La ecuacion se convierte pues, en este caso, en $0 \times x = 0$; *pudiendo todo número finito*, positivo ó negativo, satisfacer á esta ecuacion.

De modo que la *ecuacion* (ó el problema de que es traduccion algebráica) es *indeterminada*.

73. Conviene aquí hacer una observacion importante sobre la espresion $\frac{0}{0}$, que es en ciertos casos el símbolo de la existencia de un factor comun en ambos términos de la fraccion, cuyo factor se hace nulo por efecto de una hipótesis particular.

Supongamos, por ejemplo, que se haya encontrado por resultado de la solucion de un problema

$$x = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}.$$

Si se hace en esta fórmula, $a = b$, resulta $x = \frac{0}{0}$.

Pero observemos que $a^3 - b^3$ puede (núm. 31) ponerse bajo la forma $a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$, y que $a^2 - b^2$ es igual á $(a - b)\ (a + b)$; de modo que el valor de x se convierte en

$$x = \frac{(a-b)\ (a^2 + ab + b^2)}{(a-b)(a+b)}.$$

Si ántes pues de hacer la hipótesis $a = b$, se empieza por suprimir el factor comun $a - b$, el valor de x se convierte en $x = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$, espresion que en la hipótesis de $a = b$, se reduce á $x = \frac{3a^2}{2a}$, ó $x = \frac{3a}{2}$.

Sea, como segundo ejemplo, la espresion

$$\frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2} = \frac{(a+b)\ (a-b)}{(a-b)\ (a-b)}.$$

Haciendo $a = b$ se halla para valor de x, $x = \frac{0}{0}$, á causa de la existencia del factor comun, $a - b$; pero si se suprime desde luego este factor, sale $x = \frac{a+b}{a-b}$, espresion que se reduce á $x = \frac{2a}{0}$, cuando se hace $a = b$.

74. Volvamos á nuestro asunto y consideremos las dos ecuaciones de dos incógnitas $\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$

Hemos encontrado (número 67) para los valores de x y de y,

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Supongamos que se tenga $ab' - ba' = 0$.

Como los numeradores $cb' - bc'$, $ac' - ca'$, son diferentes de 0, los valores se reducen á

$$x = \frac{A}{0}, \qquad y = \frac{B}{0}.$$

Para interpretar estos resultados observemos que de la ecuacion $ab' - ba' = 0$, se sacan $a' = \frac{ab'}{b}$; de donde sustituyendo en la ecuacion $ax + by = c$, y suprimiendo el denominador;

$$ax + by = c\frac{bc'}{b'},$$

ecuacion cuyo primer miembro es idéntico al de la primera

$$ax + by = c,$$

miéntras que el segundo es esencialmente diferente: porque de la desigualdad $cb' - bc' \gtrless 0$, se deduce $c \gtrless \frac{bc'}{b'}$.

Se ve, pues, que *las dos ecuaciones propuestas no pueden ser satisfechas simultáneamente por ningun sistema de valores finitos de* x *y de* y.

Si se tiene al mismo tiempo: $ab' - ba' = 0$, $cb' - bc' = 0$, el valor de x se reduce á $x = \frac{0}{0}$, valor que es necesario interpretar.

Las dos ecuaciones propuestas pueden en virtud de la relacion $ab' - ba' = 0$ ponerse bajo la forma $\begin{cases} ax + by = c, \\ ax + by = \frac{bc'}{b'}, \end{cases}$

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
1625 MONTERREY, MEXICO

ecuaciones que entran necesariamente la una en la otra : porque de la relacion $cb'-bc'=0$, se deduce $c=\frac{bc'}{b'}$.

