Sea en fin a=b ; *de donde* $a^2-b^2=0$.

El primer sistema de valores se convierte en esta hipótesis

en $$x=\frac{2as}{0},\quad y=\frac{2as}{0},$$

y el segundo en, $$x=\frac{0}{0}\quad y=\frac{0}{0}.$$

Pero si se sube á la ecuacion $(a^2-b^2)\ y^2-2bsy=s^2-a^2q$, que, cuando se hace $a=b$, se reduce á $-2asy=s-a^2q$

se deduce. . . . . $$y=\frac{a^2q-s^2}{2as}$$

y la espresion de x en y, $x=\frac{by+s}{a}$, da $x=\frac{a^2q+s^2}{2as}$.

(Se llegaria á iguales resultados imitando uno de los procedimientos seguidos en el núm. 102, es decir, haciendo en la ecuacion en y, $y=\frac{1}{z}$; ó bien, poniendo en evidencia el factor comun a^2-b^2 en las espresiones de y y de x que se han reducido á la forma $\frac{0}{0}$.)

Para que sea *directa* la solucion $x=\frac{a^2q+s^2}{2as}$, $y=\frac{a^2q-s^2}{2as}$, es preciso tener $q>\frac{s^2}{a^2}$.

De las transformaciones que se pueden hacer esperimentar á las desigualdades.

105. En el curso de la discusion de los dos problemas precedentes tuvimos ocasion de poner várias *desigualdades*, sobre las que se ejecutaron transformaciones análogas á las que se ejecutan sobre las *ecuaciones*. Esto es en efecto lo que es preciso hacer á veces, cuando discutiendo un problema, se quieren establecer entre los datos las relaciones necesarias para que el problema sea susceptible de una solucion directa

ó al ménos real, y fijar con ayuda de dichas relaciones los límites entre los cuales deben hallarse los valores particulares de ciertos datos para que el enunciado satisfaga á tal ó cual circunstancia. Ahora bien; aunque los principios establecidos para las ecuaciones sean por lo general aplicables á las desigualdades, hay sin embargo algunas escepciones de que es preciso hablar, para precaver á los principiantes de algunos errores que podrian cometer al hacer uso de los signos de desigualdad. Estas escepciones provienen de la introduccion *de las espresiones negativas* como *cantidades* en los cálculos.

Para mayor claridad recorreremos las diversas transformaciones que es permitido hacer esperimentar á las desigualdades, cuidando de hacer resaltar al mismo tiempo las transformaciones cuyo empleo debe proscribirse.

Transformacion por adicion y sustraccion. *Se puede, sin escepcion alguna, sumar á los dos miembros de una desigualdad cualquiera, ó restar una misma cantidad; la desigualdad subsiste siempre en el mismo sentido.*

Así, sea $8>3$; se tiene $8+5>3+5$, y $8-5>3-5$.

Sea tambien $-3<-2$; se tiene igualmente $-3+6<-2+6$, y $-3-6<2-6$. Lo que resulta de los principios establecidos en el núm. 63.

La transformacion anterior sirve, como en las ecuaciones, para hacer pasar ciertos términos de un miembro de la desigualdad al otro.

Sea por ejemplo la desigualdad $a^2+b^2>3b^2-2a^2$;

resulta que $a^2+2a^2>3b^2-b^2$ ó $3a^2>2b^2$.

Se pueden, sin escepcion alguna sumar miembro á miembro dos ó mas desigualdades establecidas en el mismo sentido; se obtiene de este modo *una desigualdad del mismo sentido que las propuestas.*

Así, $a>b$, $c>d$, $e>f$..., dan $a+c+e>b+d+f$.

Pero *no sucede siempre lo mismo si se sustraen miembro á miembro dos ó mas desigualdades establecidas en el mismo sentido.*

Sean las desigualdades $4<7$ y $2<3$,
se tiene $4-2<7-3$, ó $2<4$.

Pero sean las desigualdades $9<10$, y $6<8$;
sale por la sustraccion, $9-6<10-8$ ó $3<2$.

Debe evitarse cuanto sea posible esta transformacion; ó asegurarse cuando se emplee de si hay desigualdad en el resultado, y en qué sentido sea este.

