Conservan el nombre de *igualdades*

2°. La igualdad evidente por sí misma, la cual se verifica en su estado actual; tales son las igualdades

$$25=12+13,\ 3a-5b=a-b+2a-4b.$$

Se las llama *identidades* ó *igualdades verificadas*.

3°. En fin, la igualdad que no puede verificarse ántes de haber sustituido en lugar de una ó mas letras de las que designan incógnitas, ciertos números cuyos valores dependen de los números conocidos y dados que entran ya en la igualdad.

Para distinguirla de las otras igualdades se la llama *ecuacion*, y esta es de la que vamos á ocuparnos.

Hay ademas otra especie de igualdad de que hablaremos mas adelante, y es la *ecuacion idéntica*.

Divídense las ecuaciones de una sola incógnita en diferentes clases: aquellas en que la incógnita solo entra en la primera potencia se llaman del *primer grado*; tales son las ecuaciones

$$3x+5=13-5x,\ ax+b=cx+d.$$

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

La ecuacion $2x^2-4x=3-2x^2$ se llama del 2°. grado.

La ecuacion $4x^3-0x^2+x=2x^2+11$ del 3er grado.

En general el *grado* de una ecuacion es el mayor de los esponentes de que se halla afectada la incógnita en la ecuacion.

Divídense tambien las ecuaciones en *numéricas y literales*. Las primeras son las que no contienen mas que números particulares, á escepcion de la incógnita que se designa siempre por una letra. Así

$$4x-3=2x+5,\ 3x^2-x=8,$$

son ecuaciones numéricas. Son la traduccion algebráica de problemas cuyos datos son números particulares.

Las ecuaciones $ax+b=cx+d,\ ax^2+bx=c,$

son ecuaciones literales. Los datos del problema estan representados por letras. Para distinguir en una ecuacion las cantidades conocidas de las desconocidas se acostumbra designar á estas por las últimas letras del alfabeto, x, y, z, etc.

Establecidas estas nociones, veamos de qué modo, dada una ecuacion del primer grado con una sola incógnita, se la puede llegar á *resolver*, es decir, *á hallar para la incógnita un número que sustituido en lugar de*

esta incógnita en la ecuacion, la satisfaga ó haga el primer miembro idénticamente igual al segundo. El resultado á que se llega se llama la *solucion* de la ecuacion ó del problema á que ha dado lugar.

§ I. ECUACIONES DEL PRIMER GRADO CON UNA SOLA INCÓGNITA.

43. Debe mirarse como un principio comun á todas las ecuaciones, que se puede, sin alterar una ecuacion: 1°. *añadir* á sus dos miembros, ó *quitarles* un mismo número: 2°. *multiplicar* ó *dividir* sus dos miembros por un mismo número; lo que quiere decir que si hay igualdad entre ambos miembros la habrá tambien despues de las operaciones de que se acaba de hablar.

Sentado esto, hé aquí dos transformaciones de un uso continuo en la resolucion de las ecuaciones:

Primera transformacion. Cuando los dos miembros de una ecuacion son polinomios enteros, es necesario muchas veces transportar ciertos términos de un miembro á otro.

Sea la ecuacion $5x-6=8+2x$.

Para despejar á x de esta ecuacion se ha de procurar aislar la incógnita en el primer miembro. Si se resta pues primeramente $2x$ de ambos miembros, no se altera la igualdad (segun el principio precedente) y se tiene

$$5x-6-2x=8.$$

Por lo que se ve que el término $2x$ que era aditivo en el segundo miembro se hace sustractivo en el primero.

En segundo lugar si se añade 6 á los dos miembros no cesa tampoco la igualdad y se tiene

$$5x-6-2x+6=8+6,$$

ó como se destruyen los dos términos -6, $+6$,

$$5x-2x=8+6.$$

Luego el término que era sustractivo en el primer miembro pasa al segundo con el signo de la adicion.

Luego en general, *cuando se hace pasar un término de un miembro á otro, es preciso cambiar su signo.*

44. *Segunda transformacion.* Muchas veces tambien son fraccionarios los términos de una cuestion, y es preciso reducirla á otra que tenga solo términos enteros. Sea la ecuacion

$$\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}=11+\frac{x}{5}.$$

Reduzcamos ante todo las fracciones á un mismo denominador, por el procedimiento conocido; y saldrá $\frac{40x}{60}-\frac{45}{60}=11+\frac{12x}{60}$; y pues que se pueden multiplicar (núm. 43) ambos miembros por un mismo número, multipliquémoslos por 60, lo cual equivale á suprimir el denominador 60 en los términos fraccionarios, y á multiplicar cada término entero por 60; se obtiene

$$40x-45=660+12x.$$

Observemos para la práctica de esta operacion, que se puede pasar inmediatamente de la ecuacion propuesta á la que se acaba de obtener, dispensándose de escribir el denominador comun, y teniendo cuidado ademas de multiplicar cada término entero por dicho denominador.

