Suprimiendo los denominadores y reduciendo se halla

$$216x^2+4396x=2200;$$

de donde $$x=-\frac{2198}{216}\pm\sqrt{\frac{2200}{216}+\frac{(2198)^2}{(216)^2}}.$$

Luego $$x=\frac{-2198\pm\sqrt{5306404}}{216}$$

ó multiplicando por 12, $$12x=\frac{-2198\pm\sqrt{5306404}}{18}.$$

Para obtener el valor $12x$ con diferencia de 0,01, basta estraer la raiz cuadrada de 5306404 con diferencia de 0,01, pues esta raiz debe dividirse en seguida por 18.

La raiz cuadrada de 5306404 es 2303, 5;

luego $$12x=\frac{-2198\pm2303,5}{18};$$

por consiguiente, $$12x=\frac{105,5}{18}=5,86,$$

y $$12x=\frac{-4501,5}{18}=-250,08.$$

El valor positivo, $12x=5$, 86, representa pues el interes buscado.

Por lo que respecta á la solucion negativa, no puede considerarse sino como ligada á la primera por una misma ecuacion del segundo grado. En efecto, si se volviese á la ecuacion y se cambiase x en $-x$, se traduciria con mucha dificultad la nueva ecuacion en un enunciado análogo al del problema propuesto.

Cuarto problema. *Un hombre compra un caballo que vende al cabo de algun tiempo por 24 doblones. En esta venta pierde tanto por ciento del precio de compra como le habia costado el caballo. Se pregunta el precio de la compra?*

Solucion. Sea x el número de doblones que le costó el caballo; $x-24$ es una espresion de lo que ha perdido. Pero puesto que, segun el enunciado, pierde tantos doblones sobre 100 como unidades hay en x, sobre

1 doblon, perderá $\frac{x}{100}$, y sobre x doblones pierde $\frac{x^2}{100}$. Se tiene pues la ecuacion

$$\frac{x^2}{100}=x-24,$$

de donde $x^2-100x=-2400$,

y $$x=50\pm\sqrt{2500-2400}=50\pm10.$$

Luego $$x=60 \text{ y } x=40.$$

Estos dos valores satisfacen igualmente á la cuestion.

En efecto, supongamos primeramente que sea 60 el precio de la compra; como 24 es el precio de la venta, 36 será la pérdida que esperimenta el hombre. Por otro lado, en virtud del enunciado debe perder 60 por 100 de 60, es decir los $\frac{60}{100}$ de 60, ó $\frac{60\times60}{100}$, número que se reduce á 36; así que 60 satisface al enunciado.

Sea ahora 40 el precio de la compra; 16 es la pérdida que esperimenta. Por otra parte, debe perder 40 por 100 de 40, ó $40\times\frac{40}{100}$, número que se reduce á 16; de modo que 40 verifica tambien el enunciado.

Discusion general de la ecuacion de segundo grado.

Hasta ahora solo hemos resuelto problemas de segundo grado, cuyos datos se espresaban por números particulares. Pero para hallarse en estado de resolver problemas generales y de interpretar todos los resultados á que se puede llegar atribuyendo á los datos valores particulares, es preciso tomando otra vez la ecuacion mas general del segundo grado, examinar las circunstancias que resultan de todas las hipótesis posibles hechas sobre los coeficientes. Tal es el objeto que nos proponemos.

97. Pero ántes de entrar en esta discusion, haremos conocer un hecho analítico que no es al cabo mas que un caso particular de una proposicion cuya generalidad demostraremos en lo sucesivo para toda ecuacion de un grado cualquiera de una sola incógnita.

