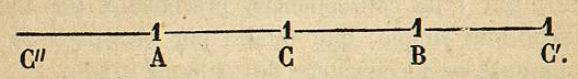
Si ademas de la hipótesis $a=0$, se tiene tambien $b=0$, el valor $x=\frac{c}{b}$ se convierte igualmente en $\frac{c}{0}$.

Y en efecto, la ecuacion $cy^2-by-a=0$, se reduce en esta doble hipótesis á $cy^2=0$, ecuacion cuyas dos raíces son iguales á 0. De modo que los correspondientes valores de x son *infinitos* ambos á dos.

En cuanto al caso en que se tiene al mismo tiempo $a=0$, $b=0$, $c=0$, la ecuacion $cy^2-by-a=0$, se reduce á $0=0$, como la ecuacion $ax^2+bx=c$, y admite *una infinidad* de valores para y, de donde resulta una infinidad de valores para x.

Vamos ahora á aplicar los principios de esta discusion general á diversos problemas que darán lugar á todas las circunstancias que se pueden encontrar en los problemas del segundo grado.

Problema de las luces.



103. Quinto problema. *Hallar en la línea que une dos luces* A *y* B *de intensidades diferentes el punto en que alumbran igualmente.*

(Se supone conocido el principio de física, de que *Las intensidas relativas de una misma luz en dos distancias diferentes, están en razon inversa de los cuadrados de las distancias.*)

Solucion. Llamemos a la distancia AB de las dos luces, b la intensidad de la luz A, á la unidad de distancia, c la intensidad de la luz B á la misma distancia.

Sea por otra parte C el punto buscado; y hagamos $AC=x$, de donde $BC=a-x$.

Pero en virtud del principio de física, siendo b la intensidad de A á la distancia de 1, su intensidad á las distancias 2, 3, 4,... es $\frac{b}{4}, \frac{b}{9}, \frac{b}{16}$... y se sigue que á la distancia x debe espresarse por $\frac{b}{x^2}$. Se tiene del mismo modo para la intensidad relativa de B á la distancia $a-x$, $\frac{c}{(a-x)^2}$,

pero segun el enunciado deben ser iguales estas dos intensidades; así que se tiene la ecuacion

$$\frac{b}{x^2}=\frac{c}{(a-x)^2},$$

de donde se saca, desarrollando y reduciendo,

$$(b-c)\,x^2-2abx=-a^2b.$$

Luego
$$x=\frac{ab\pm\sqrt{a^2b^2-a^2b\,(b-c)}}{b-c},$$

ó reduciendo
$$x=\frac{a\,(b\pm\sqrt{bc})}{b-c},$$

espresion que se simplifica todavía si se observa,

1°. Que $b\pm\sqrt{bc}$ puede ponerse bajo la forma

$$\sqrt{b}.\ \sqrt{b}\pm\sqrt{b}.\ \sqrt{c},\ \text{ó}\ \sqrt{b}.\,(\sqrt{b}\pm\sqrt{c});$$

2°. Que $\quad b-c=(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2=(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c}).$

De modo que considerando primeramente el signo superior de la espresion anterior, se tiene

$$x=\frac{a\sqrt{b}.\,(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})\,(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

Se obtiene igualmente para el segundo valor,

$$=x\frac{a\sqrt{b}\,(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})\,(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{b}}.$$

Por lo demas estos valores simplificados podrian obtenerse inmediatamente de la ecuacion propuesta. En efecto, la ecuacion

$$\frac{b}{x^2}=\frac{c}{(a-x)^2}\ \text{se reduce á}\ \frac{(a-x)^2}{x^2}=\frac{c}{b}.$$

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
"ALFONSO REYES"
625 MONTERREY, MEXICO

Si se extrae, pues, la raíz cuadrada de ambos miembros, sale

$$\frac{a-x}{x}=\pm\sqrt{\frac{c}{b}}=\frac{\pm\sqrt{c}}{\sqrt{b}};$$

de donde, suprimiendo los denominadores y trasponiendo,

$$a\sqrt{b}-x\sqrt{b}=\pm x\sqrt{c}\text{; luego } x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}.$$

NOTA. Se han obtenido al principio los valores bajo una forma mas complicada porque ha sido resuelta la ecuacion por el método general, que es ménos simple que el precedente.

