CAPÍTULO III.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS Y ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

82. Introduccion. Cuando el enunciado de un problema conduce á una ecuacion de la forma $ax^2=b$, en la que la incógnita está multiplicada por sí misma, la ecuacion se llama del *segundo grado*, y los principios establecidos en los dos capítulos precedentes son insuficientes para su resolucion; pero como dividiendo los dos miembros por a se obtiene $x^2=\frac{b}{a}$, se sigue que la cuestion se reduce á *hallar un número que, multiplicado por sí mismo, pueda producir el número espresado por* $\frac{b}{a}$; este es el objeto de la *estraccion de la raiz cuadrada.*

Expusimos en nuestra *aritmética*, con todo el detenimiento conveniente, los diversos procedimientos de estraccion de la raíz cuadrada de los números particulares, ya enteros, ya fraccionarios; por lo mismo no nos resta aquí mas que desarrollar las reglas relativas á la estraccion de la raíz cuadrada de las espresiones algebráicas.

§ I. FORMACION DEL CUADRADO Y ESTRACCION DE LA RAÍZ CUADRADA DE LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS.

83. Consideremos primeramente el caso de una cantidad monomia; y para descubrir el procedimiento de la estraccion de la raíz cuadrada, veamos cómo se forma el cuadrado de un monomio.

Con sujecion á las reglas de la multiplicacion de los monomios se tiene

(núm. 16) $$(5a^2b^3c)^2=5a^2b^3c\times5a^2b^3c=25a^4b^6c^2;$$

es decir que para elevar á un monomio al cuadrado, es preciso *elevar su coeficiente al cuadrado, y doblar cada uno de los esponentes de las diferentes letras.* Luego para volver de un monomio cuadrado á su raiz, es preciso: 1°. *estraer la raiz cuadrada del coeficiente, con sujecion á las reglas espuestas en la aritmética;* 2°. *tomar la mitad de cada esponente.*

De modo que se tiene $\sqrt{64a^6b^4}=8a^3b^2$; y en efecto,

$$(8a^3b^2)^2=8a^3b^2\times8a^3b^2=64a^6b^4.$$

Del mismo modo $\sqrt{625a^2b^8c^6}=25ab^4c^3$;

porque $$(25ab^4c^3)^2=625a^2b^8c^6.$$

Resulta de la regla anterior que para que un monomio sea el cuadrado de otro, es preciso que *su coeficiente sea un cuadrado perfecto, y que todos sus esponentes sean pares.* Así $98ab^4$ no es un cuadrado perfecto, porque 98 no es un número cuadrado perfecto, y porque a está afectado de un esponente impar.

En este caso se hace entrar en los cálculos á la cantidad, afectándola del signo $\sqrt{}$, y se la escribe así: $\sqrt{98ab^4}$.

Llámanse esta clase de espresiones, *monomios irracionales*, y mas especialmente, *radicales del segundo grado.*

84. Sin embargo, se puede hacer sufrir á estas espresiones algunas modificaciones fundadas sobre el principio siguiente: *la raiz cuadrada del producto de dos ó mas factores es igual al producto de las raices cuadradas de estos factores;* ó, en lenguaje algebráico,

$$\sqrt{abcd....}=\sqrt{a}.\ \sqrt{b}.\ \sqrt{c}.\ \sqrt{d.....}$$

Para demostrar este principio observemos que segun la definicion de a raíz cuadrada de un número, se tiene

$$(\sqrt{abcd....})^2=abcd....$$

Por otra parte,

$$(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c...})^2=(\sqrt{a})^2\,(\sqrt{b})^2.\,(\sqrt{c})^2...=abc...$$

Luego, pues, que los cuadrados de $\sqrt{abcd....}$ y de $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ $\sqrt{d}$.... son iguales, tambien lo son estas cantidades.

Sentado esto, la espresion anterior, $\sqrt{98ab^4}$ puede ponerse bajo la forma $\sqrt{49b^4 \times 2a} = \sqrt{49b^4} \times \sqrt{2a}$.

