Otro que posee 10000 *francos mas que el primer sugeto y que saca de su dinero* 1 p°/₀ *mas que este, tiene una renta ó ganancia mayor que la suya en* 800 *fr. Una tercera persona que posee* 15000 *francos mas que la primera, y que hace producir á su capital* 2 p°/₀ *mas que ella, tiene una renta mayor en* 1500 *fr. Se pregunta cuál es la riqueza de las tres personas y cada uno de los tres intereses?*

(Sumas colocadas	30000 f,	40000 f,	45000 f,
Interes	4,	5,	6.)

---

§ III. PROBLEMAS QUE DAN LUGAR Á RESULTADOS NEGATIVOS. — TEORÍA DE LAS CANTIDADES NEGATIVAS.

58. El empleo de los signos algebráicos para resolver los problemas da muchas veces lugar á circunstancias singulares que embarazan á primera vista; pero reflexionando un instante sobre ellas se llega á esplicarlas y aun á sacar partido de aquellas para generalizar mas *el lenguaje algebráico.*

Propongamos esta primera cuestion : *Hallar un número que unido al número* b, *dé por resultado el número* a.

Solucion. Sea x el número buscado ; se tiene evidentemente por ecuacion,

$$b+x=a, \text{ de donde } x=a-b.$$

Esta espresion ó *fórmula* dará el valor de x en todos los casos particulares del problema propuesto.

Sea por ejemplo, $a=47$, $b=29$; sale $x=47-29=18$.

Sea tambien $a=24$, $b=31$; sale $x=24-31$.

Como 31 es igual a $24+7$, esta espresion de x puede ponerse bajo la forma $x=24-24-7$, ó reduciendo, $x=-7$.

Este valor obtenido para x es lo que se llama una *solucion negativa.* Pero cómo interpretarla?

Volviendo al enunciado del problema se ve que es imposible que 31, aumentado de otro número, dé por suma 24, número menor que 31. De modo que ningun número puede verificar el enunciado en este caso particular. Sin embargo, si en la ecuacion del problema, $31+x=24$, se pone en lugar del término $+x$ el valor negativo -7, sale $31-7=24$,

ecuacion exacta que significa que el número 31, disminuido de 7 da por diferencia 24.

La solucion negativa, $x=-7$ indica, pues, la imposibilidad de satisfacer al enunciado del problema en el sentido en que ha sido establecido; pero considerando esta solucion independientemente de su signo, es decir, suponiendo $x=7$, se ve que satisface al enunciado modificado de este modo : *Hallar un número que restado de* 31 *dé por diferencia* 24, enunciado que difiere del primero. *Hallar un número que unido á* 31 *dé por suma* 24, en este punto únicamente : en que la palabra *unir* ó sumar se halla reemplazada por la palabra restar, y la palabra *suma* por la de *diferencia.*

Si se quiere resolver la nueva ecuacion directamente, no hay mas que poner la ecuacion

$$31-x=24, \text{ de donde } 31-24=x, \text{ ó } x=7.$$

Supongamos ahora que se haya propuesto este problema :

Un padre tiene un número a de años ; su hijo tiene un número b. *Se pregunta cuántos años se necesitan para que el hijo tenga la cuarta parte de la edad de su padre?*

Solucion.

Designemos por x el número de años buscado; $a+x$ y $b+x$ espresan respectivamente las edades del padre y del hijo al cabo de este número de años; de modo que se tiene la ecuacion $b+x=\frac{a+x}{4}$;

de donde $$x=\frac{a-4b}{3}.$$

Supongamos $a=54$, $b=9$; sale $x=\frac{54-36}{3}=6$.

En efecto, como el padre tiene actualmente 54 años y el hijo 9, á los seis años tendrá el padre 60 años y el hijo 15; pero 15 es igual á la cuarta parte de 60; luego $x=6$ satisface al enunciado.

Ahora supongamos $a=45$, $b=15$; sale $x=\frac{45-60}{3}$.

