puntos A y B, como se ha supuesto, no haciendo el intervalo que los separaba otra cosa que aumentar á cada instante. Mas como esta condicion de su salida simultánea no es por su naturaleza para escrita algebráicamente, tampoco entra para nada en las ecuaciones del problema, que han permanecido independientes de esta restriccion. Si se supone, pues, que llegan los correos á un mismo tiempo, el uno al punto A y el otro al punto B, mas que se mueven un tiempo indefinido sobre la linea y en el sentido AB, entónces es claro que habrán debido encontrarse anteriormente en un punto R′ de la prolongacion de BA, que es precisamente el que determinan los valores de x y de y. En efecto, si se pone el problema en ecuacion segun la nueva hipótesis, lo que equivale á cambiar los signos de x é y en ambas ecuaciones, conforme al principio establecido en el núm. 59 se obtiene

$$y-x=a,\quad \frac{x}{m}=\frac{y}{n},$$

ecuaciaones que, resueltas, dan

$$x=\frac{am}{n-m},\quad y=\frac{an}{n-m}.$$

Estos valores verifican el nuevo enunciado, en el cual se supone que los correos se han encontrado ya ántes de llegar á los puntos A y B.

Sea ahora $m=n$; de donde $m-n=0$; los valores generales se reducen á $x=\frac{am}{0}$, $y=\frac{an}{0}$.

De qué modo interpretar estos nuevos resultados?

Subiendo al enunciado primero se ve que hay una imposibilidad absoluta de satisfacerle, es decir, que no puede existir punto de encuentro; porque hallándose los dos correos á una distancia a uno de otro, y caminando con la misma velocidad, deben conservar siempre entre sí la misma distancia. Puede pues mirarse el resultado $\frac{am}{0}$ como un nuevo signo de imposibilidad. En efecto, si se toman otra vez las ecuaciones del problema, se convierten, en el caso de $m=n$, en

$$\left.\begin{array}{l} x-y=a \\ \frac{x}{m}=\frac{y}{m} \end{array}\right\} \text{ ó } \left\{\begin{array}{l} x-y=a \\ x-y=0, \end{array}\right.$$

ecuaciones evidentemente incompatibles.

Sin embargo los algebristas consideran los resultados $x=\frac{am}{0}$, y $y=\frac{an}{0}$, como si formasen una especie de valor á que dan el nombre de *valor infinito*. Hé aquí la razon:

Cuando la diferencia $m-n$, sin ser enteramente nula se supone que es muy pequeña, los dos resultados, $\frac{am}{m-n}$, $\frac{an}{m-n}$, son en estremo grandes.

Sea por ejemplo, $m-n=0,01$, $m=3$; de donde

$$n=3-0,01=2,99.$$

Sale

$$\frac{am}{m-n}=\frac{3a}{0,01}=300a \quad \frac{an}{m-n}=299a.$$

Sea ahora $m-n=0,0001$, $m=3$, de donde $n=2,9999$; resulta

$$\frac{am}{m-n}=30000a,\quad \frac{an}{n-m}=29999a.$$

En una palabra, miéntras no sea nula la diferencia de ambas celeridades, se encontrarán los dos correos; aunque las distancias del punto de encuentro á los dos de partida van siendo mayores á medida que disminuye esta diferencia.

Luego *si se supone esta diferencia menor que cualquier cantidad dada, las distancias* $\frac{am}{m-n}$, $\frac{an}{m-n}$ *son mayores tambien que ninguna cantidad dada, ó infinita.* Se dice entónces para abreviar, que si $m-n=0$, los valores que resultan

$$x=\frac{am}{0},\quad y=\frac{an}{0},$$

son *infinitos*.

Como 0 es menor que todo valor absoluto, se sigue que puede tomarse este carácter para designar el *último estado* de un grandor que puede decrecer tanto como se quiera. Del mismo modo, como un número fraccionario es tanto mayor cuanto mayor es su numerador respecto al denominador, se sigue que una espresion tal como $\frac{A}{0}$ (en que A es un número absoluto cualquiera) es muy á propósito para espresar una can-

tidad *infinita*, esto es, una cantidad mayor que ninguna otra asignable.

