se pueden hacer tres hipótesis principales respecto á la naturaleza de los valores de y que se acaban de obtener :

1°. $n^2-4mp>0$;

las dos raíces son entónces *reales y desiguales;*

2°. $n^2-4mp=0$;

en cuyo caso las dos raíces son *reales é iguales;*

3°. $n^2-4mp<0$;

y en este son imaginarias ambas raíces.

Sentado esto, hé aquí las propiedades relativas á estos diferentes casos :

Primeramente. — Siempre que un trinomio del segundo grado es tal que igualándolo á 0 y resolviendo la ecuacion que resulta, se obtienen dos raíces *reales y desiguales* (de cualesquiera signos) *toda cantidad* (positiva ó negativa) comprendida entre las dos raíces, *sustituida en lugar de* y *en el trinomio da necesariamente un resultado de signo contrario al de que está afectado el coeficiente de* y^2; *pero toda cantidad no comprendida entre ambas raíces,* y diferente de cada una de ellas, *sustituida en lugar de* y *da* un resultado del mismo *signo que el coeficiente de* y^2.

En efecto, sea la ecuacion

$$my^2+ny+p=0;$$

y para fijar las ideas representemos por y' la raíz que se aproxima mas al *infinito negativo*, es decir la raíz menor, y por y'' la otra raíz.

Sentado esto, el primer miembro puede ponerse (núm. 97) bajo la forma $m(y-y')(y-y'')$; y se tiene la identidad

$$my^2+ny+p=m(y-y')(y-y'');$$

lo que significa (núm. 42) que debe existir esta igualdad, cualquiera que sea el valor que se dé á y.

Sea ahora a una cantidad comprendida entre y' é y'', es decir tal que se tenga

$$a>y', \text{ pero } a<y'';$$

resulta $$a-y'>0, \text{ pero } a-y''<0;$$

por donde se ve que los factores $a-y'$, $a-y''$, son de *signos contrarios;* de modo que su producto $(a-y')(a-y'')$, es *negativo.*

Luego, $m(a-y')(a-y'')$, ó su valor ma^2+na+p, es de signo contrario al de que se halla afectado m.

Sea por el contrario, $a<y'$ y *à fortiori* $a<y''$, de donde se deduce

$$a-y<0 \text{ y } a-y''<0.$$

Los dos factores son del mismo signo; luego $(a-y')(a-y'')$ es positivo; por consiguiente,

$$m(a-y')(a-y''), \text{ ó } ma^2+na+p,$$

es del mismo signo que m.

Igual razonamiento se hace para el caso de $a>y''$ y *à fortiori* $a>y'$;

Q. E. L. Q. Q. D.

En segundo lugar. Si son reales é iguales ambas raíces *toda cantidad diferente de la que reduce el trinomio á* 0, *sustituida en este trinomio, da un resultado del mismo signo que el coeficiente de* y^2.

En efecto, pues que ambas raíces son iguales, se tiene la relacion

$$n^2-4mp=0, \text{ de donde se saca } p=\frac{n^2}{4m};$$

y desde entónces el trinomio my^2+ny+p ó $m\left(y^2+\frac{n}{m}y+\frac{p}{m}\right)$ puede escribirse de este modo :

$$m\left(y^2+\frac{n}{m}y+\frac{n^2}{4m^2}\right) \quad \text{ó } m\left(y+\frac{n}{2m}\right)^2$$

Es evidente pues que para todo valor de y, diferente de $-\frac{n}{2m}$, la cantidad $\left(y+\frac{n}{2m}\right)^2$ será positiva.

Así, $m\left(y+\frac{n}{2m}\right)^2$ ó my^2+ny+p tendrá el signo de m;

Q. E. L. Q. Q. D.

En tercer lugar. Finalmente, si son imaginarias ambas raíces *toda cantidad real,* positiva ó negativa, *sustituida en lugar de* y *dará un resultado del mismo signo que el coeficiente de* y^2.