Sea por segundo ejemplo la ecuacion

$$\frac{5x}{12}-\frac{4x}{3}-13=\frac{7}{8}-\frac{13x}{6}.$$

Los denominadores tienen evidentemente factores comunes, y el menor número *múltiplo comun de estos denominadores* es 24.

Efectuando esta operacion y omitiendo el denominador comun 24, se halla $10x-32x-312=21-52x$. (Se ha tenido cuidado de multiplicar el término entero -13 por 24.)

La nueva ecuacion es exacta, pues que despues de haber reducido las fracciones al mismo denominador se han multiplicado ambos miembros por el mismo número 24.

Podemos, pues, deducir de aquí esta regla general:

Para hacer desaparecer los denominadores de una ecuacion empiécese por formar el múltiplo mas simple posible de todos los denominadores. (Este número es el producto de todos los denominadores, si no tienen factores comunes.) *Multipliquese en seguida cada término si es entero, por este múltiplo; si es fraccionario divídase el múltiplo comun por el*

denominador de la fraccion y multipliquese por su numerador el cociente obtenido.

Aconsejamos á los principiantes que se penetren bien de la regla que acabamos de establecer, porque da la cuestion bajo la forma mas simple posible.

Sea como nueva aplicacion la ecuacion literal

$$\frac{ax}{b}-\frac{2c^2x}{ab}+4a=\frac{4bc^2x}{a^3}-\frac{5a^3}{b^2}+\frac{2c^2}{a}-3b.$$

El menor múltiplo de todos los denominadores es evidentemente $a^3\,b^2$. Así que multiplicaremos cada término entero por $a^3\,b^2$, y el numerador de cada término fraccionario por el cociente de $a^3\,b^2$ dividido por el denominador de este término. Sale entónces

$$a^4bx-2a^2bc^3x+4a^4b^2=4b^3c^2x-5a^6+2a^2b^2c^2-3a^3b^3.$$

45. Apliquemos los principios precedentes á la resolucion de la ecuacion

$$4x-3=2x+5.$$

Se convierte primeramente por la transposicion de los términos -3 y $2x$, en

$$4x-2x=5+3, \text{ o reduciendo, } 2x=8.$$

Dividiendo ambos miembros por 2, se halla en fin $x=\frac{8}{2}=4$.

Y en efecto, si se sustituye 4 en lugar de x en la ecuacion, sale

$$4\times4-3=2\times4+5, \text{ ó } 13=13.$$

Sea por segundo ejemplo la cuestion tratada (número 44),

$$\frac{5x}{12}-\frac{4x}{3}-13=\frac{7}{8}-\frac{13x}{6}.$$

Se obtiene desde luego, quitando los denominadores,

$$10x-32x-312=21-52x.$$

Traspongamos á el primer miembro los términos en x, y á el segundo los términos conocidos; la ecuacion se convierte en

$$10x-32x+52x=21+312, \text{ ó reduciendo, } 30x=333.$$

Dividiendo los dos miembros por 30, se obtiene $x=\frac{333}{30}=\frac{111}{10}$, resultado que se comprobaria reemplazando á x por este valor en la ecuacion propuesta.

Sea tambien la ecuacion $(3a-x)(a-b)+2ax=4b(x+a)$.

Es preciso ante todo efectuar las multiplicaciones indicadas á fin de reducir ambos miembros á polinomios, para poder de este modo separar la incógnita x. Si se aplica pues la regla establecida (número 17) para la multiplicacion de los polinomios, sale $3a^2-ax-3ab+bx+2ax=4bx+4ab$, de donde, trasponiendo y reduciendo, $ax-3bx=7ab-3a^2$. Observaremos ahora que $ax-3bx$ es lo mismo que $(a-3b)x$, lo que da $(a-3b)x=7ab-3a^2$. Dividiendo en fin ambos miembros por $a-3b$, se encuentra

$$x=\frac{7ab-3a^2}{a-3b}.$$

En general para resolver una cuestion del primer grado, por complicada que sea, es preciso: 1°. *empezar por quitar los denominadores, si los hay, y efectuar en ambos miembros de la ecuacion todas las operaciones algebráicas que se presenten: de este modo se llega á una ecuacion cuyos dos miembros son polinomios enteros;* 2°. *trasponer á un mismo miembro (comunmente es al primero) todos los términos afectados de la incógnita, y á el otro miembro los términos conocidos;* 3°. *reducir á uno solo todos los términos afectados de* x, *si la ecuacion es numérica; y si es algebráica formar de todos estos términos un solo producto compuesto de dos factores, de los que uno sea* x, *y el otro el conjunto de las cantidades que multiplican á* x, *reunidas con sus signos respectivos;* 4°. *en fin, dividir ambos miembros de la ecuacion por el número ó el polinomio que multiplica la incógnita, y efectuar la division si es posible.*

