NOTA Se podrian calcular esta especie de espresiones valuando aproximadamente cada uno de los radicales que entran tanto en el numerador como en el denominador. Pero como no se obtendria un valor exacto del denominador, no se formaria con tanta facilidad una idea previa del grado de aproximacion obtenido; al paso que por el medio indicado, haciendo *racional* al denominador, se sabe desde luego á qué atenerse sobre el grado de aproximacion.

Establecidos los principios de la raíz cuadrada de los números particulares y de las cantidades algebráicas, podemos ya pasar á la resolucion de los problemas del segundo grado.

---

§ II. RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

92. Se distinguen dos especies de ecuaciones de segundo grado, las ecuaciones de *dos términos ó incompletas*, y las ecuaciones de *tres términos ó completas*.

Las primeras son las que no contienen mas que términos afectados del cuadrado de la incógnita, y términos enteramente conocidos; tales son las ecuaciones

$$3x^2=5,\ 4x^2-7=3x^2+9,\ \frac{1}{3}x^2-3+\frac{5}{12}x^2=\frac{7}{24}-x^2+\frac{299}{24}.$$

Llámaselas ecuaciones de *dos términos*, porque á favor de las dos transformaciones generales de los números 43 y 44, se las puede siempre reducir á la forma

$$ax^2=b.$$

En efecto consideremos la tercera ecuacion, que es la mas complicada; se tiene primeramente, suprimiendo los denominadores,

$$8x^2-72+10x^2=7-24x^2+299,$$

y despues, reduciendo, $42x^2=378$.

Las ecuaciones de *tres términos ó completas* son las que, ademas del

cuadrado de la incógnita, contienen la primera potencia de dicha incógnita. Tales son las ecuaciones

$$5x^2-7x=34,\ \frac{5}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=8-\frac{2}{3}x-x^2+\frac{273}{12};$$

pueden estas reducirse siempre á la forma $ax^2+bx=c$, por medio de las dos transformaciones ya citadas.

Observacion. Muchas veces una ecuacion en apariencia del primer grado, resulta elevada al segundo despues de la desaparicion de los denominadores.

Sea por ejemplo la ecuacion $\frac{5-2x}{3+x}=\frac{4x}{2-x}$;

si se suprimen los denominadores, se convierte en

$$(5-2x)(2-x)=4x(3+x),$$

ó, efectuando los cálculos y reduciendo,

$$2x^2+21x=10.$$

En general siempre que x entre en los denominadores de una ecuacion no puede juzgarse del grado de ella sino despues de haber hecho desaparecer los denominadores (núm. 44) y operado todas las reducciones.

93. *Ecuacion de dos términos....* $ax^2=b$.

La resolucion de esta ecuacion no presenta dificultad alguna.

Se deduce de ella primeramente

$$x^2=\frac{b}{a}. \qquad (2).$$

Sentado esto, si $\frac{b}{a}$ es un número positivo, entero ó fraccionario, podrá obtenerse su raíz cuadrada, ya sea exactamente, ya por aproximacion, con arreglo á los procedimientos espuestos en aritmética; y si $\frac{b}{a}$ es algebráico, se le aplicarán los procedimientos de la raíz cuadrada de las cantidades algebráicas. El resultado obtenido en cada caso espresará un valor de x á propósito para verificar la ecuacion (2).

Pero si se observa que como el cuadrado de $+m$ ó de $-m$ es igualmente $+m^2$ (núm. 85), se puede tomar indiferentemente el resultado de que acabamos de hablar, ya con el signo $+$, ya con el signo $-$, pebe concluirse que la ecuacion (2) tiene realmente dos soluciones representadas por

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

(el doble signo $\pm$ se pronuncia *mas* ó *ménos*.)

En efecto, sustituyamos separadamente en la ecuacion (1) en lugar de x cada uno de los valores $+\sqrt{\frac{b}{a}}$, $-\sqrt{\frac{b}{a}}$; y sale

$$a\times\left(+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=b, \text{ ó } a\times\frac{b}{a}=b, \text{ ó } b=b,$$

$$\text{y } a\times\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=b, \text{ ó } a\times\frac{b}{a}=b, \text{ ó } b=b.$$

Es evidente por otra parte que estos valores son los únicos que pueden satisfacer la ecuacion (2), y por consiguiente la ecuacion (1).