Sea la ecuacion general

$$x^2+px=q\text{, ó mejor } x^2+px-q=0,$$

para la cual se encuentra (núm. 94)

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}, \qquad x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q},$$

Transportemos al primer miembro todos los términos de estas dos últimas igualdades, lo que da

$$x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}=0, \qquad x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}=0;$$

y multipliquemos estas nuevas igualdades, miembro á miembro, observando que los primeros miembros pueden considerarse el uno como la diferencia, y el otro como la suma de las dos cantidades

$$x+\frac{p}{2} \text{ y } \sqrt{\frac{p^2}{4}+q};$$

sale
$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}+q\right)=0,$$

ó reduciendo,
$$x^2+px-q=0.$$

Por donde se ve que *el primer miembro de toda ecuacion del segundo grado* reducida previamente á la forma $x^2+px-q=0$, *es el producto de dos factores del primer grado* en x, que tienen á x por parte comun, y por parte *no comun á cada uno de los valores de x cambiados de signo;* de manera que si se designan por x', x'' estos dos valores, se tiene la identidad

$$x^2+px-q=(x-x')(x-x'').$$

Esta es probablemente la propiedad que ha hecho dar el nombre de *raices* á los valores de la incógnita (porque obtenidos estos valores se puede recomponer la ecuacion).

En general se llama *raiz* de una ecuacion á toda espresion numérica ó algebráica, real ó imaginaria, que *sustituida en lugar de la incógnita en la ecuacion, hace al primer miembro idénticamente igual al segundo.* Esta

palabra se toma aquí en una acepcion diferente de la que se le habia atribuido hasta ahora con relacion á los números.

98. La propiedad precedente puede demostrarse tambien por un medio susceptible de conducir á consecuencias muy importantes.

Llamemos a á una cantidad de naturaleza cualquiera, y dividamos por $x-a$ el primer miembro de la ecuacion

$$x^2+px-q=0.$$

$$x^2+px-q \left\{ \frac{x-a}{x+a+p} \right.$$

1ª. resta..... $+(a+p)x-q$,

2ª. resta..... $+a^2+pa-q$.

La division del primer término x^2 del dividendo por el primer término x del divisor da por cociente x, y por 1ª. resta $(a+p)x-q$; la division del primer término $(a+p)x$ de esta resta por x, da por nuevo cociente $a+p$; y por nueva resta a^2+pa-q, cantidad independiente de x.

Sentado esto, si a es raiz de la ecuacion $x^2+px-q=0$, se tiene necesariamente $a^2+pa-q=0$; de modo que como la 2ª. resta de la division anterior es nula, es exacta la division total, y el *primer número de la ecuacion propuesta es divisible por* x−a.

Recíprocamente, si la division de x^2+px-q por $x-a$ es exacta, se tiene necesariamente $a^2+pa-q=0$, es decir que a es raiz de la ecuacion.

Como en el caso en que a es raiz, $x-a$ divide exactamente á x^2+px-q, y da por cociente $x+a+p$, recíprocamente $x+a+p$ divide exactamente á x^2+px+q, y da por cociente $x-a$; de lo que se puede concluir que la cantidad $-a-p$ es tambien una raiz de la propuesta.

Así la identidad $x^2+px-q=(x-a)(x+a+p)$ demuestra la propiedad del núm. 97.

Hé aquí ahora las consecuencias:

Se acaba de ver que si a es raiz de la ecuacion $x^2+px-q=0$, $-a-p$ es la segunda raiz de esta ecuacion.

De modo que, 1°. si se suman las dos cantidades a, $-a-p$, sale por resultado $-p$.

2°. La relacion $a^2+pa-q=0$ se convierte en esta

$$a(-a-p)=-q.$$

Por donde se ve que *en toda ecuacion del segundo grado*, reducida á la

forma $x^2+px-q=0$, *el coeficiente* p *del segundo término, tomado como signo contrario, es igual á la suma algebráica de las raices; y el último término* $-$q *es igual al producto de estas mismas raices.*

Esto es por lo demas lo que puede comprobarse directamente sobre los valores obtenidos en el núm. 93.

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q},\quad x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}.$$

Adicionando estas dos igualdades miembro á miembro, se halla

$$x'+x''=-p;$$

y multiplicándolas,

$$x'x''=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}+q\right)=-q.$$

Nota. Conviene que no se pierda de vista que todas estas propiedades suponen que la ecuacion ha sido reducida á la forma $x^2+px-q=0$; es decir, 1°. que se ha dividido toda la ecuacion por el coeficiente de x^2; 2°. que todos los términos han sido traspuestos y ordenados en el primer miembro.

Discusion.