Pero $\sqrt{49b^4}$ se reduce (núm. 83) á $7b^2$; luego

$$\sqrt{98ab^4} = 7b^2, \sqrt{2a}.$$

Se tiene igualmente

$$\sqrt{45a^2b^5c^2d} = \sqrt{9a^2b^2c^2 \times 5bd} = 3abc.\ \sqrt{5bd},$$

$$\sqrt{864a^2b^5c''} = \sqrt{144a^2b^4c^{10} \times 6bc} = 12ab^2c^5.\ \sqrt{6bc}.$$

En general para simplificar un monomio irracional, *pónganse en evidencia todos los factores cuadrados perfectos, y estráigaseles la raíz (núm. 83); colóquese despues el producto de todas estas raíces delante del signo radical, debajo del cual se dejarán ademas los factores no cuadrados perfectos.*

En las espresiones $7b^2\sqrt{2a}$, $3abc\sqrt{5bd}$, $12ab^5c^5\sqrt{6bc}$, las cantidades $7b^2$, $3abc$, $12ab^2c^5$, se llaman *los coeficientes del radical.*

85. Hasta ahora no hemos hecho caso del signo de que puede hallarse afectado el monomio. Sin embargo, puesto que la resolucion de las cuestiones nos conduce á considerar cantidades monomias precedidas del signo + ó del signo —, es preciso saber cómo se ha de operar sobre esta especie de cantidades. Siendo, pues, el cuadrado de un monomio el producto de este monomio por sí mismo, síguese (núm. 62) que, *cualquiera que sea su signo, es positivo el cuadrado de este monomio;* así el cuadrado de $+5a^2b^5$ ó de $-5a^2b^5$ es $+25a^4b^6$.

De donde puede ya concluirse que, *si un monomio es positivo, su raiz cuadrada puede indiferentemente hallarse afectada del signo + ó del signo —;* así $\sqrt{9a^4} = \pm 3a^2$; porque $+3a^2$ ó $-3a^2$, elevado al cuadrado, da igualmente $+9a^4$. El doble signo ± con que se afecta la raíz se enuncia ó lee *mas ó ménos.*

Si el monomio propuesto es *negativo*, es imposible la estraccion de su raíz, pues se acaba de ver que el cuadrado de toda cantidad, positiva ó negativa, és esencialmente positivo. De modo que $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-4a^2}$, $\sqrt{-5}$, son símbolos algebráicos que representan operaciones imposibles. Designaselos con el nombre de *cantidades* ó mejor de *espresiones imaginarias*: símbolos de absurdidad que se encuentran á cada paso en la resolucion de los problemas del segundo grado.

Sin embargo, por estension, se hacen sufrir á dichos símbolos las mismas simplificaciones que á las espresiones irracionales que ofrecen operaciones ejecutables.

Así es como

$$\sqrt{-9} \text{ equivale (núm. 84) á } \sqrt{9}.\ \sqrt{-1}, \text{ ó } 3\sqrt{-1};$$

del mismo modo, $\sqrt{-4a^2} = \sqrt{4a^2}.\ \sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$,

$$\sqrt{-8a^2b} = \sqrt{4a^2 \times -2b} = 2a\ \sqrt{-2b} = 2a\ \sqrt{2b}.\ \sqrt{-1}.$$

86. Veamos ahora de descubrir para el cuadrado de un polinomio cualquiera, *una ley de formacion* de la cual podamos deducir un procedimiento para la estraccion de la raíz cuadrada.

Vimos ya (núm. 19) que el cuadrado de un binomio, $a+b$, es igual á $a^2+2ab+b^2$.

Supongamos actualmente que haya que formar el cuadrado de un trinomio $a+b+c$. Designemos por un momento $a+b$ por una sola letra s; sale

$$(a+b+c)^2 = (s+c)^2 = s^2+2sc+c^2.$$

Se tiene, pues,

$$s^2 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,\ 2sc = 2(a+b)c = 2ac+2bc.$$

Luego $(a+b+c)^2 = a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$; es decir que *el cuadrado de un trinomio se compone de la suma de los cuadrados de los tres términos, y de los dobles productos de estos términos multiplicados dos á dos.*

Digo que esta *ley de composicion* es aplicable á un polinomio cualquiera. En efecto, supongámosla demostrada para un polinomio de un número cualquiera de términos; y probemos que puede estenderse á un polinomio que encierre un término mas.