El *infinito* se escribe tambien con un *ocho* horizontal ∞; y por consiguiente una cantidad menor que cualquiera grandor dado, ó 0, puede escribirse igualmente por $\frac{A}{\infty}$; porque una fraccion es tanto menor cuanto mayor es su denominador respecto á su numerador. Así es que 0 y $\frac{A}{\infty}$ son símbolos sinónimos; sucediendo lo mismo con $\frac{A}{0}$ y ∞.

Hemos insistido sobre estas últimas nociones, porque hay cuestiones de tal naturaleza que en ellas el *infinito* puede mirarse como una verdadera respuesta al enunciado. De ello se encuentran frecuentes ejemplos en la *aplicacion del álgebra á las cuestiones de geometría.*

Reasumiendo lo que acabamos de decir, se ve que en el caso de $m=n$ no hay, propiamente hablando, solucion al problema, en *números finitos y determinados;* sino que se encuentran valores infinitos para las incógnitas.

Si á la hipótesis $m=n$, se añade la de $a=0$, los dos valores se convierten en $x=\frac{0}{0}$ $y=\frac{0}{0}$. Qué sentido deberemos dar á este nuevo resultado?

Tomemos otra vez el enunciado, y observemos que si ambos correos parten del mismo punto y llevan igual velocidad deben andar siempre juntos, y por consiguiente encontrarse en todos los puntos de la línea que recorren. Y en efecto, en la doble hipótesis de $m=n$, $a=0$, las ecuaciones se convierten en

$$\left.\begin{array}{l} x-y=0 \\ \frac{x}{m}=\frac{y}{m}=0 \end{array}\right\} \quad \text{ó} \quad \left\{\begin{array}{l} x-y=0, \\ x-y=0, \end{array}\right.$$

ecuaciones que entran una en otra. De modo que la cuestion es enteramente indeterminada (núm. 55), pues que no se tiene en realidad mas que una ecuacion entre dos incógnitas.

La espresion $\frac{0}{0}$ es, pues, en este caso, el *símbolo de una indeterminacion del enunciado.*

Si los dos correos no llevan la misma velocidad, es decir, que se tenga $m>$ ó $<n$, pero que se suponga $a=0$, se halla por valores $x=0$, $y=0$.

En efecto, partiendo los dos correos de un mismo punto, y teniendo velocidades diferentes, no pueden evidentemente encontrarse juntos sino en el punto de partida.

Las hipótesis precedentes son las únicas que conducen á resultados notables; bastando por otra parte para hacer ver á los principiantes cómo responde el álgebra á todas las circunstancias del enunciado de un problema.

Pronto generalizaremos la discusion anterior; pero ántes haremos una observacion de la mayor importancia en las aplicaciones algebráicas.

65. Cuando se ha resuelto un problema generalmente, por medio de las fórmulas ó valores hallados para las incógnitas se pueden *obtener por simples cambios de signo* los que convienen á nuevos problemas generales cuyos enunciados no difieran del del problema propuesto, sino por el sentido de ciertas cantidades que de aditivas que eran se han hecho sustractivas, y recíprocamente.

Tomemos por ejemplo el problema del obrero, resuelto en el número 47. Suponiendo que dicho obrero reciba por su descuento una suma c, se tienen las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x-y=n \\ ax-bx=c \end{array}\right\}, \text{ de donde } x=\frac{bn+c}{a+b},\ y=\frac{an-c}{a+b}.$$

Pero si se supone por el contrario que hecho el descuento, el obrero en vez de recibir, debe una suma c, las ecuaciones serán entónces

$$\left.\begin{array}{l} x+y=n \\ by-ax=c \end{array}\right\} \quad \text{ó} \quad \left\{\begin{array}{l} x+y=n \\ ax-by=-c \end{array}\right.$$

(se han cambiado los signos de la segunda ecuacion).

