de donde, sustituyendo en la primera ecuacion del sistema dado,

$$z=4,\ 3,\ 2,\ 1.....;$$

y todos estos sistemas, en número infinito, verifican las tres ecuaciones propuestas

El símbolo $\frac{0}{0}$ obtenido en este ejemplo para las tres incógnitas corresponde pues aquí á *una indeterminacion*, así como la igualdad $0=0$, á que se ha llegado operando directamente sobre las ecuaciones.

Segundo ejemplo. Sean las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x+3y-z &=16, \\ 5x-2y+7z&=21, \\ 3x-5y+8z&=12. \end{aligned}$$

Para formar la tercera se ha sustraido la primera de la segunda, añadiendo sin embargo el número 7 al segundo miembro de la ecuacion resultante. Es pues absurdo el sistema, y así calculando los valores de D, N, N′, N″, por medio de las fórmulas generales se obtendrá sucesivamente,

$$D=0,\ N=133,\ N'=133,\ N''=-133,$$

lo que daria para las tres incógnitas valores de la forma $\frac{A}{0}$.

Pero eliminando directamente á z entre la primera y la segunda ecuacion, y luego entre la primera y la tercera, se llegaria á las ecuaciones

$$19x+19y=133,\ \text{y}\ 19x+19y=108;$$

de donde, restando estas ecuaciones una de otra,

$$0=25,$$

igualdad absurda que hace resaltar la incompatibilidad de las ecuaciones propuestas.

Tercer ejemplo. Sean los dos sistemas

$$\left.\begin{aligned} x+9y+6z&=16 \\ 2x+3y+2z&=7 \\ 3x+6y+4z&=13 \end{aligned}\right\}\ (1),\quad \left.\begin{aligned} x+9y+6z&=16 \\ 2x+3y+2z&=7 \\ 3x+6y+4z&=19 \end{aligned}\right\}\ (2).$$

que se pueden considerar como un caso particular del último ejemplo

general discutido en el núm. 76; porque dividiendo ambos miembros de las primeras ecuaciones de cada sistema por 3, y los de las terceras ecuaciones por 2, se obtienen las nuevas ecuaciones

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x+3y+2z&=\tfrac{16}{3}, \\ 2\,x+3y+2z&=\ 7 \\ \tfrac{3}{2}x+3y+2z&=\tfrac{13}{2} \end{aligned}\qquad \text{y}\qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{3}x+3y+2z&=\tfrac{16}{3}, \\ 2\,x+3y+2z&=\ 7 \\ \tfrac{13}{2}x+3y+2z&=\tfrac{19}{2}. \end{aligned}$$

Hay sin embargo entre ambos sistemas la diferencia de que para el primero queda satisfecha la relacion $\frac{d'-d}{a'-a}=\frac{d''-d}{a''-a}$ (del núm. 76) y que no lo queda para el segundo.

Sentado esto, la eliminacion de z entre la primera y la segunda ecuacion, y despues entre la segunda y la tercera del sistema (1), da los dos resultados idénticos, $x=1$, $x=1$. Sustituyendo este valor en las tres ecuaciones del mismo sistema (1), se llega, hecha la reduccion, á las ecuaciones

$$3y+2z=5,\ 3y+2z=5,\ 3y+2z=5,$$

que por la eliminacion de y ó de z dan lugar á la igualdad

$$0=0.$$

Este resultado corresponde á los valores de la forma $\frac{0}{0}$, hallados para tres incógnitas por medio de las fórmulas generales. Es preciso sin embargo tener presente (número 76) que el símbolo $\frac{0}{0}$, obtenido para x, tenia un valor determinado que es aquí $x=1$, y que el mismo símbolo obtenido para y y z indicaba una *indeterminacion.*

Repitiendo los mismos cálculos respecto al sistema (2), se obtiene

$$x=1,\ \text{y}\ x=-5$$

El valor $x=1$ llevado á la primera y segunda ecuacion del sistema (2), da

$$3y+2z=5;$$

y el valor $x=-5$ llevado á la segunda ó tercera ecuacion del mismo sistema

$$3y+2z=17\,;$$

igualdad absurda que corresponde al valor $\frac{0}{0}$ hallado para x, y á los valores de la forma $\frac{A}{0}$ obtenidos para y y para z.