Discutamos ahora los dos valores simplificados. Se tiene

$$\left.\begin{array}{ll} 1^{\circ}.\ldots\ldots & x=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \\ 2^{\circ}.\ldots\ldots & x=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}, \end{array}\right\}\text{ de donde se saca }\left\{\begin{array}{l} a-x=\dfrac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \\ a-x=\dfrac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}, \end{array}\right.$$

Sea desde luego b>c.

El PRIMER VALOR de x, $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, es positivo y menor que a, porque $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ es una fraccion; de modo que este valor da por punto igualmente alumbrado un punto C, situado entre los puntos A y B. Se ve ademas que este punto está mas cercano á B que á A; porque á causa de $b>c$, se tiene

$\sqrt{b}+\sqrt{b}$; ó $2\sqrt{b}>\sqrt{b}+\sqrt{c}$, de donde $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}>\frac{1}{2}$, y por consiguiente $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}>\frac{a}{2}$. Y así debe ser, pues que se supone la intensidad de A mayor que la de B.

El valor correspondiente de $a-x$, $\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, es positivo y menor que $\frac{a}{2}$, como es fácil de comprobar.

El SEGUNDO VALOR de x, $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ es tambien positivo, pero mayor que a; porque se tiene $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}>1$.

Este segundo valor da pues un segundo punto C′ situado sobre la prolongacion de A B, y á la derecha de las dos luces.

Concibese en efecto que difundiéndose las luces en todos sentidos, debe haber sobre la prolongacion de A B otro punto igualmente iluminado; el cual se hallará mas cercano á la luz B cuya intensidad es la menor.

Puede reconocerse *a posteriori* la razen por que estos dos valores están ligados por la misma ecuacion. Si en vez de tomar AC para la incógnita x se toma AC′, resulta BC′$=x-a$;

de modo que se tiene la ecuacion $\frac{b}{x^2}=\frac{c}{(x-a)^2}$.

Pero como $(x-a)^2$ es idéntico á $(a-x)^2$, la nueva ecuacion es la misma que la ya establecida, y por consiguiente no debe dar á AC mas bien que AC′.

El segundo valor de $a-x$, $\frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ es negativo, lo que debe ser así, pues que se tiene $x>a$; pero cambiando los signos de la ecuacion

$$a-x=\frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

se halla

$$x-a=\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}};$$

representando este valor de $x-a$ el valor absoluto de B C′.

Sea $b<c$.

El PRIMER VALOR de x, $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, es siempre positivo, y menor que $\frac{a}{2}$, pues que se tiene

$$\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{b}+\sqrt{b}>2\sqrt{b}.$$

El valor correspondiente de $a-x$, $\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, es positivo y mayor que $\frac{a}{2}$.

Así que en la hipótesis que se considera el punto C, situado entre los puntos A y B, debe hallarse mas cercano á A que á B.

El SEGUNDO VALOR de x, $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, ó $\frac{-a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{b}}$ es esencialmente negativo.

Para interpretarlo, cambiemos x en $-x$ en la ecuacion; y se convierte en

$$\frac{b}{x^2}=\frac{c}{(a+x)^2}.$$

Pero espresando al principio $a-x$ la distancia de B al punto buscado, debe espresar ahora $a+x$ esta misma distancia; lo cual exige que el punto buscado se halle á la izquierda de A, en C'' por ejemplo. Y en efecto, como la intensidad de la luz B es por hipótesis mayor que la de A, el segundo punto buscado debe hallarse mas cercano á A que á B.

El valor correspondiente de $a-x$, ó $\frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, ó $\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}$, es positivo; lo que depende de que siendo x negativo, $a-x$ espresa realmente una *suma aritmética*.

Sea $b=c$.

Los dos primeros valores de x y de $a-x$ se reducen á $\frac{a}{2}$; lo que da

el medio de AB para el primer punto igualmente alumbrado. Este resultado es conforme á la hipótesis.