Para conseguirlo, sea $a+b+c+d+\ldots\ldots+i+k$, un polinomio compuesto de $m+1$ términos; y designemos por s la suma de los m primeros términos, $a+b+c+d+\ldots\ldots+i$; $s+k$ representará el polinomio propuesto, y se tiene $(s+k)^2 = s^2+2sk+k^2$, ó volviendo á poner en lugar de s su valor

$$(s+k)^2 = (a+b+c+d+\ldots\ldots+i)^2 + 2(a+b+c+d\ldots\ldots+i)\,k + k^2.$$

Así pues la primera parte de esta espresion se compone por hipótesis, *de los cuadrados de todos los términos del primer polinomio y de los dobles productos de todos estos términos multiplicados dos á dos*; la segunda parte encierra *todos los dobles productos de los términos del primer polinomio por el nuevo término introducido* k; en fin la tercera parte *es el cuadrado de este término*. Luego, *la ley de composicion* ántes enunciada es tambien verdadera para el nuevo polinomio. Luego si ha sido reconocida verdadera para un trinomio, tiene lugar para un polinomio de cuatro términos; y siéndolo para *cuatro* lo es tambien necesariamente para *cinco*, y así sucesivamente. Luego es general dicha ley.

Puede enunciarse la *ley* de otra manera: *El cuadrado de un polinomio encierra el cuadrado del primer término, mas el doble producto del primer término por el segundo, mas el cuadrado del segundo; mas los dobles productos de cada uno de los dos primeros términos por el tercero, mas el cuadrado del tercero; mas los dobles productos de cada uno de los tres primeros términos por el cuarto, mas el cuadrado del cuarto; y así sucesivamente.* Este enunciado que está incluido en el primero, nos conducirá mas fácilmente al procedimiento de la estraccion de la raíz cuadrada de un polinomio.

Se hallará, segun esta ley,

$$(5a^3-4ab^2)^2=25a^6-40a^4b^2+16a^2b^4;$$

$$(3a^2-2ab+4b^2)^2=9a^4-12a^3b+4a^2b^2+24a^2b^2-16ab^3+16b^4;$$

ó reduciendo $$9a^4-12a^3b+28a^2b^2-16ab^3+16b^4$$

$$(5a^2-4abc+6bc^2-3a^2c)^2=25a^4b^2-40a^3b^2c+76a^2b^2c^2$$

$$-48ab^2c^3+36b^2c^4-30a^4bc+24a^3bc^2-36a^2bc^3+9a^4c^2.$$

Pasemos á la estraccion de la raíz cuadrada.

87. Designemos por N el polinomio cuya raíz es preciso obtener, y por R esta raíz, que supondremos por el momento determinada; concibamos ademas que estos dos polinomios estén ordenados con relacion á las potencias descendentes de una de las letras que encierran, *a* por ejemplo.

Sentado esto, observo primeramente que los dos primeros términos de N (suponiéndolo ordenado) pueden dar sobre la marcha el primero y segundo término de R; en efecto, resulta evidentemente de la ley de formacion del cuadrado (núm. 86), 1°. *que el cuadrado del primer término de* R *encierra un esponente de la letra* a, *mayor que ninguna de las otras*

partes que entran en la composicion del cuadrado de R; 2°. *que el doble producto del primer término de* R *por el segundo encierra tambien un esponente mas elevado que en las partes siguientes.*

De modo que como las dos partes de que acabamos de hablar no han podido reducirse con las demas, son necesariamente los dos términos de N afectados del esponente mas alto de *a*, y del esponente inmediatamente inferior. De lo que se sigue que, si N es realmente un cuadrado perfecto, 1°. *su primer término debe ser un cuadrado perfecto, y la raiz de este término estraida segun el procedimiento del número* 83, *es el primer término de* R; 2°. *su segundo término debe ser divisible por el doble del primer término de* R; *y efectuando esta division se tiene por cociente el segundo término de* R.