99. Tomemos de nuevo la ecuacion general $x^2+px=q$, la cual resuelta da

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}.$$

Para que esta espresion que contiene un radical, pueda valuarse, ya exactamente, ya por aproximacion, es preciso (núm. 85) que la cantidad sometida al signo radical, es decir $q+\frac{p^2}{4}$, sea positiva. Pero siendo $\frac{p^2}{4}$ positivo necesariamente, cualquiera que sea el signo de p, se sigue que el de la cantidad $q+\frac{p^2}{4}$ depende principalmente del de q, ó de la cantidad conocida.

Sentado esto, *sea desde luego positivo* q.

En cuyo caso la ecuacion es de la forma $x^2\pm px=+q$ (se ponen aquí en evidencia los signos de los coeficientes):

y se deduce de ellos $x=\mp\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$.

Es pues visible que los dos valores de x serán siempre reales y podrán determinarse, ya sea exactamente si $q+\frac{p^2}{4}$ es un cuadrado perfecto, ya con el grado de aproximacion que se desee.

Sin embargo, de estos dos valores el *primero será positivo* y responderá directamente á la ecuacion (ó al problema); porque como el radical $\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$ es necesariamente mayor que $\frac{p}{2}$, la espresion $\pm\frac{p}{2}+\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$ es necesariamente del mismo signo que el radical.

El segundo valor es por la misma razon *esencialmente negativo*, pues que debe tener el mismo signo que el de que está afectado el radical. Considerado independientemente de su signo, este valor responde, no ya á la ecuacion tal como ha sido establecida, sino á aquella en que se hubiere reemplazado x por x, es decir

$$x^2\mp px=q.$$

En efecto, esta da $x=\pm\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{2}}$,

valores que no difieren de los precedentes sino en el signo.

Es notable por otra parte que la misma ecuacion ligue entre sí dos cuestiones cuyos enunciados difieran sin embargo por el sentido de ciertas condiciones. (Véanse los dos primeros problemos del número 96.)

Sea ahora q *negativo.*

En cuyo caso la ecuacion es de la forma $x^2\pm px=-q$,

y da $$x=\mp\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Para que pueda efectuarse la estraccion de la raíz, *es preciso tener*

$$q\sqrt{\frac{p^2}{4}}.$$

Satisfecha esta condicion, los dos valores *son reales.*

Como por otro lado $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ es numéricamente menor que $\frac{p}{2}$, se sigue que estos valores son *ambos á dos negativos* si p es positivo en la ecuacion, es decir, si esta ecuacion es de la forma $x^2+px=-q$.

Siendo *ambos á dos positivos* si p es negativo, es decir, si la ecuacion es de la forma $x^2-px=-q$.

Las propiedades del núm. 98 conducen al mismo resultado. En efecto sean a y b las dos raíces de la ecuacion de segundo grado

$$x^2+px=q;$$

se tiene entre estas raíces y los coeficientes las relaciones

$$a+b=-p,\ ab=-q.$$

Sentado esto, si q es *positivo* en el segundo miembro, y por consiguiente *negativo* en el primero, se sigue que las dos raíces son de *signos contrarios*, pues que es negativo su producto. Por otra parte, su suma algebráica es *negativa* ó *positiva* segun que p es positivo ó negativo; lo que significa que de dos raíces la mayor *numéricamente* es de signo contrario al coeficiente p.

Si por el contrario q es *negativo* en el segundo miembro, y por consiguiente positivo en el primero, como el producto de las dos raíces es entónces positivo, es preciso necesariamente que sean *del mismo signo*, á saber: ambas á dos *negativas* cuando p es positivo, y ambas á dos *positivas* cuando p es negativo.

100. El caso en que las dos raíces son positivas merece una atencion particular.

Siendo entónces la ecuacion de la forma

$$x^2-px=-q,$$

se convierte, por un simple cambio de signo, en

$$px-x^2=q,\ \text{ó}\ x(p-x)=q,$$

y puede considerarse como la traduccion algebraica de este problema:

Dividir un número dado p *en dos partes cuyo producto sea igual á otro número dado* q (se suponen aquí p y q números absolutos.)