Hé aquí un ejemplo en que debe aplicarse en todas sus partes la regla precedente: resolver la ecuacion

$$\frac{(a+b)(x-b)}{a-b}-3a=\frac{4ab-b^2}{a+b}-2x+\frac{a^2-bx}{b}.$$

Haciendo ante todo desaparecer los denominadores, se tiene

$$b(a+b)^2(x-b)-3ab(a^2-b^2)=b(a-b)(4ab-b^2)-2b(a^2-b^2)x$$
$$+(a^2-b^2)(a^2-bx);$$

efectuando las multiplicaciones indicadas,

$$a^2bx+2ab^2x+b^3x-a^2b^2-2ab^3-b^4-3a^3b+3ab^3=$$
$$4a^2b^2-ab^3-4ab^3+b^4-2a^2bx+2b^3x+a^4-a^2b^2-a^2bx+b^3x;$$

trasponiendo y reduciendo,

$$4a^2bx+2ab^2x+2b^3x=4a^2b^2-6ab^3+2b^4+3a^3b+a^4;$$

reuniendo en uno solo todos los términos afectados de x,

$$b\,(4a^2+2ab-2b^2)\,x=4a^2b^2-6ab^3+2b^4+3a^3b+a^4;$$

luego en fin, $$x=\frac{a^4+3a^3b+3a^2b^2-6ab^3+2b^4}{b\,(4a^2+2ab-2b^2)}$$

espresion que no puede reducirse á un polinomio entero (número 32).

46. Supongamos que haya que resolver una ecuacion tal como

$$3x-2=4x-7, \text{ ó reduciendo, } -x=-5.$$

Para interpretar este resultado basta observar que puede invertirse el mismo órden de la trasposicion, es decir hacer pasar al contrario á el segundo miembro los términos afectados de x; lo que da

$$7-2=4x-3x, \text{ de donde } 5=x, \text{ ó bien en fin, } x=5;$$

es decir cuando se llega á un resultado tal como $-x=-5$, no hay mas que cambiar los signos de ambos miembros.

Esto equivale evidentemente á trasponer los términos afectados de la incógnita á el segundo miembro, y los términos conocidos á el primero, y recíprocamente.

47. Hemos dicho ya que la primera parte de la resolucion algebráica de un problema no está sujeta á ninguna regla fija. Tan pronto el enunciado del problema suministra sobre la marcha la ecuacion, tan pronto es forzoso separar en el enunciado las condiciones que pueden dar la ecuacion por su naturaleza; al paso finalmente que otras veces uo son las condiciones mismas del enunciado las que hay que traducir algebráicamente, sino otras distintas que pueden considerarse como consecuencias de las primeras. Llámanse entónces estas *condiciones esplícitas*, y las que de ellas se deducen *condiciones implícitas*. Daremos sin embargo con Mr. Lacroix un precepto cuya bien entendida aplicacion lleva

siempre á la ecuacion. Hé aquí su enunciado: *mirar como resuelto el problema é indicar con ayuda de los signos algebráicos, sobre las cantidades conocidas representadas, ya por números, ya por letras, y sobre la incógnita representada siempre por una letra, los mismos razonamientos y operaciones que habria que efectuar para comprobar el valor de la incógnita si fuese dado este valor.*

Se obtienen por este medio dos operaciones algebráicas diferentes que representan una misma cantidad, y encierran el carácter de la incógnita; se las iguala entre sí, y se obtiene la *ecuacion* del problema.