Para poder obtener los términos siguientes *formemos el cuadrado del binomio ya hallado, y restémosle de* N; la resta, que designamos por N, encierra tambien los dobles productos del primer término de R por el tercero, del segundo término de R por el tercero, mas una serie de otras partes.

Pero *el doble producto del primer término por el tercero debe encerrar la* a *con un esponente mayor que en las partes siguientes*, y no puede, por consiguiente, haber sido reducido con ellas. Luego este doble producto es el primer término de N′; así que *este primer término debe ser divisible por el doble del primer término de* R; *y si se efectúa dicha division, el cociente es el tercer término de* R.

Para obtener nuevos términos *es preciso formar los dobles productos del primer término y del segundo por el tercero, mas el cuadrado del tercero, y restar despues todos estos productos de la resta* N′, lo que da una resta N″ que encierra tambien el doble producto del primer término de R por el cuarto mas una serie de otras partes. Mas se probará como anteriormente que *el primer término de* N″ *es necesariamente el doble producto del primer término de* R *por el cuarto; de modo que dividiendo el primer término de* N″ *por el doble del primer término de* R, *se tiene por cociente el cuarto término de* R; y así sucesivamente.

Nota. Es absolutamente indispensable, despues de haber obtenido los dos primeros términos de la raíz, sustraer el cuadrado del binomio encontrado, del polinomio N; porque el cuadrado del segundo término de R encierra ordinariamente la *a* con el mismo esponente que en el doble producto del primer término por el tercero; por consiguiente, ha debido reducirse con este doble producto. De manera que solo despues de haber sustraido este cuadrado del polinomio N, es cuando puede asegurarse que el primer término de la resta es igual al doble producto del primer término de R por el tercero. Igual observacion se aplica á los tres, cuatro..... primeros términos hallados.

Dejamos á los discípulos estudiosos el cuidado de deducir de los precedentes razonamientos el procedimiento general de la estraccion de la raíz cuadrada de un polinomio; bastaríales para ello reunir todas las partes que van de *letra itálica* en la regla. Vamos ahora á hacer su aplicacion á un ejemplo particular.

Supongamos que se haya propuesto estraer la raíz cuadrada del polinomio

$$49a^2b^3-24ab^3+25a^4-30a^3b+16b^4.$$

$$\begin{array}{l|l}
25a^4-30a^3b+49a^2b^2-24ab^3+16b^4 & 5a^2-3ab+4b^2 \\
-25a^4+30a^3b-\ \ 9a^2b^2 & \overline{10a^2} \\
\hline
1^a.\ \text{resta}\ldots\ldots\ 40a^2b^2-24ab^3+16b^4 & \\
\qquad\qquad -40a^2b^2+24ab^3-16b^4 & \\
\hline
2^a.\ \text{resta}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0 &
\end{array}$$

Despues de haber ordenado el polinomio relativamente á a, se estrae la raíz cuadrada de $25a^4$ lo que da $5a^2$ que se escribe á la derecha del polinomio; se divide despues el segundo término $-30a^3b$ por $10a^2$, doble de $5a^2$ (se escribe $10a^2$ debajo de $5a^2$); el cociente es $-3ab$ que se coloca á la derecha de $5a^2$. Los dos primeros términos de la raíz son pues $5a^2-3ab$. Cuadrando este binomio se halla $25a^4-30a^3b+9a^2b^2$, que, sustraido del polinomio propuesto, da una resta cuyo primer término es $40a^2b^2$, dividiendo este primer término por $10a^2$, doble de $5a^2$, se obtiene por cociente, $+4b^2$; este es el tercer término de la raíz, que se escribe á la derecha de los dos primeros términos. Formando el doble producto de $5a^2-3ab$ por $4b^2$, y el cuadrado de $4b^2$, se halla $40a^2b^2-24ab^3+16b^4$, polinomio que sustraido de la primera resta, da 0 por resta final. De modo que $5a^2-3ab+4b^2$ es la raíz pedida, ó mas bien (número 81) uno de los valores de la raíz pedida. El otro valor es $-5a^2+3ab-4b^2$, y se le obtendria escribiendo $-5a^2$ por la raíz cuadrada de $+25a^4$, dividiendo despues $-30a^3b$ por $-10a^2$, y continuando la operacion como arriba. Pero es mas sencillo, así que se ha obtenido la primera, escribir en seguida para la segunda, $-(5a^2-3ab+4b^2)$.

