Luego en fin se tiene la ecuacion $\frac{7x}{3}=60+\frac{3}{2}x$,

de donde se deduce hecho el cálculo

$$x=72.$$

De modo que el lebrel dará 72 saltos para alcanzar al conejo; y este dará en el mismo tiempo $72\times\frac{3}{2}$ ó 108.

Comprobacion.

Los 72 saltos del lebrel valen $\frac{72\times7}{3}$, ó 168 saltos del conejo; y se tiene evidentemente $168=60+108$.

Los dos problemas siguientes merecen toda la atencion de los discípulos, por cuanto ofrecen escelentes ejercicios de cálculo y razonamiento.

48. Cuarto problema. *Un padre que tiene tres hijos manda en su testamento que se dividan sus bienes de la manera siguiente: el primero debe recibir una suma* a, *mas la* n *parte de lo que resta; el segundo una suma* 2a, *mas la* n *parte de lo que queda despues de sacada la* 1ª. *parte y* 2a; *el tercero, en fin, debe percibir una suma* 3a, *mas la* n *parte de lo que quede despues de sacadas las dos primeras partes y* 3a. *Hecho esto, están divididos los bienes; se pregunta su valor.*

Designemos por x la riqueza del padre. Si pudiésemos formar con ayuda de esta cantidad las espresiones algebráicas de las tres partes, restaríamos su suma de la riqueza total x; y la resta, *igualada* á cero daria la ecuacion del problema. Procuremos, pues, determinar sucesivamente estas tres partes.

Pues que x designa la riqueza del padre, $x-a$ es lo que queda de ella despues de separada a; de modo que se tiene para la parte del primer hijo $a+\frac{x-a}{n}$, ó reduciendo á fraccion $\frac{an+x-a}{n}$.... 1ª. parte.

Para formar la segunda parte es preciso separar de x esta primera parte y $2a$, lo cual da $x-2a\frac{(an+x-a)}{n}$, ó reduciendo los enteros á fraccion y efectuando la sustraccion indicada,

$$\frac{nx-3an-x+a}{n}\text{..... 1ª. resta.}$$

De suerte que la segunda parte se compone de $2a$, mas la n parte de esta resta; se tiene pues para esta segunda parte, $2a+\frac{nx-3an-x+a}{n^2}$, ó reduciendo el entero á fraccion,

$$\frac{2an^2+nx-3an-x+a}{n^2}\text{..... 2ª. parte.}$$

Si se restan de x las dos primeras partes y $3a$, sale

$$x-3a-\frac{(an+x-a)}{n}-\frac{(2an^2+nx-3an-x+a)}{n^2},$$

ó reduciendo al mismo denominador y simplificando,

$$\frac{n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a}{n^2}\text{..... 2ª. resta.}$$

La tercera parte es $3a+\frac{n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a}{n^3}$,

ó $$\frac{3an^3+n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a}{n^3}\text{..... 3ª. parte.}$$

De modo que, segun el enunciado, queda dividida la riqueza del padre. Luego la diferencia entre x y la suma de las tres partes debe ser igual á cero; lo que da la ecuacion

$$\left.\begin{array}{l} x-\frac{(an+x-a)}{n}-\frac{(2an^2+nx-3an-x+a)}{n^2} \\ -\frac{(3an^3+n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a)}{n^3} \end{array}\right\}=0.$$

Efectuando todas las operaciones indicadas se halla en fin

$$x=\frac{6an^3-10an^2+5an-a}{n^3-3n^2+3n-1}=\frac{a(6n^3-10n^2+5n-1)}{n^3-3n^2+3n-1}.$$

Puede obtenerse una ecuacion y un resultado mas simples segun la observacion siguiente: decir que la parte del tercer hijo se compone de $3a$, mas la n parte de lo que queda, y que la riqueza queda entónces

enteramente repartida, es decir que el primer hijo no tiene mas que la suma $3a$, y que la resta de que se acaba de hablar es nula.

Se ha hallado, pues, para la espresion de esta resta,

$$\frac{n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a}{n^2}.$$

Esta resta igualada á cero da, hecha abstraccion del denominador,

$$n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a=0;$$

de donde $$x=\frac{6an^2-4an+a}{n^2-2n+1}=\frac{a(6n^2-4n+1)}{n^2-2n+1}.$$

Para probar la *identidad numerica* de esta espresion con la precedente bastaria hacer ver que la segunda proviene de la primera cuando entre sus dos términos se haya suprimido un factor comun. Si se aplica, pues, á ambos polinomios $a(6n^3-10n^2+5n-1)$ y n^2-3n^2+3n-1, el procedimiento del mayor divisor comun (núm. 41), se conoce que $n-1$ es factor comun, y dividiendo ambos términos de la primera espresion por este factor comun se halla la segunda.

Este problema es muy á propósito para hacer ver á los principiantes que se debe procurar descubrir en el enunciado de una cuestion todas las circunstancias que pueden facilitar la formacion de la ecuacion; pues de lo contrario se corre mucho riesgo de llegar á resultados mas complicados de lo que debian serlo en efecto.