De modo que para resolver el problema no se tiene realmente mas que una sola ecuacion entre dos incógnitas : luego *la cuestion es indeterminada.*

Como la relacion $ab'-ba'=0$ da $b'=\frac{ba'}{a}$, de donde, sustituyendo en la relacion $cb'-bc'=0$ y reduciendo,

$$ca'-ac'=0,$$

puede concluirse de aqui que *si el valor de* x *es de la forma* $\frac{0}{0}$, *el valor de* y *es generalmente de la misma forma ; y reciprocamente.*

75. Esta proposicion, relativa al sistema de *dos* ecuaciones, deja de ser verdadera en *un solo* caso particular : tal es aquel en que los coeficientes de una misma incógnita son *nulos* á la vez en ambas ecuaciones. Examinemos esta circunstancia que merece alguna atencion.

Supongamos, por ejemplo, $b=0$, $b'=0$, en cuyo caso los valores de x y de y se reducen á

$$x=\frac{0}{0}, \text{ y } y=\frac{ac'-ca'}{0}.$$

Si subimos á las ecuaciones, se convierten, en la hipótesis que consideramos, en

$$\left.\begin{array}{l} ax=c \\ a'x=c' \end{array}\right\} \text{ de donde se deduce } x=\frac{c}{a} \text{ y } x=\frac{c'}{a'}.$$

Ahora bien, sucede necesariamente una de dos cosas; ó *bien* $\frac{c}{a}\gtrless\frac{c'}{a'}$; entónces las ecuaciones son *incompatibles;* y el valor de y es de la forma $\frac{A}{0}$ ó *infinito,* miéntras que x es de la forma $\frac{0}{0}$.

O bien $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$; y entónces las dos ecuaciones se concilian. Ahora, como la relacion $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$ da $ac'-ca'=0$, se sigue que el valor de y toma la forma $\frac{0}{0}$, como la de x; pero hay la diferencia esencial de que y es

realmente *indeterminado*, al paso que x tiene un valor *determinado*, $\frac{c}{a}$.

Ademas, en la hipótesis que nos ocupa á saber : $b=0$, $b'=0$, $ac'-ca'=0$, es fácil hacer resaltar la existencia de un factor comun que haga ***nulos*** á la vez ambos términos del valor general de x.

Supongamos, para ello, $m=\frac{a'}{a}=\frac{c'}{c}$, y $n=\frac{b'}{b}$;

resulta $a'=ma$, $c'=mc$, y $b'=nb$,

de donde, sustituyendo en el valor general de x, $\left(x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\right)$,

estos valores de a', c', b', sale :

$$x=\frac{bcn-cbm}{abn-bam}=\frac{cb\,(n-m)}{ab\,(n-m)},$$

espresion que despues de la supresion de los factores comunes, b y $n-m$, se reduce á $x=\frac{c}{a}$.

En cuanto al valor general de y $\left(y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}\right)$, se convierte por las mismas sustituciones en

$$y=\frac{acm-cam}{abn-bam}=\frac{ac\,(m-m)}{ab\,(n-m)}=\frac{c\,(m-m)}{b\,(n-m)},$$

espresion que á causa de $b=0$ y $m-m=0$ se reduce siempre á $\frac{0}{0}$, sin que haya ningun factor comun que suprimir; y hemos visto que y debe en efecto permanecer indeterminado.

Las consecuencias serian análogas si se tuviese á la vez $a=0$, $a'=0$.

Nota. El caso particular en que los coeficientes de ambas incógnitas en la misma ecuacion son á la vez *nulos* no invalida la proposicion establecida en el número 74.

Se halla, 1°. para $a=0$, $b=0$,....., $x=\frac{cb'}{0}$, $y=\frac{-ca'}{0}$;

2°. para $a'=0$, $b'=0$,....., $x=\frac{-bc'}{0}$, $y=\frac{ac'}{0}$.

Estas son las únicas circunstancias dignas de mencion.

