ecuaciones que no difieren de la del primer enunciado sino en que c se ha cambiado en d. De modo que se hallará necesariamente

$$x=\frac{bn+d}{a+b},\quad y=\frac{an-d}{a+b}.$$

Si se reemplaza ahora d por su valor $-c$, sale

$$x=\frac{bn+(-c)}{a+b},\quad y=\frac{an-(-c)}{a+b};$$

ó bien, aplicando las reglas establecidas en el número 62,

$$x=\frac{bn-c}{a+b},\quad x=\frac{an+c}{a+b}\text{..... L. Q. Q. D.}$$

Pueden comprenderse bajo las mismas fórmulas los resultados que convienen á los dos enunciados, escribiendo

$$x=\frac{bn\pm c}{a+b},\quad y=\frac{an\mp b}{a+b}.$$

(El doble signo se enuncia *mas ó ménos*; los signos superiores corresponden al caso en que el obrero recibe la suma c; y los inferiores al en que la debe.)

Estas fórmulas abrazan tambien el caso en que, hecho el descuento, el obrero y la persona que le emplea nada se deben uno á otro. Basta suponer $c=0$, lo que da

$$x=\frac{bn}{a+b},\quad y=\frac{an}{a+b}.$$

Sean tambien las dos ecuaciones generales $\begin{cases} ax+by=c, \\ dx+fy=g, \end{cases}$

que provienen de la traduccion algebráica de un problema cualquiera. Multiplicando la primera ecuacion por f, la segunda por b, y sustrayendo la segunda de la primera, se tiene

$$(af-bd)\,x=cf-bg;\ \text{de donde}\ x=\frac{cf-bg}{af-bd}.$$

Se hallaria del mismo modo $\quad y=\dfrac{ag-cd}{af-bd}.$

Sentado esto, para pasar de estas fórmulas,

1°. á las que convienen á las ecuaciones $\begin{cases} ax-bx=c, \\ dx+fy=g, \end{cases}$

basta cambiar b, en $-b$ lo que da

$$x=\frac{cf+bg}{af+bd},\quad y=\frac{ag-cd}{af+bd};$$

2°. á las fórmulas relativas á las ecuaciones $\begin{cases} ax-by=c, \\ dx-fy=g, \end{cases}$

basta cambiar b en $-b$ y f en $-f$, lo que da las fórmulas

$$x=\frac{-cf+bg}{-af+bd}=\frac{bg-cf}{bd-af},\quad y=\frac{ag-cd}{bd-af}.$$

La demostracion seria absolutamente la misma que la del ejemplo precedente; la pasaremos por lo tanto en silencio.

---

§ IV. DISCUSION GENERAL DE LOS PROBLEMAS Y DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

66. Para poder generalizar la discusion de los problemas del primer grado de una ó muchas incógnitas, vamos á proponernos establecer fórmulas que puedan representar los valores de las incógnitas, para un sistema cualquiera de ecuaciones que contengan un mismo número de incógnitas.

Pero ántes demostraremos un principio general aplicable á las ecuaciones de todos los grados, y del que no es mas que un caso particular el principio del número 50.

Si se tuviesen dos ó mas ecuaciones

$$A=B\ |\ C=D\ |\ E=F\ |\ G=H\ |\ ,\ldots, \qquad (1)$$

entre dos ó mas incógnitas x, y, z, u, . . . (el número de estas incógnitas puede ser diferente del de las ecuaciones),

1°. *Se puede sustituir á una de estas ecuaciones el resultado de la combinacion, por adicion ó sustraccion de dos ó mas de entre ellas, con tal que la ecuacion reemplazada sea una de las que han sido combinadas.*

Así por ejemplo á la ecuacion A=B puede sustituirse una de las siguientes :

$$A+C=B+D, \text{ ó } A-C=B-D, \text{ ó } A+C-E=B+D-F..... \quad (2)$$

En efecto como las ecuaciones (1) existen para cierto sistema de valores de $x, y, z, u...$ es claro que cada una de las ecuaciones (2) debe existir para el mismo sistema. Recíprocamente, todo sistema que verifica una de las ecuaciones (2), y las C=D, E=F, G=H, debe necesariamente verificar la ecuacion A=B; porque si se consideran las C=D, E=F, G=H, al mismo tiempo que la ecuacion A+C—E=B+D—F, por ejemplo, se halla, restando de esta la ecuacion C=D, miembro á miembro, y añadiendo al resultado la ecuacion E=F, tambien miembro á miembro; se halla decimos,

$$A+C-E-C+E=B+D-F-D+F,$$

ó reduciendo A=B.