Porque como son imaginarias ambas raíces, se tiene la relacion

$$n^2-4mp<0, \text{ de donde } 4mp>n^2;$$

ó bien (núm. 105), dividiendo por $4m^2$. $\frac{p}{m}>\frac{n^2}{4m^2}$.

Sea, pues, $\frac{p}{m}=\frac{n^2}{4m^2}+k^2$ (en que k^2 designa una cantidad esencialmente positiva); resulta

$$my^2+ny+p=m\left(y^2+\frac{n}{m}y+\frac{n^2}{4m^2}+k^2\right)=m\left(y+\frac{n}{2m}\right)^2+mk^2,$$

cantidad que seguirá siempre siendo del mismo signo que m, cualquiera que sea el valor que se atribuya á y.

112. La segunda propiedad nos conduce naturalmente á hablar de una proposicion que es de un uso frecuente en el análisis.

Siempre que un trinomio del 2°. grado, my^2+ny+p, *es un cuadrado perfecto, se tiene entre sus coeficientes la relacion*

$$n^2-4mp=0.$$

En efecto, si este trinomio es un cuadrado perfecto y de la forma $(m'y+n')^2$, las dos raíces de la ecuacion $my^2+ny+p=0$ deben *ser iguales*. Mas para que lo sean es preciso que la cantidad de debajo del radical, ó n^2-4mp, sea nula. Se tiene, pues, la relacion

$$n^2-4mp=0.$$

Recíprocamente. Si se tiene entre los coeficientes la relacion $n^2-4mp=0$, el trinomio es un cuadrado perfecto porque se deduce de esta relacion $p=\frac{n^2}{4m}$; de donde

$$my^2+ny+p=my^2+ny+\frac{n^2}{4m}=\left(y\sqrt{m}+\frac{n}{2\sqrt{m}}\right)^2.$$

113. Veamos ahora el uso de estas propiedades, en la resolucion de las cuestiones sobre los *máximos* y *mínimos*.

Supongamos que se haya propuesto determinar si cuando se hace variar x, la funcion $\frac{x^2-2x+21}{6x-14}$ puede pasar por todos los estados de magnitud.

Hagamos pues $\frac{x^2-2x+21}{6x-14}=y$;

de donde $x^2-2(3y+1)x=-21-14y$.

Resulta $x=3y+1\pm\sqrt{9y^2-8y-20}$.

Para que x sea real es preciso que $9y^2-8y-20$ sea positivo. Si se iguala, pues, esta cantidad á 0, sale

$$y^2-\frac{8}{9}y-\frac{20}{9}=0, \text{ de donde } y=2 \text{ é } y=-\frac{10}{9}$$

Como estos dos valores de y son reales, se sigue de la primera de las anteriores propiedades, que tan luego como se den á y valores comprendidos entre $-\frac{10}{9}$ y 2, tales como $-1, 0, 1$, será *negativo* el valor del trinomio, pues que es *positivo* el coeficiente de y^2. Pero dando á y volores no comprendidos entre $-\frac{10}{9}$ y 2, como -3, -2....., 3, 4....., se obtendrá un resultado *positivo*.

Se ve, pues, que 2 es, *en números absolutos*, el *mínimum* de los valores que puede recibir y, para que x sea real; y si en la espresion de x anterior se hace $y=2$, desaparece el radical, y se halla $x=7$.

En efecto, la espresion $\frac{x^2-2x+21}{6x-14}$

se convierte, cuando se introduce en ella $x=7$,

en $\frac{49-14+21}{42-14}=\frac{56}{28}=2$.

La raíz $y=-\frac{10}{9}$ es, *en números negativos*, el *máximum* de los valores que puede recibir y; y el valor de x correspondiente á este *máximum*, es $x=3\times-\frac{10}{9}+1=-\frac{7}{3}$.