76. Acabamos de ver que para dos ecuaciones con dos incógnitas, escepto un solo caso particular, si una de las incógnitas tiene un valor de la forma $\frac{A}{0}$ ó $\frac{0}{0}$, la otra lo tiene necesariamente de la misma forma; y ademas, que en la hipótesis en que los valores son los dos de la forma $\frac{A}{0}$, son *incompatibles* las ecuaciones, y si estos son de la forma $\frac{0}{0}$ las ecuaciones son *indeterminadas.*

Cuando se tienen mas de *dos* ecuaciones no se puede ya sacar las mismas consecuencias. Así por ejemplo, cuando se trata de *tres* ecuaciones, si se supone *nulo* el denominador, comun á los valores de las tres incógnitas, podrá suceder, segun las circunstancias; ó que sean los numeradores *diferentes* todos los tres de 0; ó que sean todos tres *iguales* á 0; ó finalmente, que siendo uno de los dos igual á 0, sean *diferentes* de 0 los otros dos; ó recíprocamente.

Esto se esplica bastante bien por la observacion de que hallándose para dos ecuaciones el denominador $ab'-ba'$, compuesto de dos términos relativamente, no puede ser *nulo* sino de tres maneras principales, á saber: cuando se tiene

$$1^{o}\ldots\ldots \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b},$$

$$2^{o}\ldots\ldots a=0,\ a'=0,\ \text{ó bien},\ b=0,\ b'=0,$$
$$3^{o}\ldots\ldots a=0,\ b=0,\ \text{ó bien},\ a'=0,\ b'=0;$$

miéntras que siendo para *tres* ecuaciones el denominador D

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''$$

puede ponerse bajo diferentes formas, tales como

$$a(b'c'-c'b'')+a'(cb''-bc'')+a''(bc'-cb'),$$
$$b(c'a''-a'c'')+b'(ac''-ca'')+b''(ca'-ac'),$$
$$c(a'b''-b'a'')+c'(ba''-ab'')+c''(ab'-ba'),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y es susceptible de este modo de llegar á ser *nulo* de un sinnúmero de maneras, sin que los valores de los numeradores dependan los unos de los otros.

Por ejemplo, suponiendo que no sea nula ninguna de las cantidades $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', d, d', d''$, admitamos que se tenga

$$b'c''-c'b''=0,\ cb''-bc''=0,\ \text{de donde}\ bc'-cb'=0;$$

el denominador D se convierte en 0; y como el numerador del valor de x se deduce de D (núm. 68) cambiando a, a', a'' en d, d', d'', es claro que este numerador seria tambien igual á 0; pero nada hay que pruebe que los numeradores que corresponden á y y á z se hagan *nulos* con la misma circunstancia, pues que no entran en sus espresiones las *cantidades* $b'c''-c'b''$, $cb''-bc''$, y $bc'-cb'$.

Sin embargo, tan luego como se obtiene para el valor de una de las incógnitas una espresion de la forma $\frac{A}{0}$, puede concluirse, sin RESTRICCION ALGUNA, que las ecuaciones son *incompatibles* en números finitos, al ménos para esta incógnita. En efecto, como resulta de lo dicho en el número 67 que una de las ecuaciones propuestas puede reemplazarse por la ecuacion que no encierra ya mas que la incógnita para la cual se ha hallado un resultado de la forma $\frac{A}{0}$, solo este resultado, combinado con ciertos valores de las otras incógnitas, es el que puede verificar las tres ecuaciones propuestas.

Pero de que se obtenga para una de las incógnitas un resultado de la forma $\frac{0}{0}$ no se puede concluir que las ecuaciones son *indeterminadas;* porque, segun hicimos observar, las demas incógnitas pueden tener valores de la forma $\frac{A}{0}$.

Hay mas, y es que es muy posible que los tres valores sean de la forma $\frac{0}{0}$ sin que debamos concluir que son *indeterminadas* las ecuaciones; hasta pueden ser tambien incompatibles en este caso.