Se reduce esta espresion á $x=-5$, efectuando en cuanto sea posible

la sustraccion indicada por $45-60$, lo que da -15, y dividiendo -15 por 3, segun la regla establecida (número 25) para la division algebráica. Pero cómo interpretar *la solucion negativa* $x=-5$?

Pasamos á la ecuacion del problema, que en el caso particular que consideramos es $15+x=\frac{45+x}{4}$: y encierra una contradiccion manifiesta; porque el segundo miembro equivale á $\frac{45}{4}+\frac{x}{4}$; y cada una de estas dos partes es menor que cada una de las del primer miembro. Pero se reemplaza en la ecuacion $+x$ por -5, y sale $15-5=\frac{45-5}{4}$, ó $10=\frac{40}{4}$, ecuacion exacta, que significa que si en vez de añadir cierto número de años á las dos edades se quitan 5, la edad del hijo será la cuarta parte de la del padre. De modo que la solucion que se acaba de encontrar, considerada independientemente de su signo satisface á este nuevo enunciado: *un padre tiene 45 años, su hijo 15; se pregunta en qué época la edad del hijo ha sido la cuarta parte de la de su padre?*

La ecuacion de este nuevo enunciado seria $15-x=\frac{45-x}{4}$, de donde se sacaria $60-4x=45-x$, y $x=5$.

Se ve en efecto, por poco que se reflexione acerca del enunciado del problema, que siendo la relacion de la edad del hijo con la del padre actualmente $\frac{15}{45}$, ó $\frac{1}{3}$, no puede ya ser la edad del hijo la cuarta parte de la del padre; pero lo ha sido ántes, porque como probamos ya (núm. 6) de una manera general, si se añade á los dos términos de una fraccion el mismo número, la fraccion aumenta siempre de valor. Por el contrario, disminuye cuando se quita un mismo número á cada uno de sus dos términos.

59. Guiándonos por analogía podemos establecer este principio general:

1°. *Todo valor negativo hallado para la incógnita de un problema del primer grado indica un vicio en el sentido de las condiciones del enunciado, ó al ménos en la ecuacion que es su traduccion algebráica.* (Véase la observacion del número 60.)

2°. *Este valor, hecha abstraccion de su signo, puede mirarse como la respuesta á un problema cuyo enunciado no difiere del problema propuesto sino en que ciertas cantidades que eran aditivas, se han hecho sustractivas, y recíprocamente.*

Demostracion. La primera parte de este principio es fácil de demostrar. En efecto, si se halla para x un valor negativo, esto proviene necesariamente de que por la naturaleza misma de la ecuacion establecida hemos llegado á sustraer un número mayor de otro menor, *operacion inejecutable.* Así es como los valores $x=-7$, $x=-5$, han provenido (núm. 58) de las ecuaciones $x=24-31$, $x=\frac{45-60}{3}$. Ahora bien; si ningun número absoluto puesto por x puede verificar la ecuacion á que se ha llegado ejecutando sobre la del problema las transformaciones indicadas (números 43 y 44), es necesario que esta primera ecuacion no pueda verificarse tampoco en el sentido en que ha sido formada; porque la exactitud de estas transformaciones está bien probada para toda ecuacion susceptible de verificarse para un número *absoluto* que se introdujese en ella por la incógnita.

Muchas veces la imposibilidad de resolver la cuestion ó la ecuacion, en el sentido en que ha sido establecida, es evidente á la simple inspeccion, ya del enunciado, ya de la ecuacion; pudiendo servir de ejemplo los dos problemas precedentes. Otras veces es difícil de descubrir esta imposibilidad; pero la marcha de los cálculos acaba siempre por ponerla enteramente de manifiesto.

Pasemos á la segunda parte del principio.