Nota. Cuando hallándose x expresado en y, el coeficiente de y^2 de debajo del radical es negativo, y los dos valores de y, deducidos del trinomio igualado á 0, son, el uno positivo y el otro negativo, *el valor*

positivo es un máximum, pues que todo valor mayor daria un resultado del mismo signo que el coeficiente de y^2, y por consiguiente negativo; *el valor negativo es un minimum* entre los valores negativos que puede recibir y.

Dejamos á los discípulos el cuidado de examinar las demas circunstancias que pueden presentarse: por ejemplo, el caso en que siendo positivo el coeficiente de y^2, son positivos ambos valores de y; y en el que, siendo positivo este mismo coeficiente, son imaginarios ambos valores. Podrán tambien ejercitarse en las cuestiones siguientes:

1°. *Dividir un número dado* 2a *en dos partes, de manera que la suma de los cocientes que se obtienen cuando se dividen mutuamente estas dos partes una por otra, sea un minimum.*

(Resp. Las dos partes deben ser iguales, y el *minimum* es 2.)

2°. *Sean* a *y* b *dos números absolutos; se pide para* x *un valor tal que la espresion* $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}$ *sea un máximum?*

(Respuesta: $x=\frac{2ab}{a-b}$; y el *máximum* correspondiente es $y=\frac{(a+b)^2}{4ab}$).

3°. *Sean* a *y* b *dos números obsolutos; se pide para* x *un valor tal que la espresion* $\frac{(a+x)(b+x)}{x}$ *sea un minimum?*

(Resp. Aquí se hallan dos valores, á saber:

$x=+\sqrt{ab}$, á que corresponde un *minimum* $y=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$,

y

$x=-\sqrt{ab}$, á que corresponde un *máximum* $y=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$)

---

§ III. DE LAS ECUACIONES Y PROBLEMAS DEL SEGUNDO GRADO CON DOS Ó MAS INCÓGNITAS. — NUEVAS OPERACIONES SOBRE LOS RADICALES DE SEGUNDO GRADO, REALES Ó IMAGINARIOS.

114. No podemos dar aquí una teoría completa; porque haremos ver en breve, que la resolucion de dos ecuaciones del segundo grado con dos incógnitas, depende en general de la resolucion de una ecua-

cion del cuarto grado con una sola incógnita; pero vamos á proponer algunas cuestiones que no dependen en último análisis sino de la resulucion de una ecuacion del segundo grado con una incógnita.

PRIMER PROBLEMA. *Hallar dos números tales que la suma de sus productos por los números respectivos* a *y* b *sea igual á* 2s, *y que su producto sea igual á* p.

Sean x é y los dos números buscados; se tienen las ecuaciones

$$ax+by=2s,$$

$$xy=p.$$

De la primera se saca $y=\frac{2s-ax}{b}$;

de donde, sustituyendo en la segunda y reduciendo,

$$ax^2-2sx=-bp.$$

Luego $x=\frac{s}{a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{s^2-abp}$,

y por consiguiente $y=\frac{s}{b}\mp\frac{1}{b}\sqrt{s^2-abp}$.

Como se supone aquí que a, b p, son números absolutos, el problema es susceptible de dos soluciones directas, porque s es evidentemente $>\sqrt{s^2-abp}$.

Pero para que sean reales se debe tener $s^2>$ ó $=abp$.

Sea $a=b=1$; los valores de x y de y se reducen

á $x=s\pm\sqrt{s^2-p}$ é $y=s\mp\sqrt{s^2-p}$.

Por donde se ve que los dos valores de y son iguales á los de x tomados en un órden inverso; lo que quiere decir que si $s+\sqrt{s^2-p}$ representa el valor de x, $s-\sqrt{s^2-p}$, es el correspondiente de y; y recíprocamente.

Se interpreta esta circunstancia observando que las ecuaciones se reducen, en este caso particular, á $\begin{cases} x+y=2s \\ xy=p; \end{cases}$