Transformacion por multiplicacion y division. *Se pueden multiplicar los dos miembros de una desigualdad por un número* positivo *ó* absoluto: *hay desigualdad del mismo sentido* en los resultados

Así de $a>b$, se saca $3a>3b$;

y de $-a>-b$, se deduce $-3a>-3b$.

Este principio sirve para hacer desaparecer los denominadores.

Que se tenga la desigualdad $\frac{a^2-b^2}{2d}>\frac{c^2-d^2}{3a}$; se deduce de ella, multiplicando ambos miembros por $6ad$,

$$3a\,(a^2-b^2)>2d\,(c^2-d^2).$$

Igual principio para la division.

Pero *cuando se multiplican ó dividen ambos miembros de una desigualdad por una cantidad negativa* se obtiene *una desigualdad de sentido contrario.*

Sea por ejemplo, $8>7$; multiplicando ambos miembros por -3, se tiene por el contrario, $-24<-21$.

Del mismo modo, $8>7$ da $\frac{8}{-3}$, ó $-\frac{8}{3}<\frac{7}{-3}$, ó $-\frac{7}{3}$.

Así cuando se multiplican ó dividen ambos miembros de una desigualdad por un número espresado algebráicamente, es preciso asegurarse si puede llegar á ser negativo el *multiplicador* ó el *divisor;* porque en este último caso la desigualdad seria de sentido contrario.

En el problema del núm. 104, de la desigualdad

$$a^2q\,(a^2-b^2)>s^2\,(a^2-b^2),$$

se ha podido deducir $q>\frac{s^2}{a^2}$, dividiendo por $a^2(a^2-b^2)$ porque se habia supuesto $a>b$, ó a^2-b^2 positivo.

No es permitido cambiar los signos á ambos miembros de una desigualdad á no ser que se establezca la resultante en sentido contrario; transformacion que se reduce evidentemente *á multiplicar ambos miembros por* -1.

TRANSFORMACION POR ELEVACION AL CUADRADO. *Pueden elevarse al cuadrado ambos miembros de una desigualdad entre dos números absolutos subsistiendo la desigualdad en el mismo sentido.*

Así de $5>3$, se deduce $25>9$.

De $a+b>c$, se saca $(a+b)^2>c^2$.

Pero *si ambos miembros de la desigualdad son de signos cualesquiera, no se puede afirmar de antemano en qué sentido se verificará la desigualdad resultante.*

Por ejemplo, $-2<3$ da $(-2)^2$ ó $4<9$;

y $-3>-5$ da, por el contrario, $(-3)^2$ ó $9>(-5)^2$ ó 25.

Es preciso, pues, asegurarse, ántes de elevar al cuadrado, de si ambos miembros pueden ó no considerarse como *números absolutos.*

TRANSFORMACION POR ESTRACCION DE RAÍZ CUADRADA. *Se puede estraer la raiz cuadrada de ambos miembros de una desigualdad entre números absolutos; subsistiendo la desigualdad en el mismo sentido entre los valores numéricos de estas raices cuadradas.*

Observemos ante todo que no se puede proponer el estraer la raíz cuadrada de ambos miembros de una desigualdad *sino en tanto que son esencialmente positivos;* porque de otra manera se veria uno conducido *á espresiones imaginarias* que no se podrian comparar.

Pero que se tenga $9<25$; se deduce $\sqrt{9}$ ó $3<\sqrt{25}$ ó 5.

De $a^2>b^2$ se deduce $a>b$, si a y b espresan números absolutos.

Del mismo modo, la desigualdad $a^2>(c-b)^2$ da

$$a>c-b \text{ si se supone } c \text{ mayor que } b.$$

y $a>b-c$ si por el contrario es b mayor que c.

En una palabra, cuando los dos miembros de una desigualdad están compuestos de términos aditivos y sustractivos, *debe tenerse cuidado de escribir para la raíz cuadrada de cada miembro, un polinomio en que sean posibles las sustracciones.*

106. Hé aquí los enunciados de nuevos problemas:

SÉPTIMO PROBLEMA. *Dos mercaderes venden de una misma tela á precios diferentes; el segundo vende 3 varas mas que el primero, habiendo sacado juntos de su venta 35 escudos de 5 francos. El primero dice al segundo: yo he sacado de vuestra tela 24 escudos; y el otro le responde: y yo de la vuestra 12 escudos ½. Cuántas varas habrá vendido cada uno?*

(Resp. 1er. mercader. . $x=15$ $x=5$, 2º. . . . . $y=18$ ó bien $y=8$.)