Observemos primeramente que si en la ecuacion se reemplaza x por $-x$, todos los términos que encierran á x, si son aditivos, se harán sustractivos, y recíprocamente; porque si se tiene, por ejemplo, el término $+ax$, poniendo $-x$ en lugar de x, se convertirá en $+a\times-x$, ó $-ax$. Del mismo modo, si se tiene el término $-bx$ se convertirá en $-b\times-x$, ó $+bx$. Así que, traduciendo en lenguaje ordinario la nueva ecuacion, se tendrá necesariamente un nuevo enunciado que no diferirá del primero sino en que ciertas cantidades, de aditivas que ántes eran, se harán sustractivas, y recíprocamente.

Réstanos hacer ver ahora que la sustitucion de $-x$ en lugar de x en la ecuacion da márgen al resultado $x=p$, si se habia previamente obtenido $x=-p$ (p se considera aquí como un número absoluto).

Cualquiera que sea, pues, la ecuacion primitiva del problema se puede siempre, *por transformaciones conocidas*, suponerla reducida á la forma $ax=-b$ (en que a y b son números absolutos).

De esta ecuacion se saca $x=\frac{-b}{a}$, ó $x=\frac{-b}{a}$, ó bien en fin, $x=-p$, en

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
MONTERREY, MEXICO

que p espresa el número absoluto $\frac{b}{a}$. Pero si se pone $-x$ en lugar de x en la ecuacion primitiva, operando sobre la nueva ecuacion como sobre la primera, se llegará á la ecuacion $-ax=-b$

de donde $x=\frac{-b}{-a}$, ó $x=\frac{b}{a}$, ó en fin, $x=p$

Que era lo que convenia demostrar.

Se ve por lo que precede, de qué manera se deben interpretar las soluciones negativas. Hecha abstraccion de su signo, pueden mirarse como respuestas no á las cuestiones tales como se han establecido, sino á las de su misma naturaleza en que se han modificado algunas de las condiciones; siendo el medio mas seguro para obtener el nuevo enunciado el de *volver á la ecuacion del problema, cambiar en ella* x *en* $-$x, *y traducir despues en lenguaje ordinario la nueva ecuacion.* (Véase el número 71 para la demostracion del mismo principio, en las ecuaciones del primer grado con muchas incógnitas.)

60. *Observacion.* El principio que se acaba de establecer no es rigurosamente verdadero sino para las ecuaciones, no siéndolo siempre para los enunciados de los problemas; es decir que podrá haber problema que tenga un enunciado exacto, aun cuando resolviendo la ecuacion establecida se llegue á un valor negativo. Lo cual depende de que el algebrista, en la aplicacion de sus métodos á la resolucion de un problema, toma muchas veces ciertas condiciones en un sentido opuesto al en que deberian tomarse; en cuyo caso la solucion negativa que obtiene corrige el punto de vista bajo que ha mirado dichas condiciones. De modo que es viciosa la ecuacion, aunque el problema sea susceptible de resolucion; y solo cuando la ecuacion es la traduccion fiel del enunciado y del sentido de todas sus condiciones, es aplicable el principio á los enunciados.

Veremos de ello algunos ejemplos mas adelante; si bien este principio es mas particularmente aplicable á las resoluciones del álgebra en las cuestiones de geometría, y á las ecuaciones mas bien que á los enunciados.

Por lo demas, por poco que se reflexione acerca de la demostracion que de él hemos dado, se verá que los razonamientos afectan mas bien á las ecuaciones que á los enunciados, de los cuales se consideran como traduccion algebráica estas ecuaciones.