2°. *Tambien se puede*, ántes de cambiar las ecuaciones (1) por adicion y sustraccion, *multiplicar desde luego ambos miembros de una ó de muchas de las ecuaciones* (1) *por un número conocido.*

Porque si se tiene A=B, C=D, E=F, se tiene igualmente

$$mA=mB,\ nC=nD,\ pE=pF,$$

y recíprocamente; lo que quiere decir que al sistema de las ecuaciones A=B, C=D, E=F, puede sustituirse el siguiente :

$$mA=mB,\ nC=nD,\ pE=pF;$$

y entónces nada impide operar en seguida sobre estas últimas ecuaciones por adicion y sustraccion.

67. Volvamos ahora á nuestro propósito. Ante todo; cualquiera ecuacion del primer grado de una sola incógnita, puede por medio de las transformaciones indicadas reducirse á la forma

$$ax=b;$$

en que a designa la *suma algebráica* de las cantidades que multiplican la incógnita, y b la suma algebráica de los términos ya conocidos.

Esta ecuacion da $$x=\frac{b}{a};$$

y es muy evidente que ninguna cantidad diferente de la espresada por $\frac{b}{a}$, puede verificar la ecuacion propuesta.

Observemos en segundo lugar que toda ecuacion del primer grado de dos incógnitas puede representarse por

$$ax+by=c,$$

(en que a, b, c, son cantidades enteras de cualesquiera signos).

En efecto, si la ecuacion propuesta encierra denominadores, se les hace ante todo desaparecer (núm. 44); reuniendo en seguida todos los términos afectados de x y todos los afectados de y en el primer miembro, y haciendo luego pasar todos los términos conocidos al segundo miembro, se puede designar la *suma algebráica* (número 62) de los primeros por ax, la suma algebráica de los segundos por by, y la suma algebráica de los últimos por c.

Sean, pues, propuestas las dos ecuaciones

$$ax+by=c, \quad (1)$$
$$a'x+b'y=c'. \quad (2)$$

Se obtiene, multiplicando la primera por b', la segunda por b, y restando el segundo resultado del primero,

$$(ab'-ba')\,x=cb'-bc'; \quad (3)$$

de donde $$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ab'}.$$

Observemos aquí que en virtud del principio del número 66, las ecuaciones (1) y (2) pueden reemplazarse por las ecuaciones (1) y (3). Pero esta última da para x un valor *único*, que sustituido en la ecuacion (1) no puede dar mas que un solo valor para y. Luego las ecuaciones propuestas no pueden admitir mas que un solo sistema de valores para ambas incógnitas.

El valor de y puede obtenerse por otra parte directamente por la eliminacion de x. Basta para ello multiplicar la primera ecuacion por a', la segunda por a, y restar en seguida el primer resultado del segundo (á fin de conservar para y el mismo denominador que para x). Sale $(ab'-ba')\,y=ac'-ca'$,

de donde $$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Pasemos ahora al caso de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Sean las ecuaciones

$$ax+by+cz=d, \quad (1)$$
$$a'x+b'y+c'z=d', \quad (2)$$
$$a''x+b''y+c''z=d''. \quad (3)$$

Para eliminar z multipliquemos la primera ecuacion por c', la segunda por c, y restemos el segundo resultado del primero; sale de esta manera

$$(ac'-ca')\,x+(bc'-cb')\,y=dc'-cd'. \qquad (4)$$

Combinando del mismo modo la segunda ecuacion con la tercera, se halla

$$(a'c''-c'a'')\,x+(b'c''-c'b'')\,y=d'c''-c'd''; \qquad (5)$$

debiendo observarse ya (número 66) que las ecuaciones (1), (2), (3), pueden reemplazarse por las ecuaciones (1), (4), (5).