OCTAVO PROBLEMA. *Un negociante debe un billete de 6240 francos pagadero á los 8 meses, y otro de 7632 francos pagadero á los 9. Retira estos*

dos billetes, reemplazándolos con un billete de 14256 *fr. pagadero dentro de un año. Se pide el tanto de interes?*

(Resp. 10 fr. 33. cent. p% al año.)

(Suponemos aquí, que cada billete ha sido reducido á su verdadero valor, en el instante mismo del cambio de los billetes; pues conviene observar que la cuestion puede tratarse de diferentes maneras, dando lugar á resultados completamente diferentes segun las épocas á que se reduzcan los valores de los billetes.)

NOVENO PROBLEMA. *Una persona posee* 13000 *fr. que divide en dos partes (colocadas ambas á rédito), de modo que saca una renta igual. Si hiciese producir á la primera parte tanto como á la segunda sacaria de ella* 360 *fr. de interes; y si hiciese producir á la segunda parte un tanto igual á la primera sacaria* 490 *fr. de rédito. Se piden los dos tantos de interes?*

(La ecuacion de este problema puede resolverse mas simplemente que por el método general.)

DÉCIMO PROBLEMA. *Hallar dos rectángulos en que se conozca la suma* q *de las superficies, la* a *de las bases, y las superficies* p *y* p′ *cuando se da á la base de cada uno de ellos la altura del otro, es decir, cuando se alternan las alturas.*

$$\left(\textit{Resp.}\ \text{Base del primero, } x=\frac{a\left[2p+q\pm\sqrt{q^2-4pp'}\right]}{2\left[p+p'+q\right]}.\right)$$

(Debe resolverse y discutirse este problema.)

UNDÉCIMO PROBLEMA. *Dividir dos números* a *y* b, *ambos en dos partes iguales, de modo que el producto de una parte de* a *por una de* b *sea igual á un número dado* p, *y que el producto de las partes restantes de* a *y* b, *sea tambien igual á un número dado* p′? Resuélvase y discútase este problema.

DUODÉCIMO PROBLEMA. *Hallar un número tal que su cuadrado sea al producto de las diferencias entre este número y otros dos números dados* a *y* b *en una relacion conocida,* p : q? Resuélvase y discútase este problema.

Recomendamos á los discípulos este último problema no solo porque en discusion ofrece nuevas aplicaciones de los principios acerca de las desigualdades, sino porque las fórmulas á que se llega encierran implícitamente las soluciones de una muchedumbre de cuestiones análogas cuyos enunciados no difieren sino por el sentido de ciertas condiciones.

Cuestiones sobre los *máximos y mínimos.* Propiedades de los trinomios del segundo grado.

107. Existe una clase de problemas que se encuentran particularmente en la *Geometría analítica*, y que es posible muchas veces resolver con ayuda de las teorías precedentes. Tales son los que tienen por objeto *determinar el mayor ó menor valor que puede recibir el resultado de ciertas operaciones aritméticas efectuadas sobre números.*

Supongamos que se haya propuesto esta primera cuestion: *Dividir un número dado* 2a *en dos partes cuyo producto sea el mayor posible ó un máximum.*

Designemos por x una de las partes, la otra será $2a-x$, y su producto, $x(2a-x)$.

Si se dan á x diferentes valores, este producto pasará por diferentes *estados de magnitud;* y se trata de asignar á x el valor que debe hacer á este producto *el mayor posible.*

Designemos por y este mayor producto cuyo valor por de pronto es desconocido; se tendrá, segun el enunciado, la ecuacion

$$x(2a-x)=y.$$

Mirando á y como conocido, y sacando de esta ecuacion el valor de x, se halla $x=a\pm\sqrt{a^2-y}$.

Ahora bien; este resultado hace ver que x no puede ser real sino en tanto que se tenga $y<a^2$, ó á lo mas, $y=a^2$.

De donde se puede concluir que el mayor valor que se puede dar á y, es decir, al producto de ambas partes, es a^2.

Pero si se hace $y=a^2$, resulta $x=a$.