Los otros dos valores se reducen á $\frac{a\sqrt{b}}{0}$ ó se hacen *infinitos*; es decir que el segundo punto igualmente iluminado se halla situado á una distancia de los puntos A y B mayor que ninguna cantidad asignable. Resultado que responde perfectamente á la presente hipótesis; porque si se supone que la diferencia $b-c$, sin ser enteramente nula, es en estremo pequeña, existirá el segundo punto igualmente alumbrado, pero á una gran distancia de ambas luces; que es lo que indica la espresion $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, cuyo denominador es en estremo pequeño respecto al numerador; y finalmente, cuando se supone $b-c$, ó $\sqrt{b}-\sqrt{c}=0$, no puede existir el punto buscado, ó se debe hallar situado á una distancia *infinita*.

Observemos de paso, que en el caso de $b=c$, si se considerasen los valores no simplificados,

$$x=\frac{a(b+\sqrt{bc})}{b-c} \text{ y } x=\frac{a(b-\sqrt{bc})}{b-c},$$

el primero, que corresponde á $x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, se convertiria en $\frac{2ab}{0}$, y el segundo, que corresponde á $x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, se convertiria en $\frac{0}{0}$

Pero si se obtiene la forma $\frac{0}{0}$ es á causa de la existencia de un factor comun, $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, entre los dos términos del valor de x. (Véase lo dicho en los números 73 y 102.)

Los dos términos del primero comprenden tambien el factor comun $\sqrt{b}+\sqrt{c}$; pero suprimiéndolo se halla $x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, espresion que se reduce todavía á $\frac{a\sqrt{b}}{0}$ en la hipótesis de $b=c$.

Sean $b=c$ y $a=0$.

El primer sistema de valores de x y de $a-x$ se reduce á 0, y el segundo á $\frac{0}{0}$.

Este último carácter es aquí el símbolo de la *indeterminacion*, porque si se sube á la ecuacion del problema,

$$(b-c)x^2-2abx=-a^2b,$$

se reduce, en la hipótesis actual, á

$$0.\ x^2-0.\ x=0,$$

ecuacion que puede satisfacerse por un número cualquiera sustituido por x. Y en efecto, como las dos luces tienen la misma intensidad y se hallan colocadas en el mismo punto, *deben alumbrar igualmente cada uno de los puntos de la línea* AB.

La solucion 0 que da el primer sistema es una de las soluciones (*en número infinito*) de que acabamos de hablar.

Sea en fin a=0 *siendo* b *diferente de* c.

Cada sistema se reduce á *o*; lo que prueba que no hay en este caso mas que un solo punto igualmente iluminado, *y es en el que se hallan colocadas las dos luces.*

La ecuacion se reduce entónces á

$$(b-c)x^2=0,$$

y da los dos valores iguales, $x=0$, $x=0$.

La discusion precedente ofrece un nuevo ejemplo de la precision con que responde el álgebra á todas las circunstancias del enunciado de un problema.

104. Sesto problema. — *Hallar dos números tales que la diferencia de sus productos por los números respectivos* a *y* b *sea igual á un número dado* s, *y que la diferencia de sus cuadrados sea igual á otro número dado* q.

Solucion. Sean x é y los números buscados; se tienen las dos ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} ax-by=s, \\ x^2-y^2=q. \end{array}\right\}$$

De la primera se saca $x=\frac{by+s}{a}$, valor que sustituido en la segunda, da

(1) $$(a^2-b^2)y^2-2bsy=s^2-a^2q;$$

luego $$y=\frac{bs\pm a\sqrt{s^2-q(a^2-b^2)}}{a^2-b^2}.$$

Trasportando este valor á la espresion de x en y, se encuentra

$$x=\frac{b\left(\frac{bs\pm a\sqrt{s^2-q(a^2-b^2)}}{a^2-b^2}\right)+s}{a}$$

de donde $$x=\frac{as\pm b\sqrt{s^2-q(a^2-b^2)}}{a^2-b^2}.$$

(Conviene tener presente que en estos valores de y y de x se corresponden los dos signos superiores, así como los signos inferiores.)

Discusion. Supondremos en todo lo que sigue que a, b, q, s, son números absolutos: si así no fuese, ciertos términos de los valores de x y de y cambiarian de signo, y seria forzoso operar estos cambios ántes de discutir.