Actualmente para eliminar y es preciso multiplicar la ecuacion (4) por $b'c''-c'b''$, la ecuacion (5) por $bc'-cb'$, y restar despues el segundo resultado del primero, lo que da

$$\begin{aligned}&[\,(ac'-ca')\,(b'c''-c'b'')-(a'c''-c'a'')\,(bc'-cb')\,]x\\ &=(dc'-cd')\,(b'c''-c'b'')-(d'c''-c'd'')\,(bc'-cb'),\end{aligned}$$

ó efectuando los cálculos, reduciendo, y dividiendo por c,

$$\left.\begin{aligned}&(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')\,x\\ &=db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+cb'd''-bc'd'',\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ecuacion que da para x el valor único

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

Por otra parte, como las ecuaciones (1), (4), (5), y por consiguiente las propuestas pueden ser reemplazadas por las ecuaciones (1), (4), (6), si se transporta el valor *único* de x á la ecuacion (4), se obtendrá un valor *único* para y; y si se sustituye el sistema *único* de los valores de x y de y en la ecuacion (1), se obtendrá un valor *único* para z. Se ve, pues, que las ecuaciones propuestas admiten un solo sistema de valores para x, y, z.

Los valores de y y de z pueden por lo demas obtenerse directamente, efectuando, para eliminar x y z, en seguida x y y, cálculos análogos á los efectuados para eliminar y y z.

Se hallaria de esta manera

$$y=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

$$z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

Se ve claramente la marcha que se deberia seguir si se tuviesen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, etc.

68. El empleo de los acentos en las anotaciones de los coeficientes ha dado lugar á la observancia de una *regla* con sujecion á la cual se pueden hallar de nuevo fácilmente las fórmulas precedentes, sin necesidad de efectuar la eliminacion.

Consideremos primeramente el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas. Se ha hallado para los valores,

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \qquad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

1°. *Para obtener el denominador comun de estos valores, fórmese con las letras* a *y* b, *que designan los coeficientes de* x *y de* y *en la primera ecuacion, las dos permutaciones* ab *y* ba; *interpóngase en seguida el signo* —, *lo cual da* ab—ba; *en fin acentúese en cada término la última letra;* y saldrá

$$ab'-ba'.$$

2°. *Para obtener el numerador relativo á cada incógnita, reemplácese en el denominador la letra que designa el coeficiente de esta incógnita por la letra que designa la cantidad ya conocida, dejando sin embargo los acentos en el mismo lugar. Segun esta regla,* ab'—ba', *se cambia en* cb'—bc', *para el valor de* x *y en* ac'—ca' *para el valor de* y.

Consideremos ahora el caso de tres ecuaciones con tres incógnitas, en que a, b, c, designan respectivamente los coeficientes de x, y, z, y d las cantidades ya conocidas. 1°. *Para obtener el denominador comun tómese el denominador* ab – ba, *que conviene al caso de dos incógnitas (hecha abstraccion de los acentos), introdúzcase la letra* c *en cada uno de los dos términos* ab *y* ba *en todos los lugares, á saber: á la derecha, en el medio y á la izquierda; interpónganse despues signos alternativamente positivos y negativos; y resulta* abc – acb+cab—bac+cab – cba. *Póngase en seguida en cada término el acento' sobre la segunda letra, y el acento'' sobre la tercera; y sale para el denominador,*

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''.$$

2°. *Para formar el numerador de cada incógnita reemplácese en el denominador la letra que designa el coeficiente de esta incógnita por la letra que designa la cantidad ya conocida, dejando los acentos en el mismo lugar. Asi para* x *cámbiese* a *en* d; *para* y, b *en* d; *y para* z, c *en* d.

Lo que acabamos de decir puede mirarse como un resultado de ob-

servacion para dos y para tres ecuaciones. Seria fácil establecer una ley general aplicable á un número cualquiera de ecuaciones; pero su demostracion es muy complicada, y sale completamente de estos elementos. Remitimos sobre el particular á la segunda parte del *álgebra* de Garnier, á una obra titulada : *Complemento de la teoria de las ecuaciones del primer grado* por M. Desnanot; y al *Manual de Álgebra* de Mr. Terquem, etc.