61. En la demostracion precedente nos hemos visto obligados á multiplicar $+a$ por $-x$, á dividir $-b$ por $+a$, $-b$ por $-a$; y se ha llegado á los resultados aplicando á los *monomios* las reglas de los *signos* establecidas para la multiplicacion y la division de los polinomios. Acaso parecerá necesario á primera vista demostrar estas reglas respecto á los monomios aislados; y esto es efectivamente lo que hacen casi todos los autores. Pero la demostracion que dan de ellas no tiene sino una exactitud aparente, ó deja muchas dudas en el entendimiento. Nosotros diremos pues, que se *han hecho estensivas á las cantidades monomias las reglas de los signos establecidas y demostradas para los polinomios á fin de dar una interpretacion á los resultados singulares que presenta el álgebra. Rechazando esta estension nos privaríamos de una de las principales ventajas del lenguaje algebráico, que consiste en abrazar en una sola y misma fórmula las soluciones de muchas cuestiones de la misma naturaleza, pero cuyos enunciados difieren por el sentido de ciertas condiciones, es decir en que ciertas cantidades son aditivas en los unos y sustractivas en los otros, y recíprocamente.*

La estension de las reglas establecidas para los polinomios á las cantidades monomias puede motivarse sin embargo por las consideraciones siguientes:

La demostracion espuesta número 17 para la multiplicacion de un binomio $a-b$ por un binomio $c-d$, supone evidentemente $a>b$ y $c>d$. Si tiene lugar lo contrario estos razonamientos no ofrecen ya al entendimiento ningun sentido riguroso, y sin embargo, una vez establecida la regla de los signos, no se piensa mas ponerla en duda, cualesquiera que sean las relaciones de grandor de a, b, c, d.

Sentado esto, como el producto de $a-b$ por c es $ac-bc$, se sigue que *el producto* de una espresion negativa $a-b$ (en que a es $<b$) *por una cantidad positiva* c *es negativo.*

Del mismo modo como el producto de b por $c-d$ es $cb-bd$, resulta que el *producto de una cantidad positiva* b *por una espresion negativa* c—d (en que c es $<d$) *es negativo.*

En fin, como el producto de $a-b$ por $c-d$ es, como hemos dicho, $ac-bc-ad+bd$, espresion que puede ponerse bajo la forma $bd-ad-bc+ac$, ó $d(b-a)-c(b-a)$, si se supone $d>c$, y $b>a$ ó $b-a$ positivo, resulta necesariamente $d(b-a)>c(b-a)$, y por consiguiente $d(b-a)-c(b-a)$, positivo. Luego el producto de *una espresion negativa* a—b *por una espresion negativa* c—d (siendo $a<b$ y $c<d$) *es positivo.*

Esto es por otra parte lo que constituye uno de los caractéres distintivos del álgebra. En aritmética como en geometría, los razonamientos versan siempre sobre seres reales que el entendimiento puede percibir, miéntras que en el álgebra se razona y opera comunmente sobre cosas *imaginarias*, ó sobre símbolos que presentan operaciones inejecutables; la exactitud, sin embargo, de los resultados que se obtienen por este medio, y á que se llegaria igualmente por otros procedimientos mas

rigurosos, aunque mucho mas largos, justifica suficientemente la marcha que se ha seguido.

62. Como las reglas de los signos, relativas á los monomios son de un uso continuo en álgebra, conviene presentar aquí su conjunto. Veremos ademas derivarse de ellas nuevas espresiones muy adecuadas al lenguaje algebráico.

Empecemos por la adicion y la sustraccion.

Para sumar $+b$ ó $-b$ con una cantidad espresada por a, es preciso escribir $a+b$ ó $a-b$, es decir, *escribir ambos monomios, uno detras de otro, con sus signos respectivos.* (Véase el número 13.)

Para sustraer $+b$ ó $-b$ de a, se ha de escribir $a-b$ ó $a+b$, esto es, cambiar el signo del monomio que se ha de sustraer, y escribirlo con su nuevo signo detras de aquel de que se ha de sustraer. (Véase el núm. 14.)

En cuanto á la multiplicacion y division:

$+a\times+b$ ó $-a\times-b$ da por producto $+ab$
$-a\times+b$ ó $+a\times-b$ da por producto $-ab$ } (núm. 17.)

$+a:+b$ ó $-a:-b$ da por cociente $+\frac{a}{b}$
$-a:+b$ ó $+a:-b$ da por cociente $-\frac{a}{b}$ } (núm. 25.)