Apliquemos este precepto á los problemas:

Primer problema. *Hallar un número cuya mitad, tercera y cuarta parte, aumentadas en 45 den por suma 448.*

Sea x el número buscado; $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{4}$, designarán la mitad, la tercera y la cuarta parte de este número. Es preciso, pues, segun el enunciado, que estas tres partes, mas 45, den en suma 448; se tiene pues, para la ecuacion del problema,

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+45=448,$$

ó, restando 45 de ambos miembros,

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=403.$$

Suprimiendo los denominadores se encuentra

$$6x+4x+3x=4836,$$

ó reduciendo, $13x=4836$; luego $x=\frac{4836}{13}=372.$

Comprobacion.

$$\frac{372}{2}+\frac{372}{3}+\frac{372}{4}+45=186+124+93+45=448.$$

Esta ecuacion es del género de aquellas que se resuelven en aritmética por la regla de *falsa posicion;* y se ve con qué facilidad da á conocer el álgebra la respuesta á la cuestion.

011159

SEGUNDO PROBLEMA. *Uno ajusta á un obrero por 48 dias. Por cada dia de trabajo recibe 24 décimos; y por cada uno de los que está parado se le retienen 12 décimos* (para su manutencion); *al cabo de 48 dias recibe como saldo de su cuenta 504 décimos* (ó 50 fr. 40 c.) : *se pregunta el número de dias de trabajo y de los en que ha estado parado.*

Si conociésemos estos dos números, multiplicándolos respectivamente por 24 y 12, y sustrayendo en seguida el último producto del primero se deberia encontrar 504 por resultado : indiquemos estas operaciones con ayuda de signos algebráicos.

Sea x el número de dias de trabajo; $48-x$ representa entónces el número de dias de ociosidad; $24\times x$, ó $24x$ designa la suma que gana el obrero; y $12(48-x)$ la que se le debe retener; se tiene pues para la ecuacion del problema,

$$24x-12(48-x)=504;$$

efectuando los cálculos, $24x-576+12x=504$;

reduciendo, $36x=504+576=1080$;

luego $$x=\frac{1080}{36}=30,$$

y $$48-x=48-30=18.$$

De modo que el obrero ha trabajado durante 30 dias y ha descansado 18. En efecto, para 30 dias de trabajo deberia haber recibido 24×30, ó 720 *décimos;* pero ha descansado 18 dias, por los que se le han debido retener 12×18, ó 216 *décimos*. Se tiene pues

$$720-216=504.$$

Puede generalizarse este problema, designando por n el número total de los dias así de trabajo como de descanso, por a la suma que debe recibir el obrero por cada dia de trabajo, por b la que debe retenérsele por cada uno de los de descanso, y finalmente por c el resultado del descuento. Sea siempre x el número de dias de trabajo; $n-x$ espresa entónces el número de dias de descanso; luego ax y $b(n-x)$ designan la suma que debe recibir el obrero y la que se le debe retener. De suerte que se tiene para la ecuacion del problema

$$ax-b(n-x)=c,$$

ó $$ax-bn+bx=c,$$

y $$(a+b)x=c+bn;$$

luego $$x=\frac{c+bn}{a+b};$$

por consiguiente, $$n-x=n-\frac{(c+bn)}{a+b}=\frac{an+bn-c-bn}{a+b},$$

ó reduciendo, $$n-x=\frac{an-c}{a+b}.$$

TERCER PROBLEMA. *Un conejo acosado por un lebrel lleva 60 saltos de ventaja. Da 9 miéntras el lebrel 6; pero 3 saltos del lebrel equivalen á 7 del conejo. ¿ Cuántos saltos dará el lebrel para alcanzar al conejo?*

Es claro segun el enunciado que el camino que tiene que recorrer el perro se compone de los 60 saltos que le lleva de ventaja el conejo, mas el camino que recorre este desde el instante en que empieza á perseguirlo. Luego si se pudiesen encontrar las espresiones de estos dos caminos por medio de una misma incógnita, seria fácil formar la ecuacion del problema.

Sea x el número de saltos dados por el lebrel. Como el conejo da 9 saltos miéntras da 6 el lebrel, se sigue que aquel hace $\frac{9}{6}$ ó $\frac{3}{2}$ saltos miéntras este hace solo uno y por consiguiente hace un número espresado por $\frac{3x}{2}$ miéntras el lebrel hace un número marcado por x. Se podria creer que para obtener la ecuacion basta igualar x á $60+\frac{3x}{2}$; pero obrando de este modo se cometerá un error manifiesto; porque los saltos del lebrel son mayores que los del conejo, y entónces se igualarian números heterogéneos, es decir números referidos á unidades diferentes. Es preciso, pues, para obviar la dificultad, escribir los saltos del conejo en saltos del lebrel, ó recíprocamente. Pero segun el enunciado 3 saltos del lebrel valen 7 saltos del conejo; luego 1 salto del lebrel vale $\frac{7x}{3}$ saltos del conejo, y por consiguiente x saltos del lebrel valen $\frac{7x}{3}$ del conejo.