Las condiciones que han servido para formar sucesivamente las espresiones de las tres partes, son las *condiciones esplícitas* del problema propuesto; y la condicion que ha servido para determinar la ecuacion mas simple del problema, es *una condicion implícita* que ha bastado á darnos á conocer como comprendida en el enunciado solo un poco de atencion.

Para obtener los valores de las tres partes, bastaria poner en vez de x su valor en las espresiones que se obtuvieron ántes.

Apliquemos á un ejemplo la fórmula $n=\frac{a(6n^2-4n+1)}{n^2-2n+1}$.

Sea $$a=10000,\quad n=5;$$

sale

$$x=\frac{10000(6\times25-4\times5+1)}{25-10+1}=\frac{10000\times131}{16}=\frac{1310000}{16}=81875.$$

Comprobemos el enunciado en este ejemplo.

El primer hijo debe tener

$$10000+\frac{81875-10000}{5},\ 24375.$$

Queda pues $81875-24375$, ó 57500, para dividir entre los otros dos hijos.

El segundo debe recibir $20000+\frac{57500-20000}{5}$, ó 27500.

Quedan pues $57500-27500$, ó 30000, para el tercer hijo. Pero 30000 es triple de 10000, luego queda comprobada la *solucion*.

Tambien puede darse de este mismo problema otra solucion ménos directa, pero mas simple y elegante.

Está fundada igualmente sobre la observacion de que cuando se ha sustraido $3a$ de las dos primeras partes no debe quedar nada.

Designemos por r, r', r'', las tres restas de que se trata en el enunciado; las espresiones algebráicas de las tres partes, son

$$a+\frac{r}{n},\ 2a+\frac{r'}{n},\ 3a+\frac{r''}{n}.$$

De modo, que 1º. segun el enunciado, se tiene evidentemente $r''=0$. La tercera parte es, pues, $3a$.

2º. Lo que resta, cuando se ha dado al segundo hijo $2a+\frac{r'}{n}$ puede representarse por $r'-\frac{r'}{n'}$, ó $\frac{(n-1)r'}{n}$.

Por otro lado, esta resta forma tambien la tercera parte; de modo que se tiene

$$\frac{(n-1)r'}{n}=3a;\ \text{de donde}\ r'=\frac{3an}{n-1}.$$

Luego la parte del segundo es $2a+\frac{3an}{n-1}:n=2a+\frac{3a}{n-1}$ ó simplificando, $\frac{2an+a}{n-1}$.

3º. Lo que resta, despues de dado al primero $a+\frac{r}{n}$ está espresado

por $r-\frac{r}{n}$ ó $\frac{(n-1)r}{n}$. Por otro lado, esta resta debe representar la suma de las otras dos partes. Se tiene pues

$$\frac{(n-1)r}{n}=3a+\frac{2an+a}{n-1}=\frac{5an-2a}{n-1};$$

de donde $$r=\frac{5an-2a}{n-1}\times\frac{n}{n-1}=\frac{5an^2-2an}{(n-1)^2}.$$

Así la primera parte es

$$a+\frac{5an^2-2an}{(n-1)^2}:n=a+\frac{5an-2a}{(n-1)^2}$$

$$=a+\frac{5an-2a}{n^2-2n+1}=\frac{an^2+3an-a}{n^2-2n+1};$$

Se obtiene pues por último para la riqueza total

$$3a+\frac{2an+a}{n-1}+\frac{an^2+3an-a}{n^2-2n+1};$$

ó tomando n^2-2n+1 por denominador comun,

$$\frac{3a(n^2-2n+1)+(2an+a)(n-1)+an^2+3an-a}{n^2-2n+1}$$

y despues efectuando los cálculos y reduciendo,

$$\frac{6an^2-4an+a}{n^2-2n+1}=\frac{a(6n^2-4n+1)}{(n-1)^2},$$

resultado ántes obtenido.

Esta solucion es por otra parte mas completa que la precedentes, pues que se ha obtenido al mismo tiempo la riqueza del padre y las espresiones de las tres partes.

49. *Quinto problema. Un padre dispone en su testamento que el mayor de sus hijos reciba una parte* a *de sus bienes, mas la* n *parte de lo demas despues de sacada la primera parte y* 2a; *que el segundo reciba una suma* 2a, *mas la* n *parte de lo que quede; que el tercero reciba una suma* 3a, *mas la* n *parte de la nueva resta; y asi sucesivamente. Se supone por otro lado*

que todos los hijos reciban por igual. Se pregunta cuál es la riqueza del padre, la parte de cada hijo y el número de estos.

Este problema tiene de notable que su enunciado encierra mas condiciones de las que se necesitan para hallar los valores de las incógnitas.

Sea x la riqueza del padre, $x-a$ espresa lo que queda despues de sacada la suma a. Así que la parte del hijo mayor será

$$a+\frac{x-a}{n},\ \text{ó}\ \frac{an+x-a}{n}\ldots\ldots 1^{a}.\ \text{parte.}$$

Sustrayendo de x esta primera parte y $2a$, se obtiene

$$x-2a-\frac{(an+x-a)}{n}\ \text{ó}\ \frac{nx-3an-x+a}{n};$$

cuya n parte es $\frac{nx-3an-x+a}{n}$.