Nota. Cuando $\frac{b}{a}$ es una cantidad negativa, los dos valores de x son imaginarios (núm. 85); lo que justifica que la ecuacion, ó el problema de que es traduccion algebráica, no puede ser satisfecho por ningun número, ya sea exacta ya aproximadamente.

Sea por ejemplo la ecuacion

$$\frac{1}{3}x^2-3+\frac{5}{12}x^2=\frac{7}{24}-x^2+\frac{299}{24};$$

se ha reconocido ya (núm. 92) que esta cuestion se reduce á

$$42x^2=378$$

luego $$x^2=\frac{378}{42}=9, \text{ y } x=\pm 3.$$

Sea aun la ecuacion $3x^2=5$;

de ella se deduce $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}=\pm\frac{1}{3}\sqrt{15}.$

Como 15 no es un cuadrado perfecto, no se pueden determinar estos dos valores de x sino por aproximacion.

94. *Ecuacion completa.....* $ax^2+bx=c$.

Para resolver esta ecuacion dividamos ambos miembros por el coeficiente de x^2, y pongamos, para mayor sencillez

$$\frac{b}{a}=p, \quad \frac{c}{a}=q,$$

con lo que sale $$x^2+px=q. \qquad (1)$$

Sentado esto, observemos que si se pudiese reducir el primer miembro, x^2+px, al cuadrado de un binomio, una simple estraccion de raíz cuadrada reduciria la ecuacion á otra del primer grado. Comparando pues este primer miembro con el cuadrado del binomio $(x+a)$ es decir con $x^2+2ax+a^2$, se ve que x^2+px se compone del cuadrado de un primer término x, mas del doble producto de x por un segundo término que es entónces necesariamente $\frac{p}{2}$ (pues se tiene $px=2\frac{p}{2}x$).

De donde se sigue que si se añade á x^2+px el cuadrado de $\frac{p}{2}$ ó $\frac{p^2}{4}$, el primer miembro de la ecuacion se convertirá en $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$.

Pero para no turbar la igualdad es preciso añadir $\frac{p^2}{4}$ al segundo miembro, y sale por esta trasformacion:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}+q; \qquad (2)$$

de donde, estrayendo la raíz cuadrada,

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}.$$

(Se pone aquí el doble signo $\pm$ por la razon de que el cuadrado de $+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$, ó de $-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$, es igualmente $\frac{p^2}{4}+q$).

Sacando en fin el valor de x, se obtiene

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}.$$

Como es evidente por otro lado segun la ecuacion (2), que solo $+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$, ó $-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$, pueden representar el valor de $x+\frac{p}{2}$, se sigue necesariamente que

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q},\ \text{ó}\ -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

son los *únicos valores* de x que puedan verificar la ecuacion (2), y por consiguiente la propuesta (1) de que no es mas que una transformada la ecuacion (2).

Así la incógnita de toda ecuacion del segundo grado tiene *dos valores y no puede tener mas.*

Puede establecerse ademas la siguiente regla general para resolver una ecuacion completa del segundo grado :

Despues de haber reducido la ecuacion á la forma $x^2+px=q$, *añádase á ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de* x, *ó del segundo término; estráigase la raiz cuadrada de los dos miembros teniendo cuidado de afectar la raíz del segundo miembro con el doble signo* $\pm$; *y sáquese finalmente el valor de* x *de esta nueva ecuacion.*

El doble valor de x á que se llega por este medio puede enunciarse así en el lenguaje ordinario : es igual á *la mitad del coeficiente de* x, *tomado como signo contrario, mas ó ménos la raíz cuadrada de la suma algebráica del cuadrado de la mitad del coeficiente de* x *y del término conocido.*

Sea, como primer ejemplo, la ecuacion

$$\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=8-\frac{2}{3}x-x^2+\frac{273}{12}.$$

Se encuentra desde luego, suprimiendo los denominadores,

$$10x^2-6x+9=96-8x-12x^2+273,$$

ó trasponiendo y reduciendo,

$$22x^2+2x=360,$$

y

$$x^2+\frac{2}{22}x=\frac{360}{22}.$$

Añadamos ahora $\left(\frac{1}{22}\right)^2$ á ambos miembros; la ecuacion se convierte en

$$x^2+\frac{2}{22}x+\left(\frac{1}{22}\right)^2=\frac{360}{22}+\left(\frac{1}{22}\right)^2;$$

de donde, estrayendo la raíz cuadrada,

$$x+\frac{1}{22}=\pm\sqrt{\frac{360}{22}+\left(\frac{1}{22}\right)^2};$$

luego

$$x=-\frac{1}{22}\pm\sqrt{\frac{360}{22}+\left(\frac{1}{22}\right)^2};$$

resultado conforme al anterior enunciado.