En efecto, como x designa una de las partes, $p-x$ es la espresion

de la otra parte, y $x(p-x)$ la espresion de su producto, que, por hipótesis, debe ser igual á q.

Sentado esto, como la ecuacion es siempre la misma, ya se designe por x la parte mayor ya la menor, se sigue que no debe dar una de las partes mas bien que la otra; debe pues darlas ambas á la vez. Esto esplica porqué admite la ecuacion *dos soluciones directas.*

Sin embargo, para que sean reales los dos valores de x, es decir para que sea posible el problema, es preciso tener

$$q\sqrt{\frac{p^2}{4}}.$$

Y en efecto, sean las que quieran las dos partes buscadas, se puede siempre designar su diferencia por d; y como su suma es p, se tendrá (núm. 4) para las espresiones de estas dos partes,

$$\frac{p}{2}+\frac{d}{2}\ \text{y}\ \frac{p}{2}-\frac{d}{2}.$$

Efectuando el producto de estas operaciones, se halla (núm. 5)

$$\frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4},$$

cantidad esencialmente menor que $\frac{p^2}{4}$, á ménos de suponer $d=0$; en cuyo caso son iguales ambas partes, y su producto es $\frac{p^2}{4}$. Es pues absurdo exigir que el producto que se habia por otro lado representado por q, sea mayor que $\frac{p^2}{4}$.

De aquí resulta esta consecuencia:

El mayor producto que se puede obtener descomponiendo un número absoluto en dos partes, y multiplicando estas dos partes entre sí es el cuadrado de la mitad del número.

Sea por ejemplo 56 el número que se ha de dividir:

Se tiene

$$56=36+20,\ \text{y}\ 36\times20=720;$$
$$56=31+25,\ \text{y}\ 37\times25=775;$$
$$56=29+27,\ \text{y}\ 29\times27=783;$$
$$56=28+28,\ \text{y}\ 28\times28=784.$$

Se ve aquí que cuanto menor es la diferencia de las dos partes, mayor es su producto; llegando este á su *máximum* cuando son iguales ambas partes.

Exámen de algunos casos particulares.

101. 1°. Si cuando q es negativo, es decir cuando la ecuacion es de la forma $x^2+px=-q$ (siendo p de un signo cualquiera) se pone q igual á $\frac{p^2}{4}$, el radical $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ de los dos valores de x se hace nulo, y estos valores se reducen ambos á $x=-\frac{p}{2}$.

Se dice entónces *que son iguales las dos raices.*

En efecto, si se sube á la ecuacion, y se reemplaza en ella q por $\frac{p^2}{4}$, se convierte en $x^2+px=-\frac{p^2}{4}$, de donde se saca

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=0, \text{ ó } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0.$$

En este caso el primer miembro es el *producto* de *dos factores iguales.* Se puede pues decir tambien que son iguales las raíces de la ecuacion, pues entónces los dos factores igualados á cero dan el mismo valor para x.

2°. Si en la ecuacion general $x^2+px=q$ se supone $q=0$, los dos valores de x se reducen á

$$x=-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}, \text{ ó } x=0, \quad \text{y á } x=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}, \text{ ó } x=-p.$$

Y en efecto la ecuacion entónces es de la forma $x^2px+=0$, ó $x(x+p)=0$, ecuacion que se puede verificar, ya poniendo $x=0$, ya $x+p=0$, de donde $x=-p$.

3°. Si en la ecuacion general $x^2+px=q$, se supone $p=0$, resulta $x^2=q$, de donde $x=\pm\sqrt{q}$;
es decir que en este caso *los dos valores* de x son iguales *y de signos contrarios, reales* si q es positivo, *é imaginarios si negativo.*

La ecuacion vuelve á entrar en la clase de las ecuaciones de dos términos (núm. 93.)

4°. Supongamos á la vez $p=0$, $q=0$;

la ecuacion se convierte en $x^2=0$, y de para x dos valores *nulos.*

102. Nos resta examinar un caso singular que se encuentra muchas veces en las *aplicaciones*, particularmente en la *geometria analítica.*

Para esto es preciso volver á tomar la ecuacion $ax^2+bx=c$.

Resuelta, esta ecuacion da $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$.