Los resultados $0=0$, $0=A$, á que se llega algunas veces tratando directamente ecuaciones particulares tienen, pues, la misma significacion que los símbolos $\frac{0}{0}$, $\frac{A}{0}$, que se obtienen aplicando las fórmulas generales á ejemplos particulares.

78. Terminaremos la discusion de las ecuaciones de primer grado con el exámen de un caso muy importante. Tal es el en que se supone en las ecuaciones generales que son á la vez nulas todas las cantidades conocidas que se hallan en el segundo miembro. En este caso se sigue evidentemente de la ley de formacion de los numeradores por los valores generales de las incógnitas (núm. 68), que estos numeradores se destruyen al mismo tiempo; es decir que se tiene $A=0$, $B=0$,... Como no existe por otro lado ninguna relacion particular entre los coeficientes a, b, c, a', b', c',... de las incógnitas, el valor de D, que resulta de cierta combinacion de dichos coeficientes, es por lo general diferente de 0. De modo que se tiene *por valores de las incógnitas* $x=0$, $y=0$, $z=0$...; y estos valores verifican evidentemente las ecuaciones propuestas.

Sin embargo si ademas de la hipótesis de que sean nulas á la vez las cantidades conocidas del segundo miembro, se tiene tambien la relacion $D=0$ los valores generales se reducen á la forma $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$, etc...

Digo pues que en este caso son indeterminadas las ecuaciones, pero que las relaciones de las incógnitas son números *determinados* que se pueden obtener con ayuda de las ecuaciones propuestas.

Sean en efecto las tres ecuaciones

$$ax+by+cz=0,\ a'x+by+c'z=0,\ a''x+b''y+c''z=0,$$

en las cuales se supone (núm. 67) que se tiene $D=0$, ó

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0.$$

Pueden ponerse bajo la forma

$$a\frac{x}{z}+b\frac{y}{z}+c=0,\quad a'\frac{x}{z}+b'\frac{y}{z}+c'=0,\quad a''\frac{x}{z}+b''\frac{y}{z}+c''=0.$$

Ahora bien; se saca de las dos primeras, tratando á $\frac{x}{z}$ y á $\frac{y}{z}$ como dos incógnitas,..... $\frac{x}{z}=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}$, $\frac{y}{z}=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}$.

Por lo que se ve que *dando á* z *valores enteramente arbitrarios, se obtendrán los valores de* x *y de* y *con ayuda de estas dos proporciones, cuyas segundas relaciones son constantes é iguales á cantidades conocidas.*

Pero falta saber si estos valores satisfacen á la tercera ecuacion, que se hace entónces una ecuacion condicional. Se halla, pues, sustituyéndolos en esta ecuacion,

$$a''\times\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}+b''\times\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}+c''=0,$$

ó reduciendo y escribiendo los términos en un órden conveniente,

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0\,,$$

condicion que queda satisfecha por hipótesis.

79. Esto nos conduce naturalmente al exámen de una circunstancia de que nos dió ya un ejemplo el segundo problema del testamento, resuelto en el número 49: tal es la que el enunciado de la cuestion conduce á un número de ecuaciones, realmente diferentes, mayor que el de las incógnitas que hay que determinar.

Supongamos para mayor generalidad, que encierra la cuestion n incógnitas, dando lugar á m ecuaciones diferentes; siendo $m>n$. *Es preciso desde luego combinar entre sí un número* n *de las ecuaciones propuestas, para sacar de ellas los valores de las* n *incógnitas; sustituir en seguida estos valores en las* (m—n) *ecuaciones restantes, lo que da lugar á otras tantas relaciones entre los datos; debiendo verificarse estas últimas relaciones, para que sea posible el problema, tal como ha sido enunciado.* Las (m—n) relaciones obtenidas de este modo se llaman *ecuaciones de condicion.*

80. *Recapitulacion de la discusion precedente.* Resulta de esta discusion, 1°. que un sistema de ecuaciones del primer grado de igual número de

incógnitas no puede satisfacerse en general sino de una manera (núm. 67).

2°. Que todo *valor positivo* hallado para una incógnita responde directamente á las ecuaciones del problema sin responder siempre al enunciado (núm. 70).