Es claro, pues, que sin necesidad de resolver de nuevo estas ecuaciones se pueden obtener en el acto los valores de x y de y que les corresponden, con solo cambiar el signo de c en los valores precedentes, lo que da

$$x=\frac{bn-c}{a+b},\ y=\frac{an+c}{a+b}.$$

Para probarlo rigorosamente designemos por de pronto $-c$ por d; las ecuaciones se convierten entónces en $\left\{\begin{array}{l} x+y=n, \\ ax-by=d, \end{array}\right.$

ecuaciones que no difieren de la del primer enunciado sino en que c se ha cambiado en d. De modo que se hallará necesariamente

$$x=\frac{bn+d}{a+b},\quad y=\frac{an-d}{a+b}.$$

Si se reemplaza ahora d por su valor $-c$, sale

$$x=\frac{bn+(-c)}{a+b},\quad y=\frac{an-(-c)}{a+b};$$

ó bien, aplicando las reglas establecidas en el número 62,

$$x=\frac{bn-c}{a+b},\quad x=\frac{an+c}{a+b}\text{..... L. Q. Q. D.}$$

Pueden comprenderse bajo las mismas fórmulas los resultados que convienen á los dos enunciados, escribiendo

$$x=\frac{bn\pm c}{a+b},\quad y=\frac{an\mp b}{a+b}.$$

(El doble signo se enuncia *mas ó ménos*; los signos superiores corresponden al caso en que el obrero recibe la suma c; y los inferiores al en que la debe.)

Estas fórmulas abrazan tambien el caso en que, hecho el descuento, el obrero y la persona que le emplea nada se deben uno á otro. Basta suponer $c=0$, lo que da

$$x=\frac{bn}{a+b},\quad y=\frac{an}{a+b}.$$

Sean tambien las dos ecuaciones generales $\begin{cases} ax+by=c, \\ dx+fy=g, \end{cases}$

que provienen de la traduccion algebráica de un problema cualquiera. Multiplicando la primera ecuacion por f, la segunda por b, y sustrayendo la segunda de la primera, se tiene

$$(af-bd)\,x=cf-bg;\ \text{de donde}\ x=\frac{cf-bg}{af-bd}.$$

Se hallaria del mismo modo $\quad y=\dfrac{ag-cd}{af-bd}.$

Sentado esto, para pasar de estas fórmulas,

1°. á las que convienen á las ecuaciones $\begin{cases} ax-bx=c, \\ dx+fy=g, \end{cases}$

basta cambiar b, en $-b$ lo que da

$$x=\frac{cf+bg}{af+bd},\quad y=\frac{ag-cd}{af+bd};$$

2°. á las fórmulas relativas á las ecuaciones $\begin{cases} ax-by=c, \\ dx-fy=g, \end{cases}$

basta cambiar b en $-b$ y f en $-f$, lo que da las fórmulas

$$x=\frac{-cf+bg}{-af+bd}=\frac{bg-cf}{bd-af},\quad y=\frac{ag-cd}{bd-af}.$$

La demostracion seria absolutamente la misma que la del ejemplo precedente; la pasaremos por lo tanto en silencio.

---

§ IV. DISCUSION GENERAL DE LOS PROBLEMAS Y DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

66. Para poder generalizar la discusion de los problemas del primer grado de una ó muchas incógnitas, vamos á proponernos establecer fórmulas que puedan representar los valores de las incógnitas, para un sistema cualquiera de ecuaciones que contengan un mismo número de incógnitas.

Pero ántes demostraremos un principio general aplicable á las ecuaciones de todos los grados, y del que no es mas que un caso particular el principio del número 50.

Si se tuviesen dos ó mas ecuaciones

$$A=B\ |\ C=D\ |\ E=F\ |\ G=H\ |\ ,\ldots, \qquad (1)$$

entre dos ó mas incógnitas x, y, z, u, . . . (el número de estas incógnitas puede ser diferente del de las ecuaciones),

1°. *Se puede sustituir á una de estas ecuaciones el resultado de la combinacion, por adicion ó sustraccion de dos ó mas de entre ellas, con tal que la ecuacion reemplazada sea una de las que han sido combinadas.*