Los principiantes pueden ejercitarse en los cuadrados desarrollados en el número 86.

88. Si el polinomio propuesto contuviese muchos términos afectados de la misma potencia de la letra principal, seria preciso disponer el polinomio como se prescribió para la division (núm. 29); despues aplicar el anterior procedimiento, considerando como una sola y misma parte

la suma algebráica de los términos afectados de la misma potencia, y reemplazando en el enunciado de este procedimiento, las palabras *primer término* del polinomio, *primer término* de la resta, *primer término, segundo término...* de la raíz, por las espresiones: *primera parte* del polinomio, ó *parte afectada de la mas alta potencia; primera parte* de la resta, *primera, segunda.... parte* de la raíz. Por lo demas rara vez se presentan esta clase de ejemplos.

89. Concluiremos con las observaciones siguientes:

1°. Un binomio no puede ser jamas un cuadrado perfecto, pues sabemos que el cuadrado del polinomio mas sencillo, es decir de un binomio, contiene tres partes distintas que no pueden esperimentar reduccion alguna entre sí. Así la espresion a^2+b^2 no es cuadrado; le falta el término $\pm ab$ para ser el cuadrado de $a\pm b$.

2°. Para que un trinomio ordenado sea un cuadrado perfecto, es preciso que sean cuadrados los dos términos estremos, y que el del medio sea el doble producto de las raíces cuadradas de los otros dos. Entónces la raíz del trinomio puede obtenerse inmediatamente. *Estráiganse las raices de los dos términos estremos, y afectense las dos raices del mismo signo ó de signos contrarios, segun que el término medio sea positivo ó negativo. Compruébese en seguida si el doble producto de estas dos raices da el término medio del trinomio.*

Así,
$$9a^6-48a^4b^2+64a^2b^4$$

tiene por raíz cuadrada, $\sqrt{9a^6}-\sqrt{64a^2b^2}$, ó $3a^3-8ab^2$;

porque
$$3a^3\times-16ab^2=-48a^4b^2$$

$4a^2+12ab-9b^2$ no puede ser un cuadrado perfecto, aunque $4a^2$ y $9b^2$ sean los cuadrados de $2a$ y de $3b$, y $12ab=2a\times6b$; pero $-9b^2$ no es un cuadrado.

3°. Cuando en la serie de operaciones de que es susceptible el procedimiento general, el primer término de una de las restas no es exactamente divisible por el doble del primer término de la raíz, puede concluirse de aquí que el polinomio propuesto no es un cuadrado perfecto. Lo que es una consecuencia evidente de los razonamientos que hemos hecho para llegar á este procedimiento.

4°. En fin, cuando haya lugar puede aplicarse á las raíces cuadradas de los polinomios *no cuadrados perfectos*, las simplificaciones del número 84.

Sea por ejemplo la espresion $\sqrt{a^3b+4a^2b^2+4ab^3}$.

La cantidad de debajo del radical no es un cuadrado perfecto; pero

puede ponerse bajo la forma $ab(a^2+4ab+4b^2)$. Mas el factor entre paréntesis es evidentemente el cuadrado de $a+2b$; de donde puede concluirse (número 84)

$$\sqrt{a^3b+4a^2b^2+4ab^3}=(a+2b)\sqrt{ab}\,.$$

90. *Cálculo de los radicales del segundo grado.* Como la estraccion de la raíz cuadrada da orígen á nuevas espresiones algebráicas, tales como $\sqrt{a}$, $3\sqrt{b}$, $7\sqrt{2}$, conocidas bajo el nombre de *cantidades irracionales* ó de *radicales del segundo grado*, es preciso establecer reglas para efectuar sobre estas espresiones las cuatro operaciones fundamentales.