Luego *para obtener el mayor producto es preciso dividir el número dado* 2a *en dos partes iguales; y el máximum que se obtiene de este modo es el cuadrado de la mitad del número;*

Resultado que se encontró ya por otro medio (núm. 100).

Solucion mas simple. Llamemos $2x$ la diferencia que existe entre las dos partes; pues que su suma está ya espresa por $2a$, la mayor de estas partes (núm. 4) estará representada por $\frac{2a+2x}{2}$, ó $a+x$, la menor por $a-x$;

Y se tendrá para la ecuacion, $(a+x)(a-x)=y$,
ó efectuando los cálculos,

$$a^2-x^2=y, \text{ de donde } x=\pm\sqrt{a^2-y}.$$

Para que sea real este valor de x, es preciso que y sea cuando mas igual á a^2; haciendo pues $y=a^2$ se obtiene $x=0$,

Lo que prueba *deben ser iguales ambas partes.*

Este medio de resolucion tiene la ventaja de conducir á una ecuacion del segundo grado de dos términos.

108. Nota. En las ecuaciones

$$x(2a-x)=y, \text{ y } (a+x)(a-x)=y,$$

x se llama *una variable*, y $x(2a-x)$ ó $(a+x)(a-x)$ una cierta funcion de la variable.

Esta funcion, representada por y, es tambien otra *variable*, cuyo valor depende del que se atribuye á la primera; siendo esta la razon porque los analistas designan á esta algunas veces con el nombre de *variable independiente*, miéntras que la segunda ó y recibe valores dependientes de los atribuidos á x.

Resolviendo respecto á x las dos ecuaciones

$$x(2a-x)=y, \text{ y } (a+x)(a-x)=y,$$

lo que da $\quad x=a\pm\sqrt{a^2-y}$, y $x=\pm\sqrt{a^2-y}$,

puede á su vez mirarse á y como una *variable independiente*, y á x como cierta *funcion* de esta variable.

109. Propongámonos por segunda cuestion:

Dividir un número 2a *en dos partes, tales que la suma de las raíces cuadradas de estas dos partes sea un máximo.*

Llamemos x^2 una de las partes; $2a-x^2$ será la otra parte, y la suma de sus raíces cuadradas tendrá por espresion,

$$x+\sqrt{2a-x^2}:$$

esta es la espresion cuyo *máximo* es preciso determinar.

Supongamos $\quad x+\sqrt{2a-x^2}=y.$

Para resolver esta ecuacion es preciso aislar el radical. Se tiene primeramente trasponiendo el término x al segundo miembro,

$$\sqrt{2a-x^2}=y-x,$$

de donde, elevando al cuadrado, $\quad 2a-x^2=y^2-2xy+x^2$,

ú, ordenando respecto á x, $\quad 2x^2-2xy=2a-y^2$,

ecuacion de la que se saca $\quad x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{y^2}{4}+\frac{2a-y^2}{2}}$,

ó simplificando, $\quad x=\frac{y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4a-y^2}.$

Para que sean reales los dos valores de x es preciso que y^2 sea cuando mas, igual á $4a$;

Luego $2\sqrt{a}$ es *el mayor valor* que puede recibir y.

Si se hace $y=2\sqrt{a}$, resulta $x=\sqrt{a}$,
de donde se deduce $x^2=a$, y $2a-x^2=a$.

Así *el número dado* 2a *debe dividirse en dos partes iguales para que la suma de las raices cuadradas de estas dos partes sea un* MÁXIMUM.

Este máximo es por otro lado igual á $2\sqrt{a}$.

Sea por ejemplo, 72 el número propuesto;

se tiene $\quad 72=36+36$; de donde $\sqrt{36}+\sqrt{36}=12.$

Este es el *máximum* del valor que se puede obtener para la suma de las raíces cuadradas de las dos partes de 72.

Y en efecto, descompongamos 72 en $64+8$; se tiene $\sqrt{64}=8$, y $\sqrt{8}=2+$ una frac.; de donde $\sqrt{64}+\sqrt{8}=10+$ una frac.; descompuesto en $\sqrt{49}+\sqrt{23}=11+$ una frac.

Consideremos por tercer ejemplo la *espresion* $\frac{m^2x^2+n^2}{(m^2-n^2)x}$, *que se trata de convertir en un* MÍNIMUM, (suponiendo $m>n$).