Tomemos por ejemplo, las tres ecuaciones

$$ax+by+cz=d,$$
$$a'x+b'y+c'z=d',$$
$$ma'x+mb'y+mc'z=md',$$

de las que la última resulta de la multiplicacion de los dos miembros

de la segunda por el factor m; lo que se reduce a suponer en las ecuaciones generales de tres incógnitas,

$$a''=a'm,\ b''=b'm,\ c''=c'm,\ d''=d'm,$$

y por consiguiente, $\frac{a''}{a'}=\frac{b''}{b'}=\frac{c''}{c'}=\frac{d''}{d'}$;

se deducen de estas últimas relaciones,

$$b'a''-a'b''=0,\ c'a''-a'c''=0,\ d'a''-a'd''=0,$$
$$c'b''-b'c''=0,\ d'b''-b'd''=0,\ d'c''-c'd''=0.$$

Si se designan pues por D el denominador comun á los tres valores de x, y, z, y por N, N', N'', sus numeradores respectivos, valores cuya ley de formacion dejamos establecida en el número 68, se encuentra, en virtud de las relaciones de arriba,

$$D=a(b'c''-c'b'')+b(c'a''-a'c'')+c(a'b''-b'a'')=0,$$
$$N=d(b'c''-c'b'')+b(c'd''-d'c'')+c(d'b''-b'd'')=0,$$
$$N'=a(d'c''-c'd'')+d(c'a''-a'c'')+c(a'd''-d'a'')=0,$$
$$N''=a(b'd''-d'b'')+b(d'a''-a'd'')+d(a'b''-b'a'')=0.$$

De modo que los valores de x, y, z, se reducen los tres á la misma forma, $\frac{0}{0}$.

En el caso que consideramos se puede hasta cierto punto mirar $\frac{0}{0}$ como un símbolo de *indeterminacion*; porque la tercera ecuacion es una consecuencia necesaria de la segunda; de modo que no se tienen mas que dos ecuaciones realmente distintas entre tres incógnitas. Sin embargo, observemos que los resultados obtenidos arriba tendrian lugar tambien aun cuando la segunda ecuacion fuese incompatible con la primera, si se tuviese por ejemplo para esta segunda ecuacion

$$pa.x+pb.y+pc.z=qd \text{ (en que } p \text{ es} > \text{ ó} < q).$$

Se ve, pues, que los tres resultados $\frac{0}{0}$ pueden algunas veces corresponder á una *incompatibilidad* entre las ecuaciones.

Lo absurdo puede tambien manifestarse por tres valores de la forma $\frac{0}{0}$, aunque no pueda considerarse que ninguna de las tres ecuaciones entra

en ninguna de las otras dos: esto es lo que sucederia con las tres ecuaciones siguientes:

$$ax+by+cz=d,\ ax+by+cz=d',\ ax+by+cz=d''.$$

Considerando este sistema se reconoce fácilmente que no puede existir en números *finitos*, á no ser que se tenga $d=d'=d''$. Verdad es que tan luego como exista esta última relacion, se hace *indeterminado* el sistema de las ecuaciones, pues que se reduce á una sola ecuacion entre tres incógnitas. Pero no por eso es ménos cierto que en su estado actual son *incompatibles* las ecuaciones, aunque los tres valores sean de la forma $\frac{0}{0}$, como es fácil asegurarse remontándonos á los valores de D, N, N', N'', establecidos ántes.

Tomemos, por nuevo ejemplo, las ecuaciones

$$ax+by+cz=d,$$
$$a'x+by+cz=d',$$
$$a''x+by+cz=d'',$$

que se deducen de las ecuaciones generales, suponiendo

$$b=b'=b'',\ \text{y}\ c=c'=c''.$$

Se halla para los valores de D, N, N', N'',

$$D=a(bc-cb)+a'(cb-bc)+a''(bc-cb)=0,$$
$$N=d(bc-cb)+d'(cb-bc)+d''(bc-cb)=0,$$
$$N'=c(ad'-ad''+da''-da'+a'd''-d'a''),$$
$$N''=b(ad''-ad'+d'a''-a'd''+da'-da'').$$

Las dos espresiones de N', N'', deben ser generalmente diferentes de 0; así en el caso que nos ocupa el valor de x es de la forma $\frac{0}{0}$, miéntras que los de y y de z son de la forma $\frac{A}{0}$.