Definicion. Dos radicales del segundo grado se llaman *semejantes* cuando la cantidad que está debajo del radical es la misma para ambos radicales.

Así, $3a\sqrt{b}$ y $5c\sqrt{b}$, $9\sqrt{2}$ y $7\sqrt{2}$, se llaman *radicales semejantes.*

Adicion y sustraccion. Para sumar ó restar radicales semejantes, *se suman ó restan los coeficientes, y despues se afecta la suma ó la diferencia, con el radical comun;* de modo que se tiene

$3a\sqrt{b}+5c\sqrt{b}=(3a+5c)\sqrt{b}$, $3a\sqrt{b}-5c\sqrt{b}=(3a-5c)\sqrt{b}$; del mismo modo

$$7\sqrt{2a}+3\sqrt{2a}=10\sqrt{2a},\ 7\sqrt{2a}-3\sqrt{2a}=4\sqrt{2a}\,.$$

Dos radicales pueden al principio no ser semejantes, y llegar á serlo por las simplificaciones del núm. 84.

Por ejemplo

$$\sqrt{48ab^2}+b\sqrt{75a}=4b\sqrt{3a}+5b\sqrt{3a}=9b\sqrt{3a}\,;$$

$$2\sqrt{45}-3\sqrt{5}=6\sqrt{5}-3\sqrt{5}=3\sqrt{5}\,.$$

Si los radicales no son semejantes, no se hace mas que indicar la adicion ó la sustraccion. Así para sumar $3\sqrt{b}$ con $5\sqrt{a}$, se escribe simplemente $5\sqrt{a}+3\sqrt{b}$.

Multiplicacion. Para multiplicar dos radicales entre sí, *se multiplican una por otra las dos cantidades comprendidas bajo el signo radical, y se afecta el producto con el signo radical comun.*

Así $$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}\,:$$

que es el principio del núm. 84, enunciado en un órden diverso.

Si hay coeficientes *se empieza por multiplicarlos entre sí, y se escribe el producto delante del radical.*

Por ejemplo, $3\sqrt{5ab}\times4\sqrt{20a}=12\sqrt{100a^2b}=120a\sqrt{b}$,

$$2a\sqrt{bc}\times3a\sqrt{bc}=6a^2\sqrt{b^2c^2}=6a^2bc,$$

$$2a\sqrt{b^2+b^2}\times-3a\sqrt{a^2+b^2}=-6a^2(a^2+b^2).$$

Division. Para dividir dos radicales uno por otro, *dividanse las dos cantidades comprendidas debajo del signo, una por otra, y aféctese el cociente del signo radical comun.*

Así $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

En efecto, los cuadrados de estas dos espresiones son iguales á la misma cantidad $\frac{a}{b}$; luego son iguales estas dos espresiones.

Si hay coeficientes, *se escribe su cociente como coeficiente del radical.* Por ejemplo,

$$5a\sqrt{b}:2b\sqrt{c}=\frac{5a}{2b}\sqrt{\frac{b}{c}},$$

$$12ac\sqrt{6bc}:4c\sqrt{2b}=3a\sqrt{\frac{6bc}{2b}}=3a\sqrt{3c}.$$

91. Existen *dos transformaciones* de un uso frecuente en la valuacion numérica de los radicales.

La primera consiste en hacer pasar debajo del radical el coeficiente de este radical. Sea por ejemplo, la espresion $3a\sqrt{5b}$; se observa que equivale (núm. 90) á $\sqrt{9a^2}\times\sqrt{5b}$, ó $\sqrt{9a^2 5b}=\sqrt{45a^2b}$.