Estas reglas dan lugar á algunas observaciones importantes.

1°. En álgebra las palabras *sumar* y *suma* no deben llevar siempre consigo, como en aritmética, la idea de aumento; porque el resultado $a-b$, de la adicion de $-b$ con a, es propiamente hablando una diferencia entre el número de unidades espresado por a, y el número de unidades espresado por b; por consiguiente este resultado es menor que a. Para distinguir esta especie de suma de una suma aritmética, se la da el nombre de *suma algebráica.* Así, un polinomio tal como

$$2a^3-3a^2b+3abc-2a^2c,$$

una *suma algebráica,* miéntras se le considere como resultado de la union de los monomios $2a^2$, $-3a^2b$, $+3abc$, $-2a^3c$, con sus signos espectivos; y *su acepcion propia* es la diferencia aritmética entre la suma de las unidades contenidas en los términos aditivos y la suma de las unidades contenidas en los términos sustractivos.

De aquí resulta que una suma algebráica puede reducirse en las aplicaciones á un número *positivo ó negativo*, menor en valor absoluto que cada uno de los números que constituyen esta suma.

2°. Las palabras *sustraer* y *diferencia* no siempre ofrecen la idea de disminucion; porque como la diferencia entre $+a$ y $-b$ es $a+b$, escede al número a; esta es una *diferencia algebráica,* pues que el resultado puede ponerse bajo la forma $a-(-b)$.

Por medio de estas denominaciones los valores negativos pueden considerarse como respuestas á las cuestiones. Por ejemplo, en la ecuacion $31+x=24$, el resultado $x=-7$ indica que se ha de añadir -7 á 31 para obtener 24; y en efecto, $31+(-7)$, ó $31-7$, es igual á 24.

Igualmente, en la ecuacion $15+x=\frac{45+x}{4}$, el resultado $x=-5$ indica que es preciso añadir -5 á las dos edades, para que la del hijo sea la cuarta parte de la del padre. En efecto se tiene

$$15+(-5) \text{ ó } 15-5=10.$$
$$45+(-5) \text{ ó } 45-5=40.$$

63. La necesidad de emplear las espresiones negativas en los cálculos algebráicos y someterlas á las mismas operaciones que las cantidades absolutas, ha conducido á los algebristas á otras dos proposiciones que serán en lo sucesivo de un uso muy frecuente. Hé aquí su enunciado: *Toda cantidad* negativa $-a$ es menor que 0; y *de dos cantidades negativas la menor es aquella cuyo valor absoluto es mayor.*

De modo que, siendo a numéricamente mayor que b, se tiene

$$-a<0 \text{ y } -a<-b.$$

Para darnos cuenta de estas dos proposiciones, observemos que en general si se resta de un mismo número una serie de números cada vez mayores, las restas deben ser cada vez mas pequeñas. Sentado esto, tomemos á la ventura un número entero, 6 por ejemplo, y quitemos sucesivamente de él 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.....; escribiendo las diferencias en una misma línea, se halla

$$6-1,\ 6-2,\ 6-3,\ 6-4,\ 6-5,\ 6-6,\ 6-7,\ 6-8,\ 6-9,$$

ó reduciendo,

$$5,\quad 4,\quad 3,\quad 2,\quad 1,\quad 0,\quad -1,\quad -2,\quad -3.$$

Por donde se ve que -1 debe considerarse como menor que 0, pues que este espresa el esceso de 6 sobre sí mismo, miéntras que -1 espresa el esceso de 6 sobre un número mayor.

Por la misma razon, -1 es mayor que -2, -3 mayor que -4, aunque los valores numéricos de las primeras espresiones sean menores que los de las últimas.