Falta ahora efectuar los cálculos numéricos.

Reduzcamos primeramente $\frac{360}{22}+\left(\frac{1}{22}\right)^2$ á un solo número que tenga á $(22)^2$ por denominador comun; y se tiene

$$\frac{360}{22}+\left(\frac{1}{22}\right)^2=\frac{360\times22+1}{(22)^2}=\frac{7921}{(22)^2};$$

de modo que la raíz cuadrada de 7921 es exacta é igual á 89; luego

$$\sqrt{\frac{360}{22}+\left(\frac{1}{22}\right)^2}=\frac{89}{22},$$

y por consiguiente, $x=-\frac{1}{22}\pm\frac{89}{22}$.

Separemos cada uno de los valores; sale

$$x=-\frac{1}{22}+\frac{89}{22}=\frac{88}{22}=4,$$

$$x=-\frac{1}{22}-\frac{89}{22}=\frac{90}{22}=-\frac{45}{11}.$$

Así de los dos valores propios para satisfacer á la ecuacion propuesta el uno es un número entero absoluto, y el otro uno fraccionario negativo.

Sea, como segundo ejemplo, la ecuacion

$$6x^2-37x=-57,$$

que se reduce á $x^2-\frac{37}{6}x=-\frac{57}{7}$.

Si se añade $\left(\frac{37}{12}\right)^2$ á ambos miembros, sale

$$x^2-\frac{57}{6}x+\left(\frac{37}{12}\right)^2=-\frac{57}{6}+\left(\frac{37}{12}\right)^2;$$

de donde estrayendo la raíz cuadrada,

$$x-\frac{37}{12}=\pm\sqrt{-\frac{57}{6}+\left(\frac{37}{12}\right)^2};$$

luego $$x=\frac{37}{12}\pm\sqrt{-\frac{57}{6}+\left(\frac{37}{12}\right)^2}.$$

Para reducir $\left(\frac{37}{12}\right)^2-\frac{57}{6}$ á un solo número, observemos que $(12)^2=12\times12=6\times24$; de suerte que basta multiplicar 57 por 24, despues 37 por sí mismo, dividiendo el esceso del segundo producto sobre el primero por $(12)^2$.

Pero, $37\times37=1369$, $57\times24=1368$;

asi $$\left(\frac{37}{12}\right)^2-\frac{57}{6}=\frac{1}{(12)^2}$$

Luego $x=\frac{37}{12}\pm\frac{1}{12}$, ó bien $\begin{cases} x=\frac{37}{12}+\frac{1}{12}=\frac{38}{12}=\frac{19}{6}, \\ x=\frac{37}{12}-\frac{1}{12}=\frac{36}{12}=3. \end{cases}$

Adviértase en este ejemplo que cada uno de los valores es positivo y responde directamente al enunciado de la cuestion, de que la ecuacion propuesta puede considerarse como la traduccion algebráica.

Sea ahora la ecuacion literal

$$4a^2+2x^2+2ax=18ab-18b^2,$$

se tiene primeramente, trasponiendo, cambiando los signos y dividiendo en seguida por 2, $x^2-ax=2a^2-9ab+9b^2$;
de donde, completando el cuadrado,

$$x^2-ax+\frac{a^2}{4}=\frac{9a^2}{4}-9ab+9b^2$$

estrayendo la raíz y trasponiendo,

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{9a^2}{4}-9ab+9b^2}.$$

Pero $\frac{9a^2}{4}-9ab+9b^2$ tiene evidentemente por raíz á $\frac{3a}{2}-3b$; luego

$x=\frac{a}{2}\pm\left(\frac{3a}{2}-3b\right)$, de donde $\begin{cases} x=2a-3b, \\ x=-a+3b. \end{cases}$

Estos dos valores serán positivos á la vez si se tiene $2a>3b$ y $3b>a$, es decir, si siendo a y b positivos ambos, es b mayor que $\frac{a}{3}$, pero menor que $\frac{2a}{3}$.