De modo que *para hacer pasar debajo del signo de un radical al coeficiente del mismo, basta elevar el coeficiente al cuadrado.*

Hé aqui el uso principal de esta transformacion :

Supongamos que haya que valuar, *con diferencia de una unidad* la espresion $6\sqrt{13}$. Como 13 no es un cuadrado perfecto, no puede obtenerse mas que un valor aproximado de su raíz. Esta es igual á 3 mas una cierta fraccion; pero multiplicándola por 6, se tiene 18, mas el producto de la fraccion por 6; pudiendo el resultado total tener una parte entera mayor que 18. A fin de determinar exactamente esta parte entera, se pone $6\sqrt{13}$ bajo la forma $\sqrt{6.^2 13} = \sqrt{36\times 13} = \sqrt{468}$.

Así, pues, la raíz cuadrada de 468 tiene á 21 por parte entera; luego

$6\sqrt{13}$ es igual á 21 mas una fraccion que no puede determinarse exactamente.

Se hallará del mismo modo que $12\sqrt{7} = 31$ mas una fraccion.

La *segunda transformacion* tiene por objeto hacer racionales los denominadores de espresiones tales como $\frac{a}{p+\sqrt{q}}$, $\frac{a}{p-\sqrt{q}}$, en que a, p son números enteros cualesquiera, así como q, que se supone ahora *no cuadrado perfecto*. Se llega muchas veces á esta especie de espresiones en la resolucion de los problemas del segundo grado.

Se consigue esto, pues, multiplicando los dos términos de la fraccion por $p-\sqrt{q}$ si el denominador es $p+\sqrt{q}$ y por $p+\sqrt{q}$ si el denominador es $p-\sqrt{q}$.

En efecto, como la suma de *dos cantidades* multiplicada por *su diferencia* da (núm. 6) por producto la *diferencia de los cuadrados*, se tiene para la multiplicacion indicada,

$$\frac{a}{p+\sqrt{q}} = \frac{a(p-\sqrt{q})}{(p+\sqrt{q})(p-\sqrt{q})} = \frac{a(p-\sqrt{q})}{p^2-q} = \frac{ap-a\sqrt{q}}{p^2-q},$$

$$\frac{a}{p-\sqrt{q}} = \frac{a(p+\sqrt{q})}{(p-\sqrt{q})(p+\sqrt{q})} = \frac{a(p+\sqrt{q})}{p^2-q} = \frac{ap+a\sqrt{q}}{p^2-q},$$

espresiones cuyo denominador es racional.

Para dar una idea de la utilidad de esta transformacion, supongamos que haya que valuar aproximadamente la espresion

$$\frac{7}{3-\sqrt{5}}.$$

Equivale á $\frac{7(3+\sqrt{5})}{9-5}$, ó bien á $\frac{21+7\sqrt{5}}{4}$.

Pero $7\sqrt{5}$ es lo mismo que $\sqrt{49\times 5}$, ó $\sqrt{245}$, cantidad cuyo valor es 15, *con diferencia de ménos de una unidad.* Así

$$\frac{7}{3-\sqrt{5}} = \frac{21+15+\text{una fraccion}}{4} = \frac{36}{4} \text{ con diferencia de } \tfrac{1}{4}.$$

Si se quisiese tener un valor mas exacto de esta espresion, *bastaría calcular* $\sqrt{245}$ *con cierto grado de aproximacion, sumar* 21 *con la raíz obtenida, y dividir despues la suma por* 4, *ó tomar su cuarta parte.*

Tomemos por segundo ejemplo la espresion

$$\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$$

y propongamos valuarla con diferencia de 0, 01.

Se tiene $\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{5}(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{11-3} = \frac{7\sqrt{55}-7\sqrt{15}}{8}$;

de modo que $7\sqrt{55} = \sqrt{55\times 49} = \sqrt{2695} = 51{,}91$, con dif. de 0,01,

y $7\sqrt{15} = \sqrt{15\times 49} = \sqrt{735} = 27{,}11$;

luego, $\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}} = \frac{51{,}91-27{,}11}{8} = \frac{24{,}80}{8} = 3{,}10$, con dif. de $\frac{1}{100}$,

y hasta de $\frac{1}{800}$, á causa de la division por 8.

Se halará por un procedimiento análogo,

$$\frac{3+2\sqrt{7}}{5\sqrt{12}-6\sqrt{6}} = 3;16 \text{ con diferencia de } 0{,}81.$$