Supongamos $\frac{m^2x^2+n^2}{(m^2-n^2)\,x}=y$, de donde $m^2x^2-(m^2-n^2)\,y,\ x=-n^2$;

se deduce de ella $x=\frac{(m^2-n^2)\,y}{2m^2}\pm\frac{1}{2m^2}\sqrt{(m^2-n^2)^2y^2-4m^2n^2}$.

Pero para que los dos valores de x correspondientes á un valor de y, sean reales, es preciso evidentemente que $(m^2-n^2)^2y^2$ sea *por lo ménos* igual á $4m^2n^2$ y por consiguiente que y sea por lo ménos igual á $\frac{2mn}{m^2-n^2}$.

De modo que $\frac{2mn}{m^2-n^2}$ es el *minimum* de los valores que se pueden dar á y.

Si se hace $y=\frac{2mn}{m^2-n^2}$, en la espresion de x, desaparece el radical, y el valor de x se convierte en

$$x=\frac{m^2-n^2}{2m^2}\times\frac{2mn}{m^2-n^2}=\frac{n}{m}.$$

Este valor $x=\frac{n}{m}$, es pues el que hace un *minimum* á la espresion propuesta.

110. Estos ejemplos bastan para ponerse al corriente de la marcha que se ha de seguir en la resolucion de esta especie de cuestiones.

Despues de haber formado la espresion algebráica de la cantidad susceptible de convertirse, YA SEA EN UN MÁXIMUM, YA EN UN MÍNIMUM, *se la iguala á una letra cualquiera* y. *Si la ecuacion que se obtiene de esta manera es del segundo grado en* x (designando x la cantidad variable que entra en la espresion algebráica), *se la resuelve respecto* á x; *se iguala en seguida á cero la cantidad sometida al radical, y se saca de esta última ecuacion un valor de* y *que representa entónces el máximum ó el minimum buscado. Sustituyendo en fin este valor de* y *en la espresion de* x *se obtiene el valor de* x, *propio para satisfacer al enunciado.*

NOTA. Si sucediese que la cantidad de debajo del radical permaneciese positiva, cualquiera que fuese el valor de y, se concluiria de aquí *que la espresion propuesta puede pasar por todos los estados de magnitud posibles*; ó en otros términos, *que tiene el infinito por* MÁXIMUM *y* 0 *por* MÍNIMUM.

Sea, como nuevo ejemplo, la espresion $\frac{4x^2+4x-3}{6\,(2x+1)}$.

Se pregunta si esta espresion es susceptible de un *máximum* ó de un *minimum*?

Supongamos $\frac{4x^2+4x-3}{6\,(2x+1)}=y$.

Resulta la ecuacion $4x^2-4\,(3y-1)\,x=6y+3$,

de donde se deduce $x=\frac{3y-1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{9y^2+4}$.

Pero cualquiera que sea el valor que se dé á y será siempre positiva la cantidad de debajo del radical. De modo que y ó la espresion propuesta puede pasar por todos los estados de magnitud.

En los ejemplos precedentes la cantidad sometida al radical del valor de x, no encerraba mas que dos partes, la una afectada de y ó y^2, y la otra enteramente conocida; y ha sido fácil obtener el *máximum* ó el *minimum* de que la funcion era susceptible. Pero puede suceder que esta cantidad sea un trinomio del segundo grado de la forma

$$my^2+ny+p.$$

En este caso la cuestion es ya mas difícil, y para ponerse en estado de resolverla completamente es necesario demostrar várias propiedades relativas á estos trinomios.

Propiedades de los trinomios del segundo grado.

111. Llámase *trinomio del segundo grado* á toda espresion tal como my^2+ny+p (en que m, n y p son *cantidades conocidas* de cualesquiera signos, y y designa ademas una *variable*, es decir, una cantidad que se hace pasar por diferentes estados de magnitud).

Así $3y^2-5y+7-9y^2+2y+5$,

$$(a-b+2c)\,y^2+4b^2y-2ac^2+3a^2b,$$

se llaman *trinomios* del segundo grado en y.

Si se iguala á 0 el trinomio my^2+ny+p, lo que da

$$my^2+ny+p=0,\ \text{de donde}\ y=-\frac{1}{2m}\sqrt{n^2-4mp},$$