Propondremos como ejercicios las ecuaciones

$$x^2-7x+10=0\ldots\ldots \text{ valores } \left\{\begin{matrix} x=2 \\ x=5 \end{matrix}\right\};$$

$$\frac{1}{3}x-4-x^2+2x-\frac{4}{5}x^2=45-3x^2+4x \left\{ \begin{array}{l} x=\ \ 7,12 \\ x=-5,73 \end{array} \right\} \text{con diferencia de } 0{,}01$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2+b^2-2bx+x^2=\dfrac{m^2x^2}{n^2}\ldots\ldots, \qquad \text{da} \\ x=\dfrac{n}{n^2-m^2}(bn\pm\sqrt{a^2m^2+b^2m^2-a^2n^2}). \end{array} \right\}$$

95. Puede resolverse la ecuacion $ax^2+bx=c$ sin hacer desaparecer el coeficiente de x^2; pero son mas complicadas las transformaciones.

El término ax^2 puede ponerse bajo la forma $(x\sqrt{a})^2$, y el término bx bajo esta : $2x\sqrt{a}\times\frac{b}{2\sqrt{a}}$; de donde se sigue que ax^2+bx representa los dos primeros términos del cuadrado de $x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$; de modo que añadiendo $\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$ ó $\frac{b^2}{4a}$ á ambos miembros, se convertirá al primer miembro en un cuadrado perfecto.

Efectuemos esta transformacion, y se convierte la ecuacion en

$$ax^2+bx+\frac{b}{4a}=c+\frac{b^2}{4a};$$

estrayendo la raíz, $x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}=\pm\sqrt{c+\frac{b^2}{4a}}$;

de donde $$x\sqrt{a}=-\frac{b}{2\sqrt{a}}\pm\sqrt{c+\frac{b^2}{4a}}.$$

Dividiendo ambos miembros por $\sqrt{a}$, y observando

1º. que $\frac{b}{2\sqrt{a}}:\sqrt{a}=-\frac{b}{2(\sqrt{a})^2}=-\frac{b}{2a}$,

2º. que $\sqrt{c+\frac{b^2}{4a}}:\sqrt{a}=\sqrt{\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}}$ (núm. 90),

se obtiene en fin $$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}},$$

ó bien; $$x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac+b^2}}{2a},$$

resultado á que se llega mas fácilmente poniendo desde luego la ecuacion bajo la forma $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a}$; habiendo espuesto solamente nosotros el método precedente como un mero ejercicio de cálculo sobre los radicales del segundo grado.

96. Apliquemos estos principios á la resolucion de algunos problemas.

Primer problema. Hallar un número tal que el doble de su cuadrado, aumentado del triplo de este número dé por suma 65.

Sea x el número desconocido; se tiene, para la ecuacion del problema

$$2x^2+3x=65,$$

de donde $$x=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{65}{2}+\frac{9}{16}}=-\frac{3}{4}\pm\frac{23}{4};$$

luego $$x=-\frac{3}{4}+\frac{23}{4}=5, \text{ y } x=-\frac{3}{4}-\frac{23}{4}=-\frac{13}{2}.$$

El primer valor satisface á la cuestion en el sentido de su enunciado. En efecto,

$$2\times(5)^2+3\times5=2\times25+15=65.$$

Para interpretar el segundo observemos ante todo que si se reemplaza x por $-x$ en la ecuacion $2x^2+3x=65$, solo cambia de signo el coeficiente de $3x$, porque $(-x)^2=x^2$. De manera que en vez de obtener $x=-\frac{3}{4}\pm\frac{23}{4}$ se hallará $x=\frac{3}{4}\pm\frac{23}{4}$, ó $x=\frac{13}{2}$ y $x=-5$, valores que no difieren de los precedentes sino por el signo. Así es que puede decirse que la solucion negativa $-\frac{13}{2}$, considerada independientemente de su signo, satisface al nuevo enunciado : *Hallar un número tal que el doble de su cuadrado, disminuido del triplo de este mismo número dé* 65 *por diferencia.* En efecto, se tiene

$$2\times\left(\frac{13}{2}\right)^2-3\times\frac{13}{2}=\frac{169}{2}-\frac{39}{2}=65.$$