Para interpretar estos resultados observemos que las ecuaciones **no** pueden existir simultáneamente, á no ser que se tenga

$$d-ax=d'-a'x,\quad d-ax=d''-a''x;$$

de donde se saca $x=\frac{d'-d}{a'-a}$, y $x=\frac{d''-d}{a''-a}$.

Aquí, como en el número 75, puede suceder una de dos cosas:

Primer caso. Los dos valores de x no se concilian, es decir, que se tiene

$$\frac{d'-d}{a'-a}-\frac{d''-d}{a''-a}\gtrless 0,$$

ó reduciendo las fracciones al mismo denominador, y suprimiendo los dos términos $+ad$, $-ad$, que se destruyen,

$$d'a''-da''-ad'-a'd''+da'+ad''\gtrless 0$$

(es inútil tener cuenta con el denominador comun).

El primer miembro, pues, de esta desigualdad no es mas que el factor, entre paréntesis, en los valores de N' y N'' (con diferencia del signo, sin embargo, para N'). Luego los valores de y y de z se presentan bajo la forma *infinita*, ó $\frac{A}{0}$ aunque el de x sea de la forma $\frac{0}{0}$.

Segundo caso. Los dos valores de x se concilian entre sí, lo que lleva consigo la relacion $\frac{d'-d}{a'-a}-\frac{d''-d}{a''-a}=0$,

ó
$$d'a''-da''-ad'-a'd''+da'+ad''=0;$$

y entónces los dos valores de y y de z se reducen á $\frac{0}{0}$, como el de x. Pero al paso que el valor de x es *determinado* é igual á $\frac{d'-d}{a'-a}$ ó $\frac{d''-d}{a''-a}$, los de y y de z son *indeterminados*, pues que no se tiene ya entre estas dos incógnitas mas que la ecuacion única

$$by+cz=d-ax=\frac{da'-ad'}{a'-a}.$$

Este caso particular es análogo al del núm. 75, que se refiere á dos ecuaciones del mismo número de incógnitas.

Los ejemplos precedentes bastan para convencer de que si el símbolo $\frac{A}{0}$ denota siempre un sistema de ecuaciones á las que es *imposible* satisfacer, al ménos en números *finitos*, el símbolo $\frac{0}{0}$ es unas veces un

carácter de *indeterminacion*, otras de *absurdidad*. Alguna que otra vez tambien (núm. 73) anuncia la presencia de un factor comun; y lo mejor que se puede hacer para interpretar semejantes resultados es el remontarse á la ecuacion ó ecuaciones que han conducido á ello.

77. Cuando se opera directamente sobre ecuaciones particulares se llega á otros caractéres de absurdidad ó de indeterminacion.

Primer ejemplo. Sean las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x+3y-\ z&=16,\\ 5x-2y+7z&=21,\\ 7x+y\ +6z&=37, \end{aligned}$$

de las que la última resulta de la adicion de las dos primeras miembro á miembro. Calculando D, N, N', N'', con arreglo á las fórmulas generales, y á los principios del núm. 69, se halla sucesivamente D=0, N=0, N'=0, N''=0. De modo que los valores de x, y, z, son todos tres de la forma $\frac{0}{0}$; pero operemos directamente sobre estas ecuaciones.

Si se elimina á z entre la primera y la segunda ecuacion, luego entre la primera y la tercera, con arreglo á los métodos conocidos, se llega á las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 19x+19y&=133,\\ 19x+19y&=133, \end{aligned}$$

de donde, restando de nuevo estas dos ecuaciones una de otra,

$$0=0,$$

igualdad que no espresa nada ni para x ni para y.

Remontando á una de las dos ecuaciones precedentes, que hecha la simplificacion se convierte en

$$x+y=7,$$

se podrán dar á x todos los valores imaginables, lo que suministrará para y valores correspondientes sacados de esta última ecuacion. Transportando estos valores de x y de y á una de las tres ecuaciones propuestas, se obtendrán otros tantos valores correspondientes para z.

Hágase, por ejemplo, $x=1, 2, 3, 4.....$,
y resulta $y=6, 5, 4, 3.....$,