De modo que la herencia del segundo hijo es

$$2a+\frac{nx-3an-x+a}{n^2},\ \text{ó}\ \frac{2an^2+nx-3an-x+a}{n^2}\ldots\ldots 2^{a}.\ \text{parte.}$$

Podrian formarse del mismo modo las otras partes; pero como deben ser todas iguales, basta para formar la ecuacion del problema igualar las dos primeras partes, lo que da la ecuacion

$$\frac{an+x-a}{n}=\frac{2an^2+nx-3an-x+a}{n^2},$$

de donde se saca $x=an^2-2an+a$.

Sustituyendo este valor de x en la espresion de la primera parte se halla $\frac{an+an^2-2an+a-a}{n}$,

ó reduciendo, $\frac{an^2-an}{n}=an-a=a(n-1)$;

y como todas las partes deben ser iguales, dividiendo la riqueza total por la primera se debe obtener por cociente el número de los hijos; así, $\frac{an^2-2an+a}{an-a}$, ó $n-1$, designa el número de los hijos.

Riqueza del padre... $an^2-2an+a$ ó $a(n-1)^2$;
Parte del hijo mayor y de los otros.... $a(n-1)$;
Número total de los hijos. . . . . $n-1$.

Falta ahora saber si quedan satisfechas las demas condiciones del problema; es decir si despues de dar al segundo $2a$ mas la n parte de lo que queda, al tercero $3a$ mas la n parte de lo que queda.... será en efecto la parte de cada hijo $a(n-1)$.

Ahora bien; siendo la diferencia entre la riqueza del padre y la primera parte $a(n-1)^2-a(n-1)$, debe ser la parte del segundo

$$2a+\frac{a(n-1)-a(n-1)-2a}{n} \text{ ó } \frac{2a(n-1)+a(n-1)^2-a(n-1)}{n},$$

ó reduciendo,

$$\frac{a(n-1)+a(n-1)^2}{n}, \text{ ó bien, } \frac{a(n-1)(1+n-1)}{n},$$

ó bien en fin, $a(n-1)$.

Del mismo modo, siendo la diferencia entre $a(n-1)^2$ y las dos primeras partes $a(n-1)^2-2a(n-1)$, la parte del tercero debe ser $3a+\frac{a(n-1)^2-2a(n-1)-3a}{n}$, espresion que reducida se convierte tambien evidentemente en $\frac{a(n-1)+a(n-1)^2}{n}$,

y por consiguiente, $a(n-1)$.

En general se tendria para la p parte,

$$pa+\frac{a(n-1)^2-(p-1)a(n-1)-pa}{n}$$

ó $$\frac{pa(n-1)+a(n-1)^2-(p-1)a(n-1)}{n}$$

ó $$\frac{a(n-1)+a(n-1)^2}{n}; \text{ ó bien, } a(n-1).$$

Luego definitivamente todas las condiciones del problema quedan satisfechas.

§ II. DE LAS ECUACIONES Y PROBLEMAS DEL PRIMER GRADO CON DOS Ó MAS INCÓGNITAS.

50. Aunque algunas de las cuestiones precedentemente resueltas encerraban en su enunciado mas de una incógnita, hemos conseguido su resolucion empleando una sola letra. Depende esto de que, segun las condiciones del enunciado, podíamos fácilmente espresar las otras incógnitas por medio de esta letra; pero no sucede lo mismo en todos los problemas en que hay mas de una incógnita.

Para saber cómo nos hemos de manejar para resolver esta especie de problemas tomemos de nuevo algunos de los que han sido ya resueltos con ayuda de una sola letra.

Hallar dos números de los que se conocen la suma a *y la diferencia* b. (Este es el problema del número 4.)

Designemos los dos números buscados por x é y; se tienen, segun el enunciado, las dos ecuaciones $\begin{cases} x+y=a, \\ x-y=b. \end{cases}$

Pero *en principio*, si se añaden respectivamente á dos números iguales A y B otros dos iguales C y D, los resultados A+C y B+D son iguales; es decir que si se tienen las ecuaciones A=B y C=D, resulta A+C=B+D.

Del mismo modo, si se quitan de dos números iguales otros dos que lo sean tambien, las restas serán iguales; es decir, que de las dos igualdades A=B y C=D, se deduce tambien A—C=B—D.

Apliquemos este principio á las dos ecuaciones del problema propuesto.

Se encuentra sumándolas. . . . . $2x=a+b$,
y sustrayendo la 2ª. de la 1ª. . . . . $2y=a-b$.

Como cada una de estas ecuaciones no contiene mas que una sola incógnita se saca de la primera, $x=\frac{a+b}{2}$,

y de la segunda, $y=\frac{a-b}{2}$.

En efecto, se tiene

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=\frac{2a}{2}=a, \text{ y } \frac{a+b}{2}-\frac{(a-b)}{2}=\frac{2b}{2}=b.$$

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
Apdo. 1625 MONTERREY, MEXICO

Tomemos otra vez el problema del obrero (núm. 47) considerando únicamente el enunciado general.