SEGUNDO PROBLEMA. *Una persona ha comprado cierto número de varas de paño por 240 fr. Si con la misma suma hubiese adquirido 3 varas ménos, esta le hubiera costado 4 fr. mas. Se pregunta el número de varas compradas.*

Sea x este número; $\frac{240}{x}$ espresa entónces el precio de la vara. Si por 240 fr. adquiria 3 varas ménos, es decir $x-3$ varas, estaria representado en este caso el precio de la vara por $\frac{240}{x-3}$. Pero segun el enunciado, este último precio escede al primero en 4; se tiene pues la ecuacion

$$\frac{240}{x-3}-\frac{230}{x}=4,$$

de donde, suprimiendo el denominador y reduciendo se saca

$$x^2-3x=180.$$

Luego $$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+180}=\frac{3\pm27}{2};$$

lo que da $$x=15 \text{ y } x=-12.$$

El valor $x=15$ satisface al enunciado; porque 15 varas por 240 fr. dan $\frac{240}{15}$ ó 16 fr. para el precio de la vara; y 12 varas por 240 fr. dan para el precio de la vara 20 fr., número que escede á 16 en 4.

En cuanto á la segunda solucion puede formarse un nuevo enunciado al que convenga. En efecto, subamos á la ecuacion, y cambiemos x en $-x$; sale

$$\frac{240}{-x-3}-\frac{240}{-x}=4, \text{ ó bien } \frac{240}{x}-\frac{240}{x+3}=4,$$

ecuacion que puede traducirse en lenguaje ordinario de dos maneras diferentes: 1°. *Una persona ha comprado cierto número de varas de paño por 240 fr.; si hubiese pagado la misma suma por 3 varas de mas, le hubieran costado estas á 4 fr. ménos. Se pregunta el número de varas compradas?*

2°. *Una persona ha vendido cierto número de varas de paño por 240 fr.; si por la misma suma hubiese vendido 3 varas mas, le hubieran pagado á 4 fr. ménos. Se pregunta el número de varas vendidas?*

Este último enunciado se refiere acaso mas inmediatamente al cambio del signo de x, pues que una compra negativa puede considerarse como una venta.

Resolviendo ademas la ecuacion de uno de estos enunciados se hallaria evidentemente $x=12$, $x=-15$: porque la ecuacion reducida se convertiria en $x^2+3x=180$, en lugar de $x^2-3x=180$.

NOTA. Los dos problemas precedentes ofrecen una nueva confirmacion del principio establecido en el núm. 59 para los problemas del primer grado; y daremos de ellos una demostracion (núm. 99) para toda ecuacion del segundo grado con una sola incógnita.

TERCER PROBLEMA. *Un negociante descuenta dos billetes, el uno de 8776 fr. pagadero á los 9 meses, el otro de 7488 fr. pagadero á los 8 meses; paga por el primero mas que por el segundo, 1200 fr. Se pregunta el tanto de interes á que han debido descontarse?*

Solucion. Para hacer mas sencillos los cálculos, designemos por x el interes de 100 fr. por un mes, ó por $12x$ el interes de un año; $9x$ y $8x$ son los intereses de 9 y de 8 meses; luego $100+9x$ y $100+8x$ representan lo que debe ser el capital 100 fr. al cabo de 9 y de 8 meses. De modo que para determinar los *valores actuales* de los dos billetes de 8776 fr. y 7488 fr. es preciso establecer las proporciones

$$100+9x:100::8776:\frac{877600}{100+9x},$$

$$100+8x:100::7488:\frac{748800}{100+8x};$$

espresando los cuatro términos de estas proporciones lo que ha pagado el negociante por cada billete. Luego en virtud del enunciado, se tiene la ecuacion

$$\frac{877600}{100+9x}-\frac{748800}{100+8x}=1200;$$

de donde observando que los dos miembros son divisibles por 400,

$$\frac{2194}{100+9x}-\frac{1872}{100+8x}=3.$$