Sea a>b, *de donde* a^2-b^2 *positivo.*

Primeramente, para que los dos valores de x y de y sean reales, es preciso tener

$$q(a^2-b^2)<s^2, \text{ de donde } q<\frac{s^2}{a^2-b^2}.$$

Supongamos satisfecha esta última condicion, y determinemos los signos de que se hallan afectados ambos sistemas.

El primer sistema es $$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{as+b\sqrt{s^2-q(a^2-b^2)}}{a^2-b^2} \\[2ex] y=\dfrac{bs+a\sqrt{s^2-q(a^2-b^2)}}{a^2-b^2} \end{array}\right.$$

Los dos valores de este sistema son necesariamente positivos, y for-

man por consiguiente una *solucion* directa del problema, tal cual ha sido establecido.

El SEGUNDO SISTEMA es
$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{as-b\sqrt{s^2-q(a^2-b^2)}}{a^2-b^2} \\[2ex] y=\dfrac{bs-a\sqrt{s^2-q(a^2-b^2)}}{a^2-b^2}. \end{array}\right.$$

El valor de x es esencialmente positivo; porque de $a>b$ se saca $as>bs$, y *á fortiori*,

$$as>b\sqrt{s^2-q(a^2-b^2)},$$

pues que el radical es menor que s.

En cuanto al de y puede ser positivo ó negativo.

Para que sea positivo es preciso tener

$$bs>a\sqrt{s^2-q(a^2-b^2)};$$

de donde, elevando al cuadrado, $b^2s^2>a^2s^2-a^2q(a^2-b^2)$.

Añadamos $a^2q(a^2-b^2)$ á ambos miembros, y restemos de ellos b^2s^2; saldrá $a^2q(a^2-b^2)>s^2(a^2-b^2)$;

de donde dividiendo por $a^2(a^2-b^2)$, $q>\dfrac{s^2}{a^2}$.

De modo que para que el segundo sistema sea tambien *una solucion real y directa*, es preciso tener al mismo tiempo $q<\dfrac{b^2}{a^2-b^2}$, y $q<\dfrac{s^2}{a^2}$, es decir que q se halle comprendido entre los dos números $\dfrac{s^2}{a^2}$ y $\dfrac{a^2-b^2}{s^2}$.

(Observemos de paso que la condicion $q>\dfrac{s^2}{a^2}$ podia obtenerse mas fácilmente por medio de la ecuacion en y.

Como esta ecuacion es $(a^2-b^2)y^2-2bsy^2=s^2-a^2q$, se ve que en la hipótesis de $a>b$, es de la forma $x^2-px=-q$, si se tiene $a^2q>s^2$, ó $q>\dfrac{s^2}{a^2}$; y ya se sabe (núm. 100) que entónces ambas raíces son positivas á un mismo tiempo.)

Si se tuviese por el contrario $q<\dfrac{s^2}{a^2}$ en cuyo caso se tendria con mayor razon, $q<\dfrac{s^2}{a^2-b^2}$, seria *negativo* el valor de y del segundo sistema *negativo;* y este (hecha abstraccion del signo de y) no seria ya *una solucion* del enunciado tal como ha sido establecido, sino de aquel cuyas ecuaciones fuesen

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by=s \\ x^2-y^2=q \end{array}\right\},$$

y que no diferiria del precedente sino en que s espresaria una suma en vez de *una diferencia.*

Así en el caso de $a>b$ el problema admite *dos soluciones reales y directas* siempre que se tenga

$$q>\frac{s^2}{a^2},\ \text{pero}\ q<\frac{s^2}{a^2-b^2};$$

y no admite mas que *una sola* si se tiene $q<\dfrac{s^2}{a^2}$.

Tomando para a, b, s, números absolutos cualesquiera, con tal sin embargo que a sea $>b$, y eligiendo en seguida para q un número comprendido entre los dos límites $\dfrac{s^2}{a^2}$ y $\dfrac{s^2}{a^2-b^2}$, estaremos ciertos de obtener *dos soluciones directas.*

Sean por ejemplo, $a=6$, $b=4$, $s=15$,
de donde se deduce

$$\frac{s^2}{a^2}=\frac{225}{36}=6\frac{1}{4},\quad \frac{s^2}{a^2-b^2}=\frac{225}{20}=11\frac{1}{4}.$$