Supongamos ahora que, con arreglo á una hipótesis particular hecha sobre los datos de la cuestion, se tenga $a=0$;

la espresion de x se convierte en $x=\frac{-b\sqrt{b}}{0}$, de donde $\begin{cases} x=\frac{0}{0}, \\ x=-\frac{2b}{0}. \end{cases}$

El segundo valor se presenta bajo la forma del *infinito*, y puede mirarse como una respuesta si la cuestion propuesta puede admitir *soluciones* de esta clase (núm. 72.)

En cuanto á la primera $\frac{0}{0}$, es preciso ver de interpretarla.

Si nos remontamos ante todo á la ecuacion, se ve que la hipótesis $a=0$ la reduce a $bx=c$; de donde $x=\frac{c}{b}$, espresion *finita* y *determinada* que debe mirarse en el caso actual como la que representa el verdadero valor de $\frac{0}{0}$.

Ahora bien, este valor $\frac{c}{b}$ puede deducirse de la espresion

$$\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a},$$

por medio de una transformacion conveniente. A este efecto multipli-

quemos ambos términos de esta espresion por $-b-\sqrt{b^2+4ac}$; y se convierte en

$$\frac{b^2-(b^2+4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2+4ac})},\ \text{ó}\ \frac{-4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2+4ac})},$$

ó suprimiendo el factor $2a$ comun á los dos términos,

$$\frac{-2c}{-b-\sqrt{b^2+4ac}}.$$

Sin embargo, la hipótesis $a=0$, introducida en esta última espresion la reduce á $\frac{-2c}{-2b}$, ó $\frac{c}{b}$, resultado hallado arriba.

(Esta transformacion ha tenido por objeto hacer resaltar en ambos términos el factor a cuya presencia habia reducido la espresion á la forma $\frac{0}{0}$).

Supóngase á la vez $a=0$, $b=0$. Los dos valores de x toman ambos la forma $\frac{0}{0}$.

Si nos remontamos pues á la ecuacion misma, se reconoce que queda reducida á $c=0$, y que no puede ser satisfecha por ningun valor finito de x, miéntras c no sea *nulo*.

Pero digo que en este caso son *infinitos* los dos valores de x.

En efecto como el primero, $x=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$,

se reduce desde luego á $\frac{c}{b}$, por la hipótesis $a=0$,

se convierte en $\frac{c}{0}$ cuando se le une la hipótesis $b=0$.

Por lo que toca al segundo $x=\frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$,

ciendo esperimentar á esta espresion la misma transformacion que á

la primera, es decir, multiplicando ambos términos por $-b+\sqrt{b^2-4ac}$, y suprimiendo en seguida el factor $2a$ comun á los dos términos, se la cambia en esta:

$$\frac{-2c}{-b+\sqrt{b^2+4ac}},$$

espresion que se reduce tambien á $-\frac{2c}{0}$, por la doble hipótesis $a=0$, $b=0$.

En fin, cuando se supone al mismo tiempo $a=0$, $b=0$, $c=0$, los dos valores de x se presentan bajo la formo $\frac{0}{0}$, sin que pueda transformacion alguna conducir á valores determinados de x. Y en efecto, como la ecuacion se reduce entónces á $0=0$, es del todo *indeterminada*.

Este es el único caso de indeterminacion que presenta la ecuacion del segundo grado.

Se puede llegar á las consecuencias precedentes por medio de un análisis mucho mas simple, que tendrá por otra parte la ventaja de aplicarse en lo sucesivo á ecuaciones de cualquier grado.

Volvamos á la ecuacion $ax^2+bx=c$,

y pongamos $x=\frac{1}{y}$;

resulta $\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}=c$, ó bien $cy^2-by-a=0$

(suprimiendo los denominadores y trasponiendo).

Sentado esto, sea primeramente $a=0$; esta última ecuacion se convierte en

$$cy^2-by=0,$$

y da dos valores, $x=0$, $y=\frac{b}{c}$.

Sustituyendo estos valores en la relacion $x=\frac{1}{y}$, se deduce de ellos

$$x=\frac{1}{0},\quad x=\frac{c}{b}.$$