De otro modo. Tan luego como para interpretar todos los resultados singulares que suministra la resolucion algebráica de una cuestion, se ha convenido en considerar las *espresiones negativas* como cantidades, es preciso que, sometiéndolas á las mismas operaciones que los números absolutos se pueda llegar á resultados exactos. Puede mirarse, pues, como un *axioma*, que si un número a es mayor que otro b, si se añade á cada uno un mismo número d, el primer resultado, $a+d$, es mayor que el segundo, $b+d$.

Sentado esto, admitiendo las desigualdades $0>-a$, y $-a>-(a+m)$ (a y m son aquí números absolutos), si se añaden á los dos miembros de cada una de ellas, $a+m$, se encuentra $a+m>m$ y $m>0$, lo que es exacto. Por el contrario, si se pusiese $0<-a$ y $-a<-(a+m)$, resultaria $a+m<m$ y $m<0$, lo que seria absurdo.

En general deben admitirse las dos proposiciones precedentes si se quiere poder operar sobre las *espresiones negativas* como sobre las cantidades absolutas. Por lo demas estas proposiciones son una especie de *locucion algebráica* análoga á las de que nos servimos muchas veces en el lenguaje ordinario. Decimos todos los dias : *Tal persona tiene ménos que nada*, para espresar que debe mas de lo que posee; y hablando de dos sugetos que teniendo la misma fortuna deben tambien mas de lo que tienen : *el mas rico es el que debe ménos.*

Discusion de los problemas de primer grado con dos ó mas incógnitas.

64. Una vez resuelto un problema generalmente, es decir, representando los datos por letras, podemos proponernos el determinar en qué se convierten los valores de las incógnitas para hipótesis particulares hechas sobre los datos. La determinacion de estos diferentes valores, y la interpretacion de los resultados singulares á que se llega, forman lo que se llama la *discusion del problema.*

Hé aquí una cuestion cuya discusion ofrece con corta diferencia todas las circunstancias que se encuentran en los problemas del primer grado :

R′ A′ B′ R.

DÉCIMOTERCERO PROBLEMA. *Dos correos parten al mismo tiempo de dos puntos diferentes* A *y* B, *de una misma linea* AR, *y se dirigen en el mismo*

sentido AB. *El correo que sale del punto* A *anda* m *kilómetros por hora, y el que sale del punto* B *anda* n. *Se pregunta á qué distancia de los puntos* A *y* B *se encontrarán los dos correos.*

Solucion. Sea R el punto de encuentro; llamemos x é y las distancias desconocidas AR y BR, espresadas en kilómetros, y a la distancia AB que separa los dos correos en el momento de su salida. Se tiene evidentemente por primera ecuacion,

$$x-y=a\ldots (1).$$

Pero como m y n espresan los números de kilómetros andados por hora (son las velocidades respectivas de ambos correos), se sigue que los tiempos empleados en recorrer los espacios x é y están marcados por $\frac{x}{m}$ y $\frac{y}{n}$; por otra parte estos dos tiempos son iguales; de modo que se tiene por segunda ecuacion del problema $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$,

o bien,
$$nx-my=0\ldots (2).$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) entre sí, segun los métodos conocidos de eliminacion, se obtiene

$$x=\frac{am}{m-n},\quad y=\frac{an}{m-n},$$

valores que es fácil comprobar.

Discusion. En tanto que se suponga $m>n$, de donde $m-n>0$ ó positivo, serán positivos estos valores; y quedará resuelto el problema en el sentido propio de su enunciado. En efecto, si se supone que el correo A camina mas veloz que el correo B, se concibe que en cada instante le adelanta terreno; el espacio que los separaba al principio disminuye cada vez mas, hasta que en fin se destruye completamente; y entónces los dos correos deben hallarse en el mismo punto de la línea que recorren.

Pero si se supone $m<n$, de donde $m-n<0$ ó negativo, los valores son á la vez negativos y se convierten en

$$x=-\frac{am}{n-m},\quad y=-\frac{an}{n-m}.$$

Para interpretar estos resultados observemos que es imposible que se ecuentren los dos correos *si han partido* al mismo tiempo de los