69. Veamos el uso que puede hacerse de estas fórmulas en las aplicaciones particulares.

Sean las dos ecuaciones $5x-7y=34$, $3x-13y=-6$. Comparándolas con las ecuaciones generales

$$ax+by=c,\ a'x+b'y=c'.$$

se tiene $a=5$, $b=-7$, $c=34$ | $a'=3$, $b'=-13$, $c'=-6$.

Sustituyamos estos valores en las fórmulas

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},\quad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'};\ \text{sale}$$

$$x=\frac{34\times-13-(-7)\times-6}{5\times-13-(-7)\times3}=\frac{-34\times13-7\times6}{-5\times13+7\times3}$$

$$=\frac{-442-42}{-65+21}=\frac{-484}{-44}=11;$$

$$y=\frac{5\times-6-33\times3}{5\times-13-(-7)\times3}=\frac{-30-102}{-65+21}=\frac{-132}{-44}=3;$$

y digo que $x=11$, $y=3$, son los valores propios para satisfacer ambas ecuaciones propuestas.

Podríamos desde luego asegurarnos de ello sustituyéndolos en estas ecuaciones. Pero para que la demostracion sea independiente de todo ejemplo particular observamos que para pasar de las fórmulas relativas á las ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\}$ á las que convienen á las ecuaciones. . . $\left\{\begin{array}{l} ax-by=c \\ a'x-by=-c \end{array}\right\}$, basta (núm. 63) cambiar b en $-b$, b' en $-b'$, y c' en $-c'$, lo que da

$$x=\frac{cx-'b-(-b)\,x-c'}{ax-b'-(-b)\,xa'},\quad y=\frac{ax-c'-cxa'}{ax-b'-(-b)\,xa'};$$

y para deducir de estas nuevas fórmulas generales los valores que convienen á las ecuaciones particulares, es preciso hacer

$$a=5,\ b=7,\ c=34;\ a'=3,\ b'=13,\ c'=6,$$

y efectuar en seguida los cálculos segun las reglas establecidas para las cantidades monomias.

La regla consiste, en general, *en sustituir en lugar de los coeficientes* a, b, a', b', ..., *sus valores considerados con los signos de que se hallan afectados en las ecuaciones particulares, y efectuar todas las operaciones indicadas, segun los preceptos establecidos.*

Estas aplicaciones justifican de nuevo la necesidad de hacer estensivas á las cantidades monomias las reglas de los signos establecidas para los polinomios, pues que este es el medio de hacer aplicables á todo ejemplo particular las fórmulas generales del primer grado.

Pasemos á la discusion de estas fórmulas.

70. Resulta de su inspeccion, que en las aplicaciones particulares se pueden obtener cuatro especies de valores por respuesta á problemas del primer grado, á saber : *valores positivos*, *valores negativos*, *valores de la forma* $\frac{A}{0}$, y en fin, *valores de la forma* $\frac{0}{0}$. El problema de los correos ha dado lugar á estas cuatro especies de resultados que nos proponemos ahora interpretar de una manera general.

Primeramente, los *valores positivos* son ordinariamente respuestas á las cuestiones, en el sentido de su enunciado. Si, por ejemplo, la naturaleza del problema exige que los números buscados sean enteros y se hallan números fraccionarios, no puede ser resuelto el problema. Algunas veces tambien la naturaleza del problema no permite que los números desconocidos escedan á los conocidos y dados á priori, ó bien han de ser mas bajos que otros números. Si los valores obtenidos, aunque positivos, no satisfacen esta condicion de que es susceptible el enunciado, pero que no puede espresarse por una ecuacion, no puede tampoco resolverse el problema. De modo que, *los valores positivos de las incógnitas son*, propiamente hablando, *respuestas directas á las ecuaciones ; y no son soluciones de la cuestion sino en tanto que su naturaleza se concilia con las condiciones que exige el enunciado.*

Para concebir cómo un número puede verificar una ecuacion sin verificar el problema de que es traduccion algebráica, basta observar que *una misma ecuacion es la traduccion algebráica de una infinidad de problemas*, de los que unos admiten todos los números absolutos posibles por *solucion*, y los otros no admiten mas que números de cierta naturaleza.