3°. Que *todo valor negativo* solo responde indirectamente al enunciado ó á las ecuaciones que son su traduccion algebráica, aunque responde siempre á las ecuaciones consideradas en un sentido puramente algebráico (números 59 y 71).

4°. Que *toda espresion de la forma* $\frac{A}{0}$, hallada para una ó muchas incógnitas indica una incompatibilidad en el sistema de ecuaciones propuesto, ó al ménos la imposibilidad de satisfacerlos en números *finitos* para todas las incógnitas (números 72, 74 y 76).

5°. Que el símbolo $\frac{0}{0}$, obtenido para una ó muchas incógnitas, corresponde ya á una indeterminacion, ya á una incompatibilidad (números 72, 74, 75 y 76), ya á la presencia de un factor comun entre los dos términos de cada fraccion que se ha reducido á esta forma (núm. 73).

6°. Que si todos los segundos miembros del sistema de ecuaciones propuesto son *nulos*, los valores se reducen generalmente á 0; que si á esta hipótesis se agrega la de que el denominador comun de los valores de las incógnitas sea 0, el número de los sistemas de valores será *infinito*; aunque quedan sujetos dichos *valores* á tener entre sí relaciones constantes (número 78).

7°. Que cuando el número de las ecuaciones es mayor que el de las incógnitas, no es posible el problema sino en tanto que los valores de las incógnitas determinadas por un número de ecuaciones igual al de las incógnitas, satisfacen á las demas ecuaciones (número 79).

81. Hé aquí los enunciados de nuevos problemas susceptibles de discusion, ó cuya resolucion presenta algun interes:

DÉCIMOCUARTO PROBLEMA. *Un banquero tiene dos especies de moneda; se necesitan* a *piezas de la primera para hacer un escudo; y* b *de la segunda para hacer la misma suma. Llega uno y pide* c *piezas para un escudo. Cuántas piezas de cada especie le tendrá que dar el banquero para pagarle?*

$$\left(\text{Resp.....}\ 1^{a}.\ \text{especie},\ \frac{a(c-b)}{a-b};\ 2^{a}.\ \text{especie},\ \frac{b(a-c)}{a-b}.\right)$$

DÉCIMOQUINTO PROBLEMA. *Hallar los dos lados contiguos de un rectángulo, suponiendo: 1°. que estos dos lados estén entre sí en una relacion dada* m : n; *2°. que si se aumentan ó disminuyen los lados de este rectángulo con cantidades dadas* a *y* b, *se aumente ó disminuya la superficie en la cantidad* p.

$$\left(\text{Suponiendo aumentados los lados, se encuentra}\quad x=\frac{m(p-ab)}{n+mb};\qquad y=\frac{n(p-ab)}{na+mb}.\right)$$

DÉCIMOSESTO PROBLEMA. *Se pide la riqueza de tres personas*, A, B, C, *sabiendo, 1°. que la suma de la riqueza de* A *y* l *veces la riqueza de* B *y* C *es igual á* p; *2°. que la suma de las riquezas de* B *y* m *veces las riquezas de* A *y* C *es igual á* q; *3°. que la suma de la riqueza* C *y* n *veces la riqueza de* A *y* B *es igual á* r.

(Esta cuestion es susceptible de resolverse con bastante sencillez por la introduccion de una incógnita auxiliar en el curso del cálculo: esta incógnita es la suma de las tres riquezas.)

DÉCIMOSÉPTIMO PROBLEMA. *Hallar la riqueza de* 6 *personas* A, B, C, D, E, F, *segun las condiciones siguientes: 1°. la suma de las riquezas de* A *y* B *es* a; *la de las riquezas de* C *y* D *es* b; *la suma de la riqueza de* E *y* F *es* c; *2°. la riqueza de* A *vale* m *veces la de* C; *la riqueza de* D *vale* n *veces la de* E; *la riqueza de* F *vale* p *veces la de* B.

(Este problema puede resolverse por medio de una sola ecuacion y una sola incógnita.)

Hemos tomado los diferentes enunciados anteriores del *Álgebra de M. Lhuillier*, obra recomendable por lo escogido de las cuestiones que pone como ejercicios.