Podrá suponerse $q=10$, por ejemplo, y saldrá

$$x=\frac{6\times15\pm4\sqrt{225-20\times10}}{20}=\frac{60\pm20}{20}=\frac{11}{2}\ \text{y}\ \frac{7}{2},$$

$$y=\frac{4\times15\pm6\sqrt{225-20\times10}}{20}=\frac{60\pm30}{20}=\frac{9}{2}\ \text{y}\ \frac{3}{2}.$$

Las soluciones $\left(x=\frac{11}{2},\ y=\frac{9}{2}\right)$, y $\left(x=\frac{7}{2},\ y=\frac{3}{2}\right)$,

forman evidentemente *dos soluciones directas* de las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} 6x-4y=15 \\ x^2-y^2=10 \end{array}\right\}.$$

Pero si se supusiese $a=6$, $b=4$, $s=15$, $q=5$, seria fácil reconocer que de los dos sistemas solo el primero daria una solucion directa.

Casos particulares que se refieren á la hipótesis de a>b.

Sea $q=\frac{s^2}{a^2-b^2}$ de donde $q\ (a^2-b^2)s^2$.

Los dos sistemas de valores de x y de y se reducen á $x=\frac{as}{a^2-b^2}$, $y=\frac{bs}{a^2-b^2}$. Así en esta hipótesis no hay mas que una solucion del problema, y es *directa*.

Sea tambien $q=\frac{s^2}{a^2}$; de donde $s^2=a^2q$ y $s=a\sqrt{q}$;

el primer sistema se convierte en. . .
$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{as+b\sqrt{b^2q}}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\sqrt{q}, \\ y=\frac{bs+a\sqrt{b^2q}}{a^2-b^2}=\frac{2ab}{a^2-b^2}\sqrt{q}; \end{array}\right.$$

el segundo. . . . . .
$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{as-b\sqrt{b^2q}}{a^3-b^4}=\sqrt{q}, \\ y=\frac{bs-a\sqrt{b^2q}}{a^2-b}=0. \end{array}\right.$$

Y en efecto, supongamos $s^2=a^2q$ en la ecuacion en y; se reduce á $(a^2-b^2)\,y^3-2bsy=0$; de donde se deduce

$$y=0,\ y=\frac{2bs}{a^2-b^2}=\frac{2ab}{a^2-b^2}.\sqrt{q}.$$

Transportemos cada uno de estos valores á $x=\frac{by+s}{a}$;

resulta $\quad x=\frac{s}{a}=\sqrt{q}, \qquad x=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.\sqrt{q}.$

Sea ahora a<b; *de donde* a^2-b^2 *negativo.*

Las espresiones de x y de y pueden ponerse bajo la forma

$$x=\frac{-as\pm b\sqrt{s^2+q(b^2-a^2)}}{b^2-a^2}$$

$$x=\frac{-bs\pm b\sqrt{s^2+q(b^2-a^2)}}{b^2-a^2}$$

Estos valores son siempre reales, pues que la cantidad de debajo del radical es esencialmente positiva.

Por lo que hace á los signos, el primer valor de x es esencialmente negativo, sucediendo lo mismo con el primer valor de y. De modo que estos valores, hecha abstraccion de su signo, responden, no á las ecuaciones propuestas, sino á las ecuaciones $by-ax=s$, $x^2-y^2=q$, en la primera de las cuales *está invertido el órden de la diferencia entre los productos* ax y by.

El segundo valor de x es necesariamente positivo; porque de $b>a$ se deduce $b\sqrt{s^2+q(b^2-a^2)}>as$, pues que el radical es numéricamente mayor que s.

Pero el segundo valor de y no siempre es positivo. Para que lo sea es preciso tener la relacion

$$a\sqrt{s^2+q(b^2-a^2)}>bs,$$

de donde, elevando al cuadrado, $a^2s^2+a^2q(b^2-a^2)>b^2s^2$,
ó, trasponiendo a^2s^2, $a^2q\ (b^2-a^2)>(b^2-a^2)\,s^2$

y dividiendo por $a^2\,(b^2-a^2)$, $q>\frac{s^2}{a^2}$.

Dando á a, b, s, q, valores particulares, tales que se tenga $b>a$, y $q>\frac{s^2}{a^2}$, el problema será todavía susceptible *de una solucion directa.*