71 Sabemos ya á qué atenernos acerca de los *valores negativos*, para los problemas de una sola incógnita. Para no dejar nada que desear vamos á *demostrar* el principio del número 59 para un problema de muchas incógnitas.

Es desde luego evidente que si se obtienen valores negativos para algunas de las incógnitas, las ecuaciones del problema no pueden satisfacerse en el sentido en que han sido establecidas; porque si un sistema de números absolutos, introducido por $x, y, z, \ldots$, pudiese verificarlas, las ecuaciones que de ellas se han deducido por el método de eliminacion deberian tambien existir para este sistema.

De modo que la ecuacion que no contiene mas que una de las incógnitas para las que se ha obtenido un resultado negativo deberia verificarse con un número absoluto, lo cual seria contra la hipótesis. *Es preciso, pues, rectificar el enunciado del problema, ó por lo ménos las ecuaciones que son su traduccion algebráica.*

Mas ahora, si se cambian en las ecuaciones los signos de las incógnitas para las cuales se han obtenido resultados negativos, cambiarán necesariamente de signo los términos afectados de dichas incógnitas, y el enunciado del problema se modificará por lo general por cuanto *ciertas cantidades de aditivas que eran se harán sustractivas, y recíprocamente.*

Digo, en fin, que una vez hechas estas modificaciones, *queda verificado el nuevo enunciado por los valores obtenidos al principio para las incógnitas, hecha abstraccion de sus signos.* Tomemos, para fijar las ideas, tres ecuaciones de tres incógnitas.

$$ax+by+cz=d,\ a'x+b'y+c'z=d',\ a''x+b''y+c''z=d'',$$

y supongamos que hayan dado estas ecuaciones

$$x=p,\ y=-q,\ z=-r.$$

Cambiemos en estas ecuaciones, y, z, en y' z', (en que y', z' designan por de pronto $-y$, $-z$). Sale

$$ax+by'+cz'=d,\ a'x+b'y'+c'z'=d',\ a''x+b''y'+c''z'=d''.$$

Ahora bien; como estas ecuaciones no difieren de las precedentes mas que en que y y z se hallan reemplazadas por y' y z', darán necesariamente por resultados

$$x=p,\ y'=-q,\ z'=-r;$$

de donde, volviendo á poner $-y$ y $-z$ en lugar de y' y de z,

$$x=p,\ -y=-q,\ -z=-r.$$

ó bien en fin,

$$x=p,\ y=q,\ z=r;$$

Q. E. L. Q. Q. D.

Así que el principio del número 59 es verdadero para los problemas de primer grado con muchas incógnitas.

Nota. Algunas veces el enunciado de un problema no es susceptible por su naturaleza de modificacion alguna; en este caso los *valores negativos* no son mas que soluciones de las ecuaciones modificadas, que pueden por otra parte mirarse como la traduccion algebráica de otros problemas susceptibles de modificacion.

72. Nos resta ahora interpretar espresiones tales como $\frac{A}{0}$ $\frac{0}{0}$.

Sea primeramente la ecuacion de una incógnita,

$$ax=b;\ \text{de donde}\ x=\frac{b}{a}.$$

1°. Si por una hipótesis particular acerca de los datos de la cuestion se tiene $a=0$, resulta $x=\frac{b}{0}$.

La ecuacion se convierte pues, en este mismo caso, en $0\times x=b$, y no puede evidentemente ser satisfecha por ningun número determinado. Observemos sin embargo que como la ecuacion puede ponerse bajo la forma $\frac{b}{x}=0$, si se reemplaza x por números cada vez mayores, $\frac{b}{x}$ diferirá cada vez ménos de 0, y la ecuacion se acercará cada vez mas á ser exacta; de suerte que se puede tomar para x un valor bastante grande para que $\frac{b}{x}$ llegue á ser menor que cualquiera cantidad imaginable.

Por esto acostumbran á decir los algebristas que *el infinito* satisface en este caso á la ecuacion; habiendo cuestiones para las que esta especie de resultados constituyen una verdadera solucion. Por lo ménos es cierto que la ecuacion no puede admitir solucion que sea número *finito*, y esto es cuanto se intenta probar.

2°. Si se tiene al mismo tiempo, $a=0$, $b=0$, el valor de x toma la forma